Модел. и анализ информ. систем. Т. **19**, № **3** (2012) 97–104

УДК 517.5

О гладкости в $L_p,\ 0 < p < 1$

Морозов А. Н.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

e-mail: moroz@uniyar.ac.ru

получена 20 января 2012

Ключевые слова: оператор дифференцирования, квазинорма

Обсуждаются свойства функций, охватываемых распространением оператора дифференцирования за границы пространства W_1^1.

1. Введение и основные обозначения

Понятие производной является одним из основополагающих понятий в математике в целом и теории функций в частности. На протяжении своей истории оно не раз обобщалось и распространялось на новые функциональные классы. В работах автора [1] — [3] было рассмотрено распространение k-й производной (оператора) с пространств W_1^k на пространства, являющиеся в определённом смысле их преемниками и имеющие нижний индекс меньше единицы. Это распространение связано с изучением кусочно-полиномиальных и локальных приближений в соответствующих метриках и находится в русле тенденций, наблюдаемых в теории приближения функций в конце XX—начале XXI века.

В 70-80-е годы прошлого века произошёл всплеск интереса к пространствам, построенным на основе $L_p,\ 0 < p < 1$, и исследованию в них основных используемых характеристик функций и известных соотношений. В большой степени интерес был обусловлен получением фундаментальных результатов о свойствах модулей непрерывности в этих пространствах [4], [5]. К концу века по данной тематике накопился большой фактический материал, стало понятно, что не все надежды оправдались (см., например, [6]). Следующая волна исследований была посвящена изучению характеристик функций и методов, плодотворных во всех пространствах L_p (см., например, [7], [8]). В упоминавшихся работах [1] — [3] получены новые результаты о кусочно-полиномиальных и локальных приближениях функций, в том числе асимптотические формулы для величин наилучших приближений, единые для всех $p > 0$. Данные асимптотические формулы неразрывно связаны с гладкостью приближаемых функций. При $p \geq 1$ — с наличием обычных производных соответствующего порядка, при $0 < p < 1$ — с некоторым распространением этих производных.

В статье [9] введённые производные изучаются при $k = 1$ и сопоставляются с понятием первообразной. Данная статья также посвящена случаю $k = 1$.

Как обычно, $L_p[I]$ обозначает пространство действительных функций, интегрируемых в степени p $(0 < p < \infty)$ по Лебегу на отрезке $I = [a; b]$, с величиной элементов

$$\|f\|_{L_p[I]} = \Big(\int\limits_I |f(t)|^p dt \Big)^{\frac{1}{p}};$$

$C[I]$ — пространство непрерывных на I функций,

$$\|f\|_{C[I]} = \max_{x \in I} |f(x)|.$$

Когда неясность исключена, сокращаем обозначения до L_p и $\|f\|_p$ или соответственно до C и $\|f\|_\infty$.

Ещё, чтобы избежать постоянных оговорок, для значений индекса, меньших единицы, будет использоваться буква r, т.е. всюду ниже $0 < r < 1$, а $p \geq 1$.

Основой для дальнейших построений являются пространство непрерывно дифференцируемых на отрезке I функций $C^1[I]$ и

$$W_p^1[I] = \Big\{ f : f \text{ абсолютно непрерывна на отрезке } I, f' \in L_p[I] \Big\}$$

с нормами $\|f\|_p + \|f'\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$.

Главную идею удобно проиллюстрировать следующим рассуждением. Рассмотрим оператор дифференцирования $\Lambda : C^1 \mapsto C$, $\big(\Lambda f\big)(x) = f'(x)$. Пусть на пространстве C введена норма $\|\cdot\|_1$, а на пространстве C^1 — норма $\|\cdot\|_1 + \|(\cdot)'\|_1$. Очевидно,

$$\|\Lambda f\|_C \leq \|f\|_{C^1}.$$

Из этого неравенства следует, что оператор Λ может быть однозначно распространён с C^1 на его замыкание в метрике, порождаемой нормой $\|\cdot\|_1 + \|(\cdot)'\|_1$, т.е. на W_1^1. При этом областью значений Λ будет пространство, являющееся замыканием C в определённой на нём метрике, т.е. L_1. Относящиеся к этому рассуждению теоремы см., например, в [10] на с. 240.

Все пространства W_p^1 можно рассматривать как замыкания пространства C^1 в метриках, порождаемых нормами $\|f\|_p + \|f'\|_p$, $1 \leq p < \infty$, а построение производной в этих пространствах — как распространение непрерывного линейного оператора Λ с пространства C^1, т.е. построение $\Lambda : W_p^1 \mapsto L_p$.

Замечание 1. Описанная схема распространения оператора дифференцирования справедлива при любом $k \in N$ (см. [1]—[2]), т.е. для случая $\Lambda^k : C^k \mapsto C$.

Нормы на пространствах W_p^1 и C^1 могут быть преобразованы к виду

$$\|f\|_p + \sup_{t>0} t^{-1} \omega_1(f, t)_p,$$

где

$$\omega_1(f, t)_p = \sup_{0<\delta<t} \big\|\Delta_\delta^1 f\big\|_{L_p[a, b-\delta]}$$

— модуль непрерывности в L_p,

$$\Delta_\delta^1 f(x) = \ f(x+\delta) - f(x).$$

Хорошо известно, что при всех $1 \le p \le \infty$ выполняется

$$\sup_{t>0} t^{-1}\omega_1(f,t)_p = \lim_{t\to 0}\ t^{-1}\omega_1(f,t)_p = \left\|f^{\,\prime}\right\|_p.$$

На пространстве C^1 рассмотрим семейство квазинорм (определение и основные свойства квазинорм см., например, [11] с. 79):

$$\|f\|_{H^1_r} = \|f\|_r + |f|_r,\ \text{где}\ \ |f|_r = \sup_{t>0} t^{-1}\omega_1(f,t)_r.$$

Определим [1] для каждого r ($0<r<1$) *пространство* Y_r^1 *как пополнение* C^1 *в метрике, порождаемой квазинормой пространства* H_r^1.

О существовании метрики, ассоциированной с квазинормой, см. [11], с. 80. Так, метрику на H_r^1 определяет функционал

$$\|\cdot\|_r^r + |\cdot|_r^r.$$

Отметим, что

$$|f|_r^r = \ \sup_{t>0}\Big(t^{-r}\int\limits_a^{b-t}\left|\Delta_t^1 f(x)\right|^r dx\Big).$$

2. Предварительные результаты

Результаты [1]—[2] при $k=1$ дают следующие утверждения.

Теорема [1]. На всех пространствах Y_r^1 определён линейный оператор $\Lambda : Y_r^1 \mapsto L_r$ и выполняется

$$1)\ \ \lim_{t\to 0}\ t^{-1}\omega_1(f,t)_r = \|\Lambda f\|_r,$$

$$2)\ \text{если}\ \ f \in W_1^1[J], J\subset [a;b],\ \text{тогда}\ \ \Lambda f\Big|_J = f^{\,\prime}.$$

Теорема [2]. Пусть $f \in L_r[a;b]\cap C^1[a;b-\epsilon]$ для любого $\epsilon>0$, $f^{\,\prime}$ неотрицательна на $[a,b)$ и не убывает, тогда если конечна величина $\|f^{\,\prime}\|_r$, то $f\in Y_r^1[a,b]$. При этом

$$\sup_{t>0} t^{-1}\omega_1(f,t)_r = \lim_{t\to 0}\ t^{-1}\omega_1(f,t)_r = \|f^{\,\prime}\|_r.$$

Замечание 2. Ясно, что утверждение остаётся справедливым, если условие на производную изменить на « $f^{\,\prime}$ неположительна на $[a,b)$ и не возрастает». В том случае, когда особенность функции находится на левом краю отрезка, условия на производную также нужно соответствующим образом изменить. Так, для функции f с условиями «$f^{'}$ неположительна на $(a;b]$ и не убывает» получаем те же свойства относительно выражения

$$t^{-r}\int\limits_{a+t}^{b}\big|f(x-t)-f(x)\big|^{r}dx,$$

что имеет функция из условия теоремы [2] относительно выражения

$$t^{-r}\int\limits_{a}^{b-t}\big|f(x+t)-f(x)\big|^{r}dx.$$

С другой стороны, замена $x-t=y$ в первом выражении делает их равносильными.
Замечание 3. Теорема указывает определённые границы для конкретных Y_r^1 и H_r^1, а также метод к разграничению внутри семейств таких пространств.

В статье [9] рассматривались некоторые аспекты взаимоотношения «локального» и «глобального» в структуре функций из Y_r^1.

Теорема [9]. Если функция f кусочно непрерывно дифференцируема, тогда $f \in Y_r^1$ для всех $0<r<1$.

Подразумевается, что существует набор точек $a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b$ такой, что при каждом фиксированном $i,\ 1\le i\le m$, функция может быть доопределена в точке x_i или точке x_{i-1} до условия $f\in C^1[x_{i-1};x_i]$.
Замечание 4. Утверждение теоремы легко распространяется на случай, когда функция является кусочно абсолютно непрерывной.

Следствие [9]. Если функция является кусочно постоянной, тогда она принадлежит ядру оператора Λ.

Предложение [9]. Пусть неотрицательная функция $h\in L_r[0;1]\cap C^1[\epsilon;1]$ для любого $\epsilon>0$, $h^{'}$ неположительна на $(0,1]$ и не убывает, а величина $\|h^{'}\|_r$ конечна. Тогда функция

$$f(x)=\begin{cases} h(-x), & \text{если } x\in[-1;0],\\ h(x), & \text{если } x\in(0;1]\end{cases}$$

принадлежит пространству $Y_r^1[-1;1]$.

Замечание 5. В формулировке предложения можно взять условия: «неположительная функция $h\in L_r[0;1]\cap C^1[\epsilon;1]$ для любого $\epsilon>0$, $h^{'}$ неотрицательна на $(0,1]$ и не возрастает, а величина $\|h^{'}\|_r$ конечна».

3. Обратимость локальной принадлежности

Приведённые результаты из статьи [9] обобщаются следующим утверждением.

Теорема . Если функция f кусочно принадлежит пространству Y_r^1, тогда она принадлежит этому пространству.

Конкретнее, если для некоторого набора точек $a=x_0<x_1<\dots<x_m=b$ выполняется $f\in Y_r^1[x_{i-1};x_i]$, $1\le i\le m$, то $f\in Y_r^1[a;b]$.
Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $m=2$. Пусть $f_l\in\ Y_r^1[-1;0]$, $f_h\in\ Y_r^1[0;1]$,

$$f(x)=\begin{cases} f_l(x), \text{ если } & -1\le x\le 0,\\ f_h(x), \text{ если } & 0<x\le 1.\end{cases}$$

Покажем, что $f\in Y_r^1[-1;1]$.

Учитывая теорему [9], достаточно показать, что для любого $\varepsilon>0$ найдётся состоящая из двух непрерывно дифференцируемых кусков функция g, удовлетворяющая неравенству

$$\|f-g\|^r_{L_r[-1;1]}+|f-g|^r_{L_r[-1;1]}<\varepsilon.$$

По условию для заданного ε найдутся функции $g_l\in C^1[-1;0]$ и $g_h\in C^1[0;1]$ такие, что

$$\|f_l-g_l\|^r_{L_r[-1;0]}+|f_l-g_l|^r_{L_r[-1;0]}<\frac{\varepsilon}{4}\ \text{ и }\ \|f_h-g_h\|^r_{L_r[0;1]}+|f_h-g_h|^r_{L_r[0;1]}<\frac{\varepsilon}{4}$$

На основе g_l и g_h определим функцию g:

$$g(x)=\begin{cases} g_l(x), \text{ если } & -1\le x\le 0,\\ g_h(x), \text{ если } & 0<x\le 1.\end{cases}$$

В уточнении нуждается только поведение слагаемого $|f-g|^r_{L_r[-1;1]}$. Заметим, что для фиксированного $0<t<1$ и функции $u\in\ L_r[-1;1]$ получаем

$$t^{-r}\int\limits_{-1}^{1-t}\left|\Delta_t^1u(x)\right|^rdx=\ t^{-r}\int\limits_{-1}^{-t}\left|\Delta_t^1u(x)\right|^rdx+\ t^{-r}\int\limits_{-t}^{0}\left|\Delta_t^1u(x)\right|^rdx+\ t^{-r}\int\limits_{0}^{1-t}\left|\Delta_t^1u(x)\right|^rdx.$$

Поэтому

$$\|f-g\|^r_{L_r[-1;1]}+|f-g|^r_{L_r[-1;1]}\le\|f_l-g_l\|^r_{L_r[-1;0]}+|f_l-g_l|^r_{L_r[-1;0]}+\|f_h-g_h\|^r_{L_r[0;1]}+|f_h-g_h|^r_{L_r[0;1]}+$$
$$+\sup_{0<t<1}\Bigl(t^{-r}\int\limits_{-t}^{0}\left|\Delta_t^1(f-g)(x)\right|^rdx\Bigr).$$

Сумма первых четырёх слагаемых в правой части меньше $\dfrac{\varepsilon}{2}$. Рассмотрим последнее. Поскольку

$$\left|\Delta_t^1(f-g)(x)\right|^r_{\Big|[-t;0]}=\left|(f_h-g_h)(x+t)-(f_l-g_l)(x)\right|^r_{\Big|[-t;0]}\le\Bigl(\left|(f_h-g_h)(x+t)\right|^r+$$
$$+\left|(f_l-g_l)(x)\right|^r\Bigr)_{\Big|[-t;0]}=\left|(f_h-g_h)(y)\right|^r_{\Big|[0;t]}+\left|(f_l-g_l)(x)\right|^r_{\Big|[-t;0]},\ \text{ где }\ y=x+t,$$

то задача сводится к оценке

$$\sup_{0<t<1}\Bigl(t^{-r}\int\limits_{0}^{t}\left|(f_h-g_h)(x)\right|^rdx\Bigr)\ \text{ и }\ \sup_{0<t<1}\Bigl(t^{-r}\int\limits_{-t}^{0}\left|(f_l-g_l)(x)\right|^rdx\Bigr).$$

Возьмём первое выражение. Обозначим $(f_h - g_h)(x) = \varphi(x)$; покажем, что величина $t^{-r} \int\limits_0^t \left|\varphi(x)\right|^r dx$ равномерно мала для всех $0 < t < 1$.

По построению

$$\int\limits_0^1 \left|\varphi(x)\right|^r dx < \beta \cdot \varepsilon, \tag{1}$$

$$\sup_{0<t<1} \Bigl(t^{-r} \int\limits_0^{1-t} \left|\varphi(x+t) - \varphi(x)\right|^r dx\Bigr) < \alpha \cdot \varepsilon, \tag{2}$$

где $\alpha + \beta = \dfrac{1}{4}$. Используя неравенство треугольника и условие (2), для $0 < t < 1$ и каждого $[c; d] \subset [0; 1-t]$ получаем

$$\Bigl|\int\limits_c^d \left|\varphi(x+t)\right|^r dx - \int\limits_c^d \left|\varphi(x)\right|^r dx\Bigr| \le \int\limits_c^d \left|\varphi(x+t) - \varphi(x)\right|^r dx \le \int\limits_0^{1-t} \left|\varphi(x+t) - \varphi(x)\right|^r dx < \alpha \cdot \varepsilon \cdot t^r.$$

Откуда

$$\Bigl|\int\limits_d^{d+t} \left|\varphi(x)\right|^r dx - \int\limits_c^{c+t} \left|\varphi(x)\right|^r dx\Bigr| = \Bigl|\int\limits_{c+t}^{d+t} \left|\varphi(x)\right|^r dx - \int\limits_c^d \left|\varphi(x)\right|^r dx\Bigr| =$$

$$= \Bigl|\int\limits_c^d \left|\varphi(x+t)\right|^r dx - \int\limits_c^d \left|\varphi(x)\right|^r dx\Bigr| < \alpha \cdot \varepsilon \cdot t^r.$$

Следовательно, $\int\limits_0^t \left|\varphi(x)\right|^r dx$ можно сопоставить с интегралом от той же функции по любому отрезку длины t из $[0; 1]$.

Пусть $t = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbf{N}$. Тогда отрезок $[0; 1]$ составлен ровно из n отрезков длины t. Значит, по условию (1) наименьший интеграл от $\left|\varphi(x)\right|^r$ по отрезку длины t не превосходит величины $\dfrac{1}{n} \cdot \beta \cdot \varepsilon$. Получается,что

$$\int\limits_0^t \left|\varphi(x)\right|^r dx < \frac{1}{n} \cdot \beta \cdot \varepsilon + \frac{1}{n^r} \cdot \alpha \cdot \varepsilon \le \frac{1}{n^r} \cdot \frac{\varepsilon}{4}$$

или

$$t^{-r} \int\limits_0^t \left|\varphi(x)\right|^r dx < \frac{\varepsilon}{4}.$$

В общем случае, например, выбрав для заданного $0 < t < 1$ число $n \in \mathbf{N}$ так, чтобы $\frac{1}{n+1} \le t < \frac{1}{n}$ (откуда, грубо, $n^r < t^{-r} < 2^r \cdot n^r$), получим для $t^{-r} \int\limits_0^t \bigl|\varphi(x)\bigr|^r dx$ аналогичную оценку.

Точно такое же рассуждение справедливо для выражения $t^{-r} \int\limits_{-t}^0 \bigl|(f_l - g_l)(x)\bigr|^r dx$.

Теорема доказана.

Распространение оператора дифференцирования неразрывно связано с соответствующим распространением оператора интегрирования (первообразной).

Определение [9]. *Функция f имеет первообразную в широком смысле, если для некоторого r найдётся функция $F \in Y_r^1$ такая, что $f = \Lambda F$.*

Доказанная теорема позволяет сформулировать своеобразное свойство аддитивности такой первообразной.

Следствие. Если каждая функция f_i имеет первообразную в широком смысле F_i на $[x_{i-1}; x_i],\ i = 1, ..., m$, где $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$, то функция F, составленная из $F_i : F(x) = F_i(x),\ x_{i-1} \le x < x_i$, — первообразная в широком смысле на $[a; b]$ функции f, составленной из f_i.

Доказательство. Если $r_1 < r_2$, то из неравенства Гёльдера с показателями $p = \frac{r_2}{r_1}$ и $q = \frac{r_2}{r_2 - r_1}$ следует, что $Y_{r_2}^1[I] \subset Y_{r_1}^1[I]$. Пусть $F_i \in Y_{r_i}^1[x_{i-1}; x_i]$. Из чисел $r_i,\ i = 1, ..., m$, выберем наименьшее. Обозначим это число r, тогда $F_i \in Y_r^1[x_{i-1}; x_i]$ и по теореме $F \in Y_r^1[a; b]$.

Список литературы

1. Морозов А. Н. Кусочно-полиномиальные приближения и дифференцируемость в пространствах L_p $(0 < p < 1)$ // Модел. и анализ информ. систем. 2005. Т. 12, № 1. С. 18—21.

2. Морозов А. Н. Операторы дифференцирования в пространствах L_p // Математика, кибернетика, информатика: Труды международной научной конференции, посвящённой памяти профессора А. Ю. Левина (25 — 26 июня 2008 г., Ярославль). Ярославль, 2008. 196 с.

3. Морозов А. Н. Описание пространств дифференцируемых функций при помощи локальных приближений // Модел. и анализ информ. систем. 2009. Т. 16, № 1. С. 7—15.

4. Брудный Ю. А. Пространства, определяемые с помощью локальных приближений // Тр. ММО. 1971. Т. 24. С. 69—132.

5. Стороженко Э. А., Кротов В. Г., Освальд П. Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах $L_p,\ 0 < p < 1$ // Матем. сб. 1975. Т. 98, № 3. С. 395—415.

6. 6. Ditzian Z., Hristov V. H. , Ivanov K. G. Moduli of Smoothness and K-Functionals in $L_p,\ 0 < p < 1$ // Constr. Approx. 1995. V. 11. C. 67—83.

7. Ditzian Z. Polynomial Approximation and $w_\varphi^r(f,t)$ Twenty Years Later // Surveys in Appr. Theory. 2007. V. 3. P. 106—151.

8. Руновский К. В. Приближение семействами линейных полиномиальных операторов: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 2010. http://mech.math.msu.su/ snark/files/vak/aro8.pdf

9. Морозов А. Н. Об операторах дифференцирования и интегрирования // Модел. и анализ информ. систем. 2011. Т. 18, № 3. С. 50—57.

10. Канторович Л.В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 750 с.

11. Берг Й., Лёфстрём Й. Интерполяционные пространства. Введение /пер. с англ. В. С. Крючкова и П. И. Лизоркина. М.: Мир, 1980. 264 с.

On Smoothness in $L_p,\ 0 < p < 1$

Morozov A. N.

Keywords: differentiation operator, quasinorm

We discuss properties of functions which are covered by spreading the differentiation operator from the space W_1^1.

Сведения об авторе:

Морозов Анатолий Николаевич,

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,

доцент кафедры дискретного анализа.