

УДК 517.929.8

Локальная динамика трех осцилляторов со связью вещательного типа

Толбей А. О.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: bekva@yandex.ru

получена 12 декабря 2011

Ключевые слова: связь вещательного типа, метод нормальных форм, бифуркации

Изучается динамика взаимодействия трех нейроподобных осцилляторов. Рассматривается один из возможных вариантов связи — связь вещательного типа, возникающая при моделировании нейросетей.

1. Постановка задачи

В настоящее время актуальной задачей является проблема предсказания сложного коллективного поведения ассоциаций связанных осцилляторов различной природы. Нейронные сети дают один из наиболее важных для приложений пример такого рода. Одной из принципиальных характеристик сети, определяющих ее поведение, является характер и структура связей между элементами. Для выявления особенностей динамики сети, определяемых структурой связей ее элементов, представляет интерес изучение простейших ассоциаций близких осцилляторов. В статьях [1]–[3] построен полный набор сетей из трех элементов с различной структурой связи между ними. Рассмотрим связь вещательного типа как один из вариантов такой структуры (см. 1). Применение аналитических асимптотических методов в таких

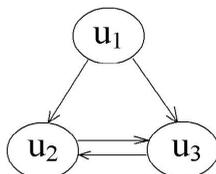


Рис. 1. Три взаимодействующих нейрона со связью вещательного типа

задачах обычно ограничено либо локальными методами типа метода нормальных форм (например, в окрестности точки бифуркации Андронова–Хопфа), либо методом большого параметра для сингулярно возмущенного случая. В промежуточных случаях естественно использовать численные методы. Применение численных алгоритмов имеет смысл согласовывать с результатами предварительного асимптотического анализа. Учитывая, что системы, описывающие отдельные импульсные нейроны, являются колебательными, для локального анализа естественно предположить, что каждый осциллятор системы находится вблизи бифуркации Андронова–Хопфа, и изучить задачу об их взаимодействии.

В качестве примера отметим введенное в [4, 5] дифференциальное уравнение с запаздыванием

$$\dot{u} = \lambda[-1 - f_{\text{Na}}(u) + f_{\text{K}}(u(t-1))]u, \quad (1)$$

описывающее электрическую активность нервных клеток, и предложенное в [6, 7] его обобщение на ситуацию двух запаздываний

$$\dot{u} = \lambda[-1 - f_{\text{Na}}(u(t-h)) + f_{\text{K}}(u(t-1))]u. \quad (2)$$

Здесь $u(t)$ — мембранный потенциал нейрона, достаточно гладкие функции $f_{\text{Na}}(u)$ и $f_{\text{K}}(u)$ характеризуют ионные каналы для натрия и калия соответственно. Локальная динамика уравнений (1) и (2) в окрестности точки колебательной потери устойчивости состояния равновесия изучалась в [6], а в статье [8] выполнен соответствующий анализ для системы из двух диффузионно связанных осцилляторов вида (1). Представляет интерес локальный анализ задачи о взаимодействии вещательного типа в системе трех связанных осцилляторов. В следующем разделе статьи нами рассматривается общий случай такого взаимодействия.

2. Построение нормальной формы

Рассмотрим общую постановку задачи о взаимодействии трех осцилляторов в случае слабой связи вещательного типа

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = (A_0 + \varepsilon A_1)u_1 + F(u_1), \\ \dot{u}_2 = (A_0 + \varepsilon A_1)u_2 + F(u_2) + \varepsilon D(u_1 + u_3 - 2u_2), \\ \dot{u}_3 = (A_0 + \varepsilon A_1)u_3 + F(u_3) + \varepsilon D(u_1 + u_2 - 2u_3). \end{cases} \quad (3)$$

Здесь $u_1(t), u_2(t), u_3(t) \in \mathbb{R}^n$, среди собственных чисел $n \times n$ матрицы A_0 имеется единственная чисто мнимая пара $\pm i\omega$, а все остальные собственные числа лежат в левой комплексной полуплоскости, $F(u)$ — достаточно гладкая нелинейная вектор-функция векторного аргумента, имеющая в нуле порядок выше, чем первый, $n \times n$ матрица D характеризует связь между осцилляторами, $0 < \varepsilon \ll 1$ — малый параметр.

Для изучения динамики системы (3) воспользуемся стандартной заменой метода нормальных форм [11]

$$u(t, s) = \sqrt{\varepsilon}u^{(0)}(t, s) + \varepsilon u^{(1)}(t, s) + \varepsilon^{3/2}u^{(2)}(t, s) + \dots, \quad (4)$$

где вектор $u(t, s) \in \mathbb{R}^{3n}$ составлен из идущих друг за другом векторов $u_1(t, s)$, $u_2(t, s)$ и $u_3(t, s)$,

$$u^{(0)}(t, s) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(i\omega t) z_1(s) + \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \exp(i\omega t) z_2(s) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \exp(i\omega t) z_3(s) + \text{к.с.},$$

a – собственный вектор матрицы A_0 , соответствующий собственному числу $i\omega$, $z_j(s)$ – медленно меняющиеся комплексные амплитуды ($j = 1, 2, 3$), $s = \varepsilon t$ – медленное время, $u^{(k)}(t, s)$ – подлежащие определению $2\pi/\omega$ -периодические по t функции ($k = 1, 2, \dots$), под к.с. подразумевается выражение, комплексно сопряженное данному в той же скобке. Будем считать $F(u) = F_2(u, u) + F_3(u, u, u) + O(|u|^4)$.

Поочередно приравняем коэффициенты при одинаковых степенях $\sqrt{\varepsilon}$. На первом шаге алгоритма получаем, очевидно, верное тождество. На втором шаге при ε возникает система уравнений на $u^{(1)}(t, s)$, состоящая из трех не связанных друг с другом компонент

$$\dot{u}_j^{(1)}(t, s) = A_0 u_j^{(1)} + \exp(2i\omega t) z_j^2 F_2(a, a) + |z_j^2| (F_2(a, \bar{a}) + F_2(\bar{a}, a)) + \exp(-2i\omega t) \bar{z}_j^2 F_2(\bar{a}, \bar{a}),$$

решение которой имеет вид

$$u_j^{(1)}(t, s) = \exp(2i\omega t) z_j^2 w_1 + |z_j^2| w_0 + \exp(-2i\omega t) \bar{z}_j^2 \bar{w}_1, \quad j = 1, 2, 3.$$

Векторы w_0, w_1 определяются из соотношений

$$w_0 = -A_0^{-1} (F_2(a, \bar{a}) + F_2(\bar{a}, a)), \quad w_1 = (2i\omega E - A_0)^{-1} F_2(a, a).$$

Далее, при $\varepsilon^{3/2}$ получаем систему

$$\begin{aligned} \dot{u}_j^{(2)}(t, s) = A_0 u_j^{(2)} + & (\exp(i\omega t) (z_j A_1 a - z_j' a + z_j |z_j|^2 q_1 + \alpha_j) + \\ & + \exp(3i\omega t) z_j^3 q_3 + \text{к.с.}), \quad j = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

где $q_1 = (F_2(a, w_0) + F_2(\bar{a}, w_1) + F_2(w_0, a) + F_2(w_1, \bar{a}) + F_3(a, a, \bar{a}) + F_3(a, \bar{a}, a) + F_3(\bar{a}, a, a))$, $q_3 = (F_2(a, w_1) + F_2(w_1, a) + F_3(a, a, a))$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = (z_1 + z_3 - 2z_2)Da$, $\alpha_3 = (z_1 + z_3 - 2z_3)Da$. Из условий разрешимости данной задачи в классе $2\pi/\omega$ -периодических по t функций получим нормальную форму следующего вида:

$$\begin{aligned} z_1' &= (\varphi_0 + i\psi_0) z_1 + (d_0 + ic_0) z_1 |z_1|^2, \\ z_2' &= (\varphi_0 + i\psi_0) z_2 + (d_0 + ic_0) z_2 |z_2|^2 + \varkappa \exp(i\delta) (z_1 + z_3 - 2z_2), \\ z_3' &= (\varphi_0 + i\psi_0) z_3 + (d_0 + ic_0) z_3 |z_3|^2 + \varkappa \exp(i\delta) (z_1 + z_2 - 2z_3). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь штрихом обозначена производная функций $z_j(s)$ по s и

$$\varphi_0 + i\psi_0 = (A_1 a, b), \quad d_0 + ic_0 = (q_1, b), \quad \varkappa \exp(i\delta) = (Da, b), \quad (6)$$

где b – собственный вектор сопряженной матрицы A_0^T , соответствующий собственному числу $-i\omega$ и удовлетворяющий нормирующему соотношению $(a, b) = 1$. Систему (3) и ее нормальную форму (5) связывает следующая теорема (см. [11]).

Теорема о соответствии. *Предположим, что система (5) имеет некоторый экспоненциально орбитально устойчивый или дихотомичный цикл (тор). Тогда найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ исходная система (3) имеет цикл (тор) той же размерности с теми же свойствами устойчивости, асимптотика которого задается формулами (4).*

Будем далее предполагать, что

$$\varphi_0 > 0, \quad d_0 < 0. \quad (7)$$

Неравенства (7) гарантируют наличие у каждого отдельного осциллятора системы (3) бифуркации Андронова–Хопфа. В этой ситуации удобно выполнить в (5) полярную замену $z_j(s) = \sqrt{-\frac{\varphi_0}{d_0}} \rho_j(s) \exp(i\varphi_j(s))$, $\rho_j(s) > 0$, $j = 1, 2, 3$ и замену времени $\tau = \varphi_0 \cdot s$. В результате получим шестимерную систему вида

$$\begin{aligned} \rho_1' &= \rho_1 - \rho_1^3, \\ \varphi_1' &= \frac{\psi_0}{\varphi_0} - \frac{c_0}{d_0} \rho_1^2, \\ \rho_2' &= \rho_2 - \rho_2^3 + \frac{\varkappa}{\varphi_0} [\rho_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1 - \delta) + \rho_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_2 + \delta) - 2\rho_2 \cos \delta], \\ \varphi_2' &= \frac{\psi_0}{\varphi_0} - \frac{c_0}{d_0} \rho_2^2 + \frac{\varkappa}{\varphi_0} \left[-\frac{\rho_1}{\rho_2} \sin(\varphi_2 - \varphi_1 - \delta) + \frac{\rho_3}{\rho_2} \sin(\varphi_3 - \varphi_2 + \delta) - 2 \sin \delta \right], \\ \rho_3' &= \rho_3 - \rho_3^3 + \frac{\varkappa}{\varphi_0} [\rho_1 \cos(\varphi_3 - \varphi_1 - \delta) + \rho_2 \cos(\varphi_3 - \varphi_2 - \delta) - 2\rho_3 \cos \delta], \\ \varphi_3' &= \frac{\psi_0}{\varphi_0} - \frac{c_0}{d_0} \rho_3^2 + \frac{\varkappa}{\varphi_0} \left[-\frac{\rho_1}{\rho_3} \sin(\varphi_3 - \varphi_1 - \delta) - \frac{\rho_2}{\rho_3} \sin(\varphi_3 - \varphi_2 - \delta) - 2 \sin \delta \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

От данной системы очевидным образом отщепляются первые два уравнения, причем, учитывая, что $\rho_1 \rightarrow 1$, естественно далее считать

$$\rho_1 = 1, \quad \varphi_1 = \left[\frac{\psi_0}{\varphi_0} - \frac{c_0}{d_0} \right] \tau + const.$$

Учитывая это и вводя для разностей фаз обозначения $\beta_1 = \varphi_2 - \varphi_1$, $\beta_2 = \varphi_3 - \varphi_1$, вместо системы (8) имеем

$$\begin{aligned} \rho_2' &= \rho_2 - \rho_2^3 + \frac{\varkappa}{\varphi_0} [\cos(\beta_1 - \delta) + \rho_3 \cos(\beta_2 - \beta_1 + \delta) - 2\rho_2 \cos \delta], \\ \rho_3' &= \rho_3 - \rho_3^3 + \frac{\varkappa}{\varphi_0} [\cos(\beta_2 - \delta) + \rho_2 \cos(\beta_2 - \beta_1 - \delta) - 2\rho_3 \cos \delta], \\ \beta_1' &= \frac{c_0}{d_0} (1 - \rho_2^2) + \frac{\varkappa}{\varphi_0} \left[-\frac{1}{\rho_2} \sin(\beta_1 - \delta) + \frac{\rho_3}{\rho_2} \sin(\beta_2 - \beta_1 + \delta) - 2 \sin \delta \right], \\ \beta_2' &= \frac{c_0}{d_0} (1 - \rho_3^2) + \frac{\varkappa}{\varphi_0} \left[-\frac{1}{\rho_3} \sin(\beta_2 - \delta) - \frac{\rho_2}{\rho_3} \sin(\beta_2 - \beta_1 - \delta) - 2 \sin \delta \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Система (3), очевидным образом, имеет $2n$ -мерную инвариантную плоскость $u_2 = u_3$. На этой плоскости (3) вырождается в систему, моделирующую однонаправленное воздействие одного осциллятора (u_1) на другой (u_2 или u_3). В нормальной форме (9) этому многообразию соответствует плоскость, определяемая равенствами

$$\rho_2 = \rho_3, \quad \beta_1 = \beta_2. \quad (10)$$

На плоскости (10) система (9) переходит в

$$\begin{aligned}\rho' &= (1 - \varkappa \cos \delta - \rho^2)\rho + \varkappa \cos(\beta - \delta), \\ \beta' &= -\varkappa \sin \delta + b_0(\rho^2 - 1) - \frac{\varkappa}{\rho} \sin(\beta - \delta),\end{aligned}\quad (11)$$

где $\beta = \beta_1 = \beta_2$ и $\rho = \rho_2 = \rho_3$. Следующая часть работы посвящена нахождению устойчивых режимов системы (11) и выяснению условий их устойчивости для системы (9).

3. Динамика редуцированной системы (11)

Для нахождения состояний равновесия (11) имеем алгебраическую систему

$$\begin{aligned}(1 - \varkappa \cos \delta - \rho^2)\rho + \varkappa \cos(\beta - \delta) &= 0, \\ -\varkappa \sin \delta + b_0(\rho^2 - 1) - \frac{\varkappa}{\rho} \sin(\beta - \delta) &= 0.\end{aligned}\quad (12)$$

Исключая в (12) переменную β , приходим к биквадратному относительно ρ уравнению, решая которое, находим два различных значения $\rho > 0$

$$\rho_0 = \sqrt{\frac{1 + b_0^2 - 2\varkappa \cos \delta + 2b_0\varkappa \sin \delta \pm \sqrt{(1 + b_0^2 - 2\varkappa \cos \delta + 2b_0\varkappa \sin \delta)^2 - 4(1 + b_0^2)\varkappa^2}}{2(1 + b_0^2)}}.$$

Величина β вычисляется по формуле $\beta_0 = \delta \pm \arccos \left[\rho \cdot \frac{-1 + \varkappa \cos \delta + \rho^2}{\varkappa} \right]$. Полученные формулы дают четыре возможных выражения для решений системы (12), из которых, однако, реализуются не более двух.

Устойчивость полученных состояний равновесия системы (11) определяется матрицей линейной части

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 - \varkappa \cos \delta - 3\rho_0^2 & -\varkappa \sin(\beta_0 - \delta) \\ 2\rho_0 b_0 + \frac{\varkappa}{\rho_0^2} \sin(\beta_0 - \delta) & -\frac{\varkappa}{\rho_0} \cos(\beta_0 - \delta) \end{pmatrix}.\quad (13)$$

Для отыскания колебательных режимов системы (11), а значит, и исходной системы (3) следует решить задачу о колебательной потере устойчивости состояний равновесия (ρ_0, β_0) . Это позволяет выяснить условия возникновения циклов нормальной формы (11) и соответственно торов системы (3). Для выхода собственных чисел матрицы B_0 на мнимую ось необходимо, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$\text{sp} B_0 \equiv 1 - 2\rho_0^2 - \varkappa \cos \delta = 0, \quad (14)$$

$$\det B_0 \equiv 1 + b_0^2 + \varkappa^2 + \rho_0^2(1 + b_0^2)(3\rho_0^2 - 4) + 2\varkappa(-1 + 2\rho_0^2)(\cos \delta - b_0 \sin \delta) > 0. \quad (15)$$

Система (11) имеет три параметра \varkappa , δ , b_0 , по которым можно определить компоненты состояния равновесия (ρ_0, β_0) . Условие (14) определяет связь между этими параметрами. Будем далее считать, что параметр b_0 фиксирован (для численных расчетов бралось значение $b_0 = 10$), и построим зависимость величины \varkappa

от δ , вытекающую из условия (14). На рис. 2 приведены графики зависимостей $\kappa(\delta)$, $\rho(\delta)$, $\beta(\delta)$, $\det A(\delta)$ при $\delta \in (0, \pi)$. В области $\delta \in (-\pi, 0)$ графики аналогичны.

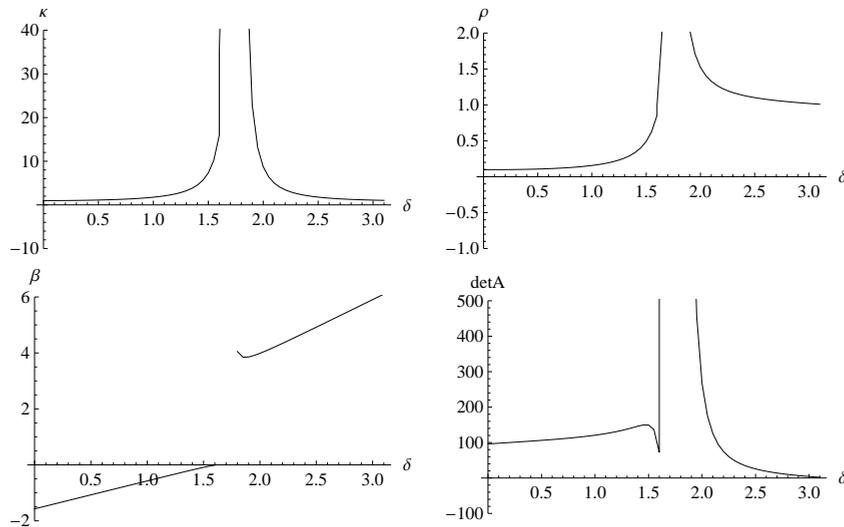


Рис. 2. Графики зависимостей величин κ , ρ , β , $\det A$ от параметра $\delta \in (0, \pi)$

Выясним теперь характер потери устойчивости исследуемым состоянием равновесия. Для этого необходимо выполнить вторичную нормализацию системы (11). Амплитуда ответвляющегося от состояния равновесия цикла определяется по формуле $\sqrt{\varphi_0/d_0}$, где φ_0 — скорость перехода корней в правую комплексную полуплоскость, а d_0 — вещественная часть первой ляпуновской величины. Условием бифуркации Андронова–Хопфа являются неравенства $\varphi_0 > 0$, $d_0 < 0$, при которых состояние равновесия порождает в результате потери устойчивости орбитально устойчивый цикл. Используя приведенные в [11] формулы для определения коэффициентов нормальной формы (вычисляются аналогично первым двум выражениям из (6)), находим зависимости $\varphi_0(\delta)$, $d_0(\delta)$. На рис. 3 приведены соответствующие графики. Вычисления, выполненные с помощью пакета символьных вычислений Mathematica, позволили определить следующие интервалы изменения δ , в которых выполнены указанные неравенства: $\delta \in (-1.66; -1.57)$, $(1.54, 1.62)$. В свою очередь, непосредственный численный анализ нормальной формы (9) показал, что для некоторых значений δ из полученных выше интервалов в системе (9) также происходит бифуркация Андронова–Хопфа. В связи с этим возникает задача поиска значений параметров системы, состоящих из взаимодействующих осцилляторов вида (1) или (2), для которых реализуется полученный в работе сценарий возникновения двухчастотных колебательных режимов.

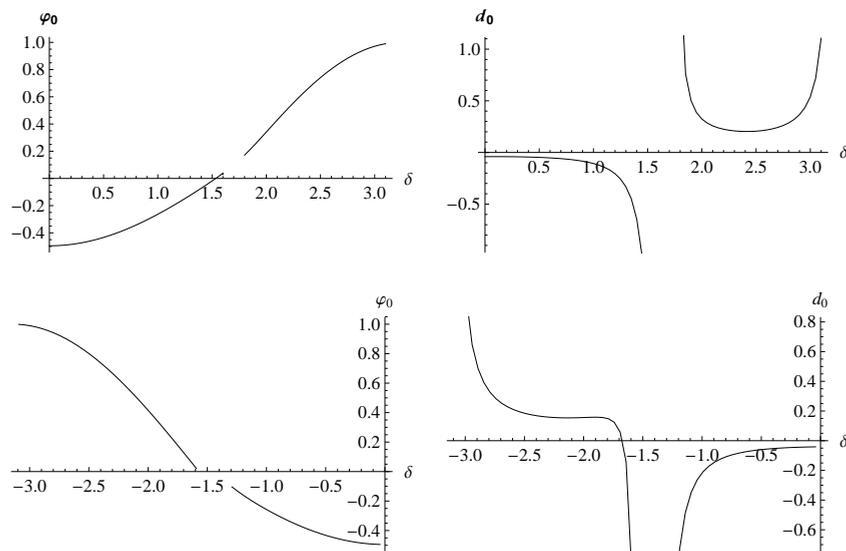


Рис. 3. Графики зависимостей величин φ_0 , d_0 от параметра δ

Список литературы

1. Uri Alon. Network motifs: theory and experimental approaches // Nature Genetics. 2007. V. 8. P. 450–461.
2. Milo R., Shen-Orr S., Itzkovitz S. Network motifs: Simple Building Blocks of Complex Networks // Science. 2002. V. 298. P. 824–827.
3. Yechiam Yemini. The Topology of Biological Networks // Computer Science Department. Columbia University. 2004.
4. Майоров В. В., Мышкин И. Ю. Математическое моделирование нейронов сети на основе уравнений с запаздыванием // Математическое моделирование. 1990. Т. 2, № 11. С. 64–76.
5. Кащенко С. А., Майоров В. В. Об одном дифференциально-разностном уравнении, моделирующем импульсную активность нейрона // Математическое моделирование. 1993. Т. 5, № 12. С. 13–25.
6. Глызин С. Д., Обвянникова Е. О. Двухчастотные колебания обобщенного уравнения импульсного нейрона с двумя запаздываниями // Моделирование и анализ информационных систем. 2011. Т. 18, № 1. С. 86–105.
7. Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Дискретные автоволны в нейронных системах // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 52, № 5. С. 840–858.

8. Глызин С.Д., Киселева Е.О. Учет запаздывания в цепочке связи между осцилляторами // Моделирование и анализ информационных систем. 2010. Т. 17, № 2. С. 140–150.
9. Глызин С.Д. Релаксационные колебания электрически связанных нейроподобных осцилляторов с запаздыванием // Моделирование и анализ информационных систем. 2010. Т. 17, № 2. С. 28–47.
10. Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. О явлениях хаоса в кольце из трех однонаправленно связанных генераторов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2006. Т. 46, № 10. С. 1809–1821.
11. Глызин С.Д., Колесов А.Ю. Локальные методы анализа динамических систем: учебное пособие; Яросл. гос. ун-т. Ярославль: ЯрГУ, 2006. 92 с.

Local Dynamics of Three Coupled Oscillators with a Feedback Loop

Tolbey A. O.

Keywords: feedback loop, normal form method, bifurcations

The dynamics of interaction of three neurons is studied. One of possible options of the link is a feedback loop arising at modeling neuronets is considered.

Сведения об авторе:

Толбей Анна Олеговна,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель кафедры компьютерных сетей