Моделирование и анализ информационных систем. Т. 23, №2 (2016), с. 164–172
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 23, No 2 (2016), pp. 164–172

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-2-164-172

УДК 512.71

О группе Брауэра арифметической модели многообразия над глобальным полем положительной характеристики

Прохорова Т. В.

получена 13 февраля 2016

Аннотация. Пусть V – гладкое проективное многообразие над глобальным полем $k = \kappa(C)$ рациональных функций на гладкой проективной кривой C над конечным полем $\mathbb{F}_q$ характеристики p. Предположим, что существует проективный плоский $\mathbb{F}_q$-морфизм $\pi : X \to C$, где X – гладкое проективное многообразие, общий схемный слой морфизма π изоморфен многообразию V (мы называем морфизм $\pi : X \to C$ *арифметической моделью многообразия* V).

М. Артин высказал гипотезу о конечности группы Брауэра $\mathrm{Br}(X)$, классифицирующей пучки алгебр Адзумаи на X по модулю подобия. Хорошо известно, что группа $\mathrm{Br}(X)$ содержится в когомологической группе Брауэра

$$\mathrm{Br}'(X) = H^2_{et}(X, \mathbb{G}_m).$$

По определению, non $-p$ – компонента когомологической группы Брауэра $\mathrm{Br}'(X)$ совпадает с прямой суммой l-примарных компонент группы $\mathrm{Br}'(X)$ по всем простым числам l, отличным от характеристики p.

Известно, что структура k-многообразия на V задает канонический морфизм групп $\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}'(V)$.

В работе доказана конечность non $-p$ – компоненты когомологической группы Брауэра $\mathrm{Br}'(X)$ многообразия X при условии, что факторгруппа

$$[\mathrm{Br}'(V)/\operatorname{Im}[\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}'(V)]](\text{non} -p)$$

конечная.

В частности, если V – поверхность типа К 3 (другими словами, V – гладкая проективная односвязная поверхность над полем k и канонический класс поверхности V тривиален: $\Omega^2_V = \mathcal{O}_V$), причем характеристика основного поля $p > 2$, то по теореме Скоробогатова — Зархина факторгруппа $[\mathrm{Br}'(V)/\operatorname{Im}[\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}'(V)]](\text{non} -p)$ конечна, так что в этом случае группы $\mathrm{Br}'(X)(\text{non} -p)$ и $\mathrm{Br}(X)(\text{non} -p)$ конечные.

Ключевые слова: группа Брауэра, арифметическая модель, К 3–поверхность

Для цитирования: Прохорова Т. В., "О группе Брауэра арифметической модели многообразия над глобальным полем положительной характеристики", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:2 (2016), 164–172.

Об авторах: Прохорова Татьяна Вячеславовна, orcid.org/0000-0002-6883-2087, канд. физ.-мат. наук, Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых, ул. Горького, 87, г. Владимир, 600000, Россия,
e-mail: tvprokhorova@mail.ru

Введение

Пусть V – гладкое проективное многообразие над глобальным полем $k = \kappa(C)$ рациональных функций на гладкой проективной кривой C над конечным полем $\mathbb{F}_q$ характеристики p. Предположим, что существует проективный плоский $\mathbb{F}_q$-морфизм $\pi : X \to C$, где X – гладкое проективное многообразие, общий схемный слой морфизма π изоморфен многообразию V (мы называем морфизм $\pi : X \to C$ *арифметической моделью многообразия* V).

М. Артин высказал гипотезу о конечности группы Брауэра $\mathrm{Br}(X)$, классифицирующей пучки алгебр Адзумаи на X по модулю подобия. Известно, что группа $\mathrm{Br}(X)$ содержится в когомологической группе Брауэра

$$\mathrm{Br}'(X) = H^2_{et}(X, \mathbb{G}_m).$$

По определению, non $-p$ – компонента когомологической группы Брауэра $\mathrm{Br}'(X)$ совпадает с прямой суммой l-примарных компонент группы $\mathrm{Br}'(X)$ по всем простым числам l, отличным от характеристики p.

Известно, что структура k-многообразия на V задает канонический морфизм групп $\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}'(V)$.

В работе доказана конечность non $-p$ – компоненты когомологической группы Брауэра $\mathrm{Br}'(X)$ многообразия X при условии, что факторгруппа

$$[\mathrm{Br}'(V)/\operatorname{Im}[\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}'(V)]](\mathrm{non}\,-p)$$

конечная.

В частности, если V – поверхность типа К 3 (другими словами, V – гладкая проективная односвязная поверхность над полем k и канонический класс поверхности V тривиален: $\Omega^2_V = \mathcal{O}_V$), причем характеристика основного поля $p > 2$, то по теореме Скоробогатова — Зархина [1, теорема 1.3] факторгруппа $[\mathrm{Br}'(V)/\operatorname{Im}[\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}'(V)]](\mathrm{non}\,-p)$ конечна, так что в этом случае группы $\mathrm{Br}'(X)(\mathrm{non}\,-p)$ и $\mathrm{Br}(X)(\mathrm{non}\,-p)$ конечные.

Аналогичный результат доказан С. Г. Танкеевым для арифметической модели К 3–поверхности над числовым полем [2].

Автор благодарит С. Г. Танкеева за ценные советы.

Основные результаты

Теорема 1. *Пусть $\pi : X \to C$ – сюръективный морфизм гладких проективных многообразий над конечным полем $\mathbb{F}_q$ характеристики p, C – кривая, общий схемный слой морфизма π является гладким многообразием V над полем $k = \kappa(C)$. Если группа*

$$[\mathrm{Br}'(V)/\operatorname{Im}[\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}'(V)]](\mathrm{non}\,-p)$$

конечная, то группа $\mathrm{Br}'(X)(\mathrm{non}\,-p)$ конечная.

Доказательство. Будем обозначать через $\kappa(y)$ поле вычетов точки $y \in X$.

Пусть $i_y : \operatorname{Spec}\kappa(y) \to X$ – каноническое вложение $y \in X$ и

$$\mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}} = \bigoplus_{\substack{y\in X\setminus V\\ \mathrm{codim}_X(y)=1}} i_{y*}\mathbb{Z}$$

– пучок вертикальных дивизоров Картье. Существует точная последовательность пучков (в этальной топологии схемы X)

$$0 \to \mathbb{G}_{m,X} \to h_*\mathbb{G}_{m,V} \to \mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}} \to 0, \tag{1}$$

где $h : V \hookrightarrow X$ – вложение общего схемного слоя морфизма π [3, последняя формула на с. 637].

Мы имеем

$$\mathrm{Div}_X = \bigoplus_{\substack{y\in X\\ \mathrm{codim}_X(y)=1}} i_{y*}\mathbb{Z} = \left(\bigoplus_{\substack{y\in V\\ \mathrm{codim}_X(y)=1}} i_{y*}\mathbb{Z}\right)\bigoplus \mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}}.$$

Хорошо известно, что $H^1(X, \mathrm{Div}_X) = 0$ [4, гл. 3, § 2, пример 2.22]. Следовательно, $H^1(X, \mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}}) = 0$. Значит, (1) даёт точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 &\to H^2(X, \mathbb{G}_m) \to H^2(X, h_*\mathbb{G}_{m,V}) \to H^2(X, \mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}}) \\ &\to H^3(X, \mathbb{G}_m) \to H^3(X, h_*\mathbb{G}_{m,V}) \to H^3(X, \mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}}). \end{aligned} \tag{2}$$

Спектральная последовательность Лере

$$E_2^{p,q} = H^p(X, R^q h_*\mathbb{G}_{m,V}) \Rightarrow H^{p+q}(V, \mathbb{G}_{m,V})$$

даёт точную последовательность

$$0 \to E_2^{1,0} \to E^1 \to E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2^{0,1}} E_2^{2,0} \to E_1^2 \to E_2^{1,1} \to E_2^{3,0},$$

где $E_1^2 = \mathrm{Ker}[E^2 \to E_2^{0,2}]$ [4, приложение B]. Следовательно, мы имеем точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 &\to H^1(X, h_*\mathbb{G}_{m,V}) \to H^1(V, \mathbb{G}_{m,V}) \\ &\to H^0(X, R^1h_*\mathbb{G}_{m,V}) \xrightarrow{d_2^{0,1}} H^2(X, h_*\mathbb{G}_{m,V}) \\ &\to \mathrm{Ker}[H^2(V, \mathbb{G}_{m,V}) \to H^0(X, R^2h_*\mathbb{G}_{m,V})] \\ &\to H^1(X, R^1h_*\mathbb{G}_{m,V}). \end{aligned} \tag{3}$$

С другой стороны, $R^1h_*\mathbb{G}_{m,V} = 0$ в силу аргументов п. (b) доказательства леммы 4.4.1 в [3]. Поэтому (3) даёт изоморфизм

$$H^2(X, h_*\mathbb{G}_{m,V}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}'(V) \to H^0(X, R^2h_*\mathbb{G}_{m,V})]$$

и (2) даёт точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Br}'(X) \to \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}'(V) \to H^0(X, R^2h_*\mathbb{G}_{m,V})] \to H^2(X, \mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}}). \tag{4}$$

В дальнейшем мы обозначаем через η общую схемную точку кривой C и через $\kappa(y)^{\mathrm{s}}$ сепарабельное замыкание поля вычетов $\kappa(y)$ в алгебраическом замыкании $\overline{\kappa(y)}$. Существует каноническое отображение $\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}'(V)$, индуцированное структурным морфизмом $V \to \operatorname{Spec} k$. С другой стороны, существует каноническая точная последовательность

$$0 \to \mathrm{Br}(C) \to \mathrm{Br}(k) \to \bigoplus_{\substack{v\in C\\ v\neq\eta}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(\kappa(v)^{\mathrm{s}}/\kappa(v)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$
$$\to H^3(C, \mathbb{G}_m) \to H^3(\mathrm{Spec}(k), \mathbb{G}_m)$$

[4, гл. III, § 2, пример 2.22(a)], где $\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}$ обозначает группу непрерывных гомоморфизмов. В нашем случае C – полная гладкая алгебраическая кривая над конечным полем F_q, поэтому $\mathrm{Br}(C) = 0$ и $H^3(C, \mathbb{G}_m) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ [4, гл. III, § 2, пример 2.22(g)]. Мы приходим к хорошо известной точной последовательности глобальной теории полей классов

$$0 \to \mathrm{Br}(k) \to \bigoplus_{\substack{v\in C\\ v\neq\eta}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(\kappa(v)^{\mathrm{s}}/\kappa(v)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \tag{5}$$

Эта точная последовательность имеет вид

$$0 \to \mathrm{Br}(k) \to \bigoplus_{\substack{v\in C\\ v\neq\eta}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

[4, гл. III, § 2, пример 2.22(e)].

Для замкнутой точки $v \in C$ рассмотрим каноническое вложение $i_v : \operatorname{Spec} \kappa(v) \hookrightarrow C$. Спектральная последовательность Лере

$$E_2^{p,q} = H^p(C, R^q i_{v*}\mathbb{Z}) \to H^{p+q}(\operatorname{Spec} \kappa(v), \mathbb{Z})$$

дает точную последовательность

$$0 \to E_2^{1,0} \to E^1 \to E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2^{0,1}} E_2^{2,0} \to E_1^2 \to E_2^{1,1},$$

где $E_1^2 = \mathrm{Ker}[E^2 \to E_2^{0,2}]$ [4, приложение B]; следовательно, мы имеем точную последовательность

$$\begin{aligned}
&0 \to H^1(C, i_{v*}\mathbb{Z}) \to H^1(\operatorname{Spec} \kappa(v), \mathbb{Z})\\
&\to H^0(C, R^1 i_{v*}\mathbb{Z}) \xrightarrow{d_2^{0,1}} H^2(C, i_{v*}\mathbb{Z})\\
&\to \mathrm{Ker}[H^2(\operatorname{Spec} \kappa(v), \mathbb{Z}) \to H^0(C, R^2 i_{v*}\mathbb{Z})]\\
&\to H^1(C, R^1 i_{v*}\mathbb{Z}).
\end{aligned} \tag{6}$$

Хорошо известно, что $R^q i_{v*}\mathbb{Z} = 0$ для всех $q > 0$ [4, гл. III, § 2, пример 2.22(a)]; поэтому (6) даёт изоморфизм

$$H^2(C, i_{v*}\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^2(\operatorname{Spec} \kappa(v), \mathbb{Z}).$$

С другой стороны,

$$H^2(\mathrm{Spec}\,\kappa(v), \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(\kappa(v)^{\mathrm{s}}/\kappa(v)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

[4, гл. III, § 2, пример 2.22]. Следовательно,

$$\begin{aligned} H^2(C, \mathrm{Div}_C) &\overset{\mathrm{def}}{=} H^2\left(C, \bigoplus_{\substack{v\in C\\ v\neq\eta}} i_{v*}\mathbb{Z}\right) \\ &= \bigoplus_{\substack{v\in C\\ v\neq\eta}} H^2(C, i_{v*}\mathbb{Z}) \\ &= \bigoplus_{\substack{v\in C\\ v\neq\eta}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(\kappa(v)^{\mathrm{s}}/\kappa(v)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

[4, гл. III, § 2, пример 2.22(a)]. Поэтому (5) даёт точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Br}(k) \to H^2(C, \mathrm{Div}_C). \tag{7}$$

С другой стороны, можно определить канонический морфизм

$$\pi^* : H^*(C, \mathrm{Div}_C) \to H^*(X, \pi^*(\mathrm{Div}_C)),$$

используя резольвенту Годемана [4, гл. III, § 1, замечание 1.20, (c)]

$$0 \to \mathrm{Div}_C \to \mathcal{C}^0(C, \mathrm{Div}_C) \to \mathcal{C}^1(C, \mathrm{Div}_C) \to \dots,$$

точность функтора π^* на категории пучков для этальной топологии [4, гл. II, § 2, предложение 2.6; начало § 3] и общую конструкцию отображения

$$\pi^* : H^*(C, \mathrm{Div}_C) \to H^*(X, \pi^*(\mathrm{Div}_C))$$

по Годеману [5, гл. II, § 4.16] (для построения этого морфизма не обязательно прибегать к резольвенте Годемана; для любого пучка $\mathcal{F}$ имеется канонический морфизм $\mathcal{F} \to R\pi_*\pi^*(\mathcal{F})$ в производной категории этальных пучков на C, который даёт отображение $H^*(C, \mathcal{F}) \to H^*(C, R\pi_*\pi^*(\mathcal{F})) = H^*(X, \pi^*(\mathcal{F}))$).

Каноническое вложение $\pi^*(\mathrm{Div}_C) \hookrightarrow \mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}}$ даёт каноническое отображение

$$H^2(X, \pi^*(\mathrm{Div}_C)) \to H^2(X, \mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}}).$$

Следовательно, имеются канонические морфизмы

$$\varphi : \mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}'(V), \tag{8}$$

$$H^2(C, \mathrm{Div}_C) \to H^2(X, \mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}}) \tag{9}$$

Пусть $B = \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}'(V) \to H^0(X, R^2h_*\mathbb{G}_{m,V})]$. Очевидно, что (4), (7) – (9) дают коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Br}'(X) & \longrightarrow & B & \longrightarrow & H^2(X, \mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}}) \\ & & \uparrow & & \varphi\uparrow & & \uparrow \\ & & 0 & \longrightarrow & \mathrm{Br}(k) \cap \varphi^{-1}(B) & \longrightarrow & H^2(C, \mathrm{Div}_C) \end{array} \tag{10}$$

Поскольку группа $[\mathrm{Br}'(V)/\varphi(\mathrm{Br}(k))](\mathrm{non}-p)$ конечная по условию теоремы, то мы видим, что группа

$$B/[\varphi(\mathrm{Br}(k)) \cap B](\mathrm{non}-p) = \mathrm{Coker}[\mathrm{Br}(k) \cap \varphi^{-1}(B) \xrightarrow{\varphi} B](\mathrm{non}-p)$$

конечная. Поэтому достаточно показать, что пересечение группы $\mathrm{Br}'(X)(\mathrm{non}-p)$ с образом морфизма групп

$$[\mathrm{Br}(k) \cap \varphi^{-1}(B)](\mathrm{non}-p) \xrightarrow{\varphi} B(\mathrm{non}-p)$$

конечно. В силу коммутативности диаграммы (10) достаточно доказать конечность ядра канонического отображения $H^2(C, \mathrm{Div}_C) \to H^2(X, \mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}})$.

Очевидно, что ядро отображения $H^2(C, \mathrm{Div}_C) \to H^2(X, \mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}})$ является прямой суммой по всем замкнутым точкам v кривой C ядер отображений

$$\pi^* : H^2(\mathrm{Spec}\,\kappa(v), \mathbb{Z}) \to \bigoplus_D H^2(\mathrm{Spec}\,\kappa(D), \mathbb{Z}), \tag{11}$$

которые также можно записать в виде

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(\overline{\kappa(v)}/\kappa(v)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \bigoplus_D \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(\kappa(D)^{\mathrm{s}}/\kappa(D)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Здесь D пробегает неприводимые компоненты слоя морфизма $X \to C$ над точкой v, поле $\kappa(D)^{\mathrm{s}}$ является сепарабельным замыканием поля $\kappa(D)$ рациональных функций на D.

Пусть κ_D – целое замыкание $\kappa(v)$ в поле $\kappa(D)$. Тогда $\kappa(v) \subset \kappa(D)$ – такое расширение полей, что многообразие D является геометрически целым над κ_D. Мы имеем композицию канонических морфизмов полей

$$\kappa(D) = \kappa_D(D) \leftarrow \kappa_D \leftarrow \kappa(v),$$

индицирующую композицию отображений

$$H^2(\mathrm{Spec}\,\kappa(v), \mathbb{Z}) \to H^2(\mathrm{Spec}\,\kappa_D, \mathbb{Z}) \to H^2(\mathrm{Spec}\,\kappa_D(D), \mathbb{Z}) = H^2(\mathrm{Spec}\,\kappa(D), \mathbb{Z}).$$

Очевидно, что композиция

$$H^2(\mathrm{Spec}\,\kappa(v), \mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi^*} \bigoplus_D H^2(\mathrm{Spec}\,\kappa(D), \mathbb{Z}) \to H^2(\mathrm{Spec}\,\kappa(D), \mathbb{Z}) \tag{12}$$

отображения π^* в (11) и канонической проекции

$$\bigoplus_D H^2(\mathrm{Spec}\,\kappa(D), \mathbb{Z}) \to H^2(\mathrm{Spec}\,\kappa(D), \mathbb{Z})$$

является композицией канонических отображений

$$H^2(\mathrm{Spec}\,\kappa(v), \mathbb{Z}) \to H^2(\mathrm{Spec}\,\kappa_D, \mathbb{Z}) \to H^2(\mathrm{Spec}\,\kappa_D(D), \mathbb{Z}) = H^2(\mathrm{Spec}\,\kappa(D), \mathbb{Z})$$

$$\xrightarrow{x\mapsto \mathrm{mult}_{\pi^{-1}(v)}(D)\cdot x} H^2(\operatorname{Spec}\kappa(D),\mathbb{Z}), \tag{13}$$

где $\mathrm{mult}_{\pi^{-1}(v)}(D)$ – кратность подмногообразия D в слое $X_v=\pi^{-1}(v)$.

Пусть $\mathbb{F}_q$ – конечное поле порядка q и пусть $W\hookrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{F}_q}$ – геометрически неприводимое проективное подмногообразие размерности r и степени d. Хорошо известный результат Ленга и Вейля [6, теорема 1] показывает, что

$$|\,\mathrm{Card}(W(\mathbb{F}_q))-q^r|\le (d-1)(d-2)\,q^{r-1/2}+c(n,d,r)\,q^{r-1}$$

для константы $c(n,d,r)>0$, зависящей только от n,d и r.

В силу оценки Ленга–Вейля и леммы Гензеля многообразие V имеет точки почти во всех пополнениях глобального поля k. Другими словами, имеется такое конечное множество S замкнутых точек кривой C, что для всех $v\notin S$ морфизм $X\to C$, ограниченный на спектр локального кольца $\mathcal{O}_v$, имеет сечение $\theta:\operatorname{Spec}\mathcal{O}_v\to X\times_C\operatorname{Spec}\mathcal{O}_v$. В силу следствия 2.2 в [7], точка $\theta(v)$ является регулярной точкой схемного слоя $\pi^{-1}(v)$. Поэтому $\mathcal{O}_{\pi^{-1}(v),\theta(v)}$ – регулярное локальное кольцо и слой $\pi^{-1}(v)$ аналитически неприводим в точке $\theta(v)$ [8, гл. 11, замечание 1 к предложению 11.24]; в частности, $\theta(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_v)$ пересекает *одну* неприводимую компоненту схемного слоя $\pi^{-1}(v)$ (то, что сечение на регулярной модели пересекает в точности одну неприводимую компоненту кратности 1 слоя, доказано также в [9, лемма 1.1, b]). Поэтому любой вертикальный дивизор Картье D с носителем в слое $\pi^{-1}(v)$ может быть единственным образом записан в виде

$$D=n_0\cdot\pi^{-1}(v)+\sum_i n_i\cdot D_i,$$

где $n_j\in\mathbb{Z}$ и D_i – такие неприводимые компоненты слоя $\pi^{-1}(v)$, что выполнено равенство $D_i\cap\theta(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_v)=\varnothing$. Следовательно, получаем разложение пучков

$$\mathrm{Div}^{\mathrm{vert}}_{X\times_C\operatorname{Spec}\mathcal{O}_v}=\pi^*(\mathrm{Div}_{\operatorname{Spec}\mathcal{O}_v})\oplus\left(\bigoplus_{\substack{y\in X\times_C\operatorname{Spec}\mathcal{O}_v\setminus V,\ \mathrm{codim}_{X\times_C\operatorname{Spec}\mathcal{O}_v}(y)=1,\\ \overline{\{y\}}\cap\theta(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_v)=\varnothing}} i_{y*}\mathbb{Z}\right) \tag{14}$$

Соотношение $\pi\circ\theta=\mathrm{id}_{\operatorname{Spec}\mathcal{O}_v}$ показывает, что композиция

$$\begin{aligned}H^*(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_v,\mathrm{Div}_{\operatorname{Spec}\mathcal{O}_v})&\xrightarrow{\pi^*}H^*(X\times_C\operatorname{Spec}\mathcal{O}_v,\pi^*(\mathrm{Div}_{\operatorname{Spec}\mathcal{O}_v}))\\&\xrightarrow{\theta^*}H^*(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_v,\mathrm{Div}_{\operatorname{Spec}\mathcal{O}_v})\end{aligned}$$

является тождественным отображением. Поэтому мы получаем вложение

$$H^2(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_v,\mathrm{Div}_{\operatorname{Spec}\mathcal{O}_v})\overset{\pi^*}{\hookrightarrow}H^2(X\times_C\operatorname{Spec}\mathcal{O}_v,\pi^*(\mathrm{Div}_{\operatorname{Spec}\mathcal{O}_v})).$$

С другой стороны, разложение (14) даёт вложение

$$H^2(X\times_C\operatorname{Spec}\mathcal{O}_v,\pi^*(\mathrm{Div}_{\operatorname{Spec}\mathcal{O}_v}))\hookrightarrow H^2(X\times_C\operatorname{Spec}\mathcal{O}_v,\mathrm{Div}^{\mathrm{vert}}_{X\times_C\operatorname{Spec}\mathcal{O}_v})).$$

Следовательно, для $v\notin S$ ядро отображения (11) тривиально.

Остаётся доказать, что для $v \in S$ ядро композиции (12) конечно.

Для начала заметим, что отображение $H^2(\operatorname{Spec} \kappa_D, \mathbb{Z}) \to H^2(\operatorname{Spec} \kappa(D), \mathbb{Z})$ в композиции (13) инъективно. Действительно, это отображение совпадает с отображением

$$H^1(\operatorname{Gal}(\overline{\kappa_D}/\kappa_D), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^1(\operatorname{Gal}(\kappa(D)^{\mathrm{s}}/\kappa(D)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Оно инъективно, потому что $\kappa(D)$ и любое алгебраическое замыкание поля κ_D линейно разделены, так что имеется канонический изоморфизм [10, гл. V, § 10, п. 4, теорема 1]

$$\operatorname{Gal}(\overline{\kappa_D}/\kappa_D) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Gal}(\overline{\kappa_D}(D)/\kappa(D));$$

остаётся использовать каноническую последовательность инфляции – ограничения [11, гл. IV, § 5, предложение 5.1]

$$\begin{aligned} 0 \to H^1(\operatorname{Gal}(\overline{\kappa_D}(D)/\kappa(D)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) &\xrightarrow{\inf} H^1(\operatorname{Gal}(\kappa(D)^{\mathrm{s}}/\kappa(D)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ &\xrightarrow{\mathrm{res}} H^1(\operatorname{Gal}(\kappa(D)^{\mathrm{s}}/\overline{\kappa_D}(D)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Следовательно, достаточно доказать конечность ядра композиции отображений

$$H^2(\operatorname{Spec} \kappa(v), \mathbb{Z}) \to H^2(\operatorname{Spec} \kappa_D, \mathbb{Z}) \xrightarrow{x \mapsto \operatorname{mult}_{\pi^{-1}(v)}(D) \cdot x} H^2(\operatorname{Spec} \kappa_D, \mathbb{Z}). \qquad (15)$$

Пусть $d = [\kappa_D : \kappa(v)]$. Поскольку композиция ограничения и коограничения является умножением на d, то мы видим, что ядро композиции (15) содержится в ядре умножения на $\operatorname{mult}_{\pi^{-1}(v)}(D) \cdot d : \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, которое, очевидно, конечно. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть $\pi : X \to C$ – сюръективный морфизм гладких проективных многообразий над конечным полем $\mathbb{F}_q$ характеристики $p > 2$, C – кривая, общий схемный слой морфизма π является* K3*–поверхностью V над $k = \kappa(C)$. Тогда группа*

$$\operatorname{Br}'(X)(\mathrm{non}-p) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigoplus_{l \neq p} \operatorname{Br}'(X)(l)$$

конечная.

Это следует из теоремы 1 и теоремы Скоробогатова – Зархина [1, теорема 1.3], согласно которой группа $[\operatorname{Br}'(V)/\operatorname{Im}[\operatorname{Br}(k) \to \operatorname{Br}'(V)]](\mathrm{non}-p)$ является конечной.

Список литературы / References

[1] Skorobogatov A.N., Zarhin Yu.G., "A finiteness theorem for the Brauer group of K3 surfaces in odd characteristic", arXiv: arXiv: 1403.0849v1 [math.AG] 4 Mar 2014, 1–10.

[2] Танкеев С.Г., "О конечности группы Брауэра арифметической схемы", *Матем. заметки*, **95**:1 (2014), 136–149; [Tankeev S.G., "On the finiteness of the Brauer group of an arithmetic scheme", *Math. Notes*, **95**:1 (2014), 136–149], (in Russian)].

[3] Colliot-Thélène J.-L., Skorobogatov A.N., Swinnerton-Dyer P., "Hasse principle for pencils of curves of genus one whose Jacobians have rational 2-division points", *Invent. Math.*, **134**:3 (1998), 579–650.

[4] Милн Дж., *Этальные когомологии*, Мир, М., 1983; [Milne J.S., *Etale cohomology*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1980].

[5] Годеман Р., *Алгебраическая топология и теория пучков*, ИЛ, М., 1961; [Godement R., *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, Paris, 1958].

[6] Lang S., Weil A., "Number of points of varieties in finite fields", *Amer. J. Math.*, **76**:4 (1954), 819–827.

[7] Танкеев С. Г., "О группе Брауэра арифметической схемы. II", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:5 (2003), 155–176; [Tankeev S.G., "On the Brauer group of arithmetic scheme. II", *Izv. Math.*, **67**:5 (2003), 1007–1029].

[8] Атья М., Макдональд И., *Введение в коммутативную алгебру*, Мир, М., 1972; [Atiyah M.F., Macdonald I.G., *Introduction to commutative algebra*, Addison–Wesley Publ. Co., Massachusets, 1969].

[9] Skorobogatov A. N., "Descent on fibrations over the projective line", *Amer. J. Math.*, **118**:5 (1996), 905–923.

[10] Бурбаки Н., *Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы, Элементы математики*, Наука, М., 1965; [Bourbaki N., *Éléments de Mathématique. Algébre, livre II*, Hermann, Paris, 1963].

[11] *Алгебраическая теория чисел*, ред. Касселс Дж., Фрёлих А., Мир, М., 1969; [*Algebraic number theory*, Proc. Internat. Conf. Brighton, 1965, eds. Cassels G. W. S., Frölich A., Academic Press, London, and Thompson, Washington, DC, 1967].

Prokhorova T. V., " On the Brauer Group of an Arithmetic Model of a Variety over a Global Field of Positive Characteristic", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:2 (2016), 164–172.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-2-164-172

Abstract. Let V be a smooth projective variety over a global field $k = \kappa(C)$ of rational functions on a smooth projective curve C over a finite field $\mathbb{F}_q$ of characteristic p. Assume that there is a projective flat $\mathbb{F}_q$-morphism $\pi : X \to C$, where X is a smooth projective variety and the generic scheme fiber of π is isomorphic to a variety V (we call $\pi : X \to C$ an *arithmetic model of a variety* V).

M. Artin conjectured the finiteness of the Brauer group $\mathrm{Br}(X)$ classifying sheaves of Azumaya algebras on X modulo similitude. It is well known that the group $\mathrm{Br}(X)$ is contained in the cohomological Brauer group

$$\mathrm{Br}'(X) = H^2_{et}(X, \mathbb{G}_m).$$

By definition, the non $-p$ component of the cohomological Brauer group $\mathrm{Br}'(X)$ coincides with the direct sum of the l-primary components of the group $\mathrm{Br}'(X)$ for all prime numbers l different from the characteristic p. It is known that the structure of k-variety on V yields the canonical morphism of the groups $\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}'(V)$.

The finiteness of the non $-p$ component of the cohomological Brauer group $\mathrm{Br}'(X)$ of a variety X has been proved if

$$[\mathrm{Br}'(V)/\,\mathrm{Im}[\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}'(V)]](\mathrm{non}\,-p)$$

is finite.

In particular, if V is a K 3 surface (in other words, V is a smooth projective simply connected surface over a field k and the canonical class of a surface of V is trivial: $\Omega^2_V = \mathcal{O}_V$) and the characteristic of the ground field $p > 2$, then, by the Skorobogatov – Zarhin theorem, $[\mathrm{Br}'(V)/\,\mathrm{Im}[\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}'(V)]](\mathrm{non}\,-p)$ is finite, so in this case the groups $\mathrm{Br}'(X)(\mathrm{non}\,-p)$ and $\mathrm{Br}(X)(\mathrm{non}\,-p)$ are finite.

Keywords: Brauer group, arithmetic model, K 3 surface

On the authors: Prokhorova Tatyana Vyacheslavovna, orcid.org/0000-0002-6883-2087, PhD,
A. G. and N. G. Stoletov Vladimir State University, Gorky str., 87, Vladimir, 600000, Russia, e-mail: tvprokhorova@mail.ru