Модел. и анализ информ. систем. Т. **19**, № **3** (2012) 113–123

УДК 514.17+517.51

О некоторых результатах по геометрии выпуклых тел и их приложениях[1]

Невский М. В.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: mnevsk@uniyar.ac.ru

получена 9 февраля 2012

Ключевые слова: выпуклое тело, осевой диаметр, гомотетия, симплекс, интерполяция, проектор

Даётся обзор результатов автора по геометрии выпуклых тел, полученных в последние годы. Отмечаются приложения к вопросам, связанным с полиномиальной интерполяцией функций многих переменных.

1. Введение

В этой статье $n \in \mathbb{N}$. Элемент $x \in \mathbb{R}^n$ будем записывать в виде $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Через $e_1, \ldots, e_n$ обозначается канонический базис $\mathbb{R}^n$; считаем $e := (1, \ldots, 1)$. Положим $Q_n := [0, 1]^n$. Ниже $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ есть совокупность многочленов от n переменных степени ≤ 1.

Пусть C — выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$, т. е. компактное выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$ с непустой внутренностью. Через σC обозначим результат гомотетии C относительно центра тяжести с коэффициентом σ. Если C — выпуклый многогранник, то $\mathrm{ver}(C)$ есть совокупность вершин C. Под *транслятом* понимается результат параллельного переноса. Обозначим через $d_i(C)$ максимальную длину отрезка, содержащегося в C и параллельного оси x_i. Величину $d_i(C)$ будем называть *i-м осевым диаметром* C. Понятие аксиального, или, иначе говоря, осевого диаметра (axial diameter), было введено Скоттом [17], [18].

Через $\alpha(C)$ обозначим минимальное $\sigma > 0$, для которого Q_n принадлежит трансляту σC.

Для любого $i = 1, \ldots, n$ выпуклое тело C может быть представлено как объединение отрезков, параллельных i-й координатной оси. Перенесём каждый такой отрезок вдоль содержащей его прямой таким образом, чтобы конец полученного отрезка принадлежал гиперплоскости $x_i = 0$, а сам он располагался в полупространстве $x_i \ge 0$. Обозначим через $R_i(C)$ объединение всех перенесённых отрезков.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства РФ по постановлению № 220, договор № 11.G34.31.0053.

Множество $R_i(C)$ есть результат применения к C операции R_i, введённой Радзишевски [16]. Операция R_i переводит C в выпуклое тело $R_i(C)$, причём $\mathrm{vol}\,(R_i(C)) = \mathrm{vol}(C)$.

Операция R_i определяется по аналогии с классической симметризацией Штейнера (см. [2; §15]) относительно гиперплоскости $x_i = 0$. Результат последней операции, применённой к C, также есть объединение отрезков, полученных переносом отрезков C, параллельных оси x_i. Но при симметризации Штейнера рассматриваемой гиперплоскости принадлежит середина каждого перенесённого отрезка.

2. Свойства осевых диаметров симплекса

Пусть S — невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$. Обозначим вершины S через $x^{(j)} = \left(x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}\right)$, $j = 1, \ldots, n+1$. Матрица

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \ldots & x_n^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & \ldots & x_n^{(2)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n+1)} & \ldots & x_n^{(n+1)} & 1 \end{pmatrix}$$

является невырожденной. Если $\Delta := \det(\mathbf{A})$, то $\mathrm{vol}(S) = |\Delta|/n!$. Обозначим через $\Delta_j(x)$ определитель, который получается из Δ заменой j-й строки на строку $(x_1, \ldots, x_n, 1)$. Многочлены $\lambda_j(x) := \Delta_j(x)/\Delta$ из $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ обладают свойством $\lambda_j\left(x^{(k)}\right) = \delta_j^k$ (здесь δ_j^k — символ Кронекера). Коэффициенты λ_j составляют j-й столбец $\mathbf{A}^{-1}$. В дальнейшем считаем $\mathbf{A}^{-1} = (l_{ij})$, иначе говоря, $\lambda_j(x) = l_{1j}x_1 + \ldots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j}$.

В силу свойства $\lambda_j\left(x^{(k)}\right) = \delta_j^k$ любой многочлен $p \in \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет равенству

$$p(x) = \sum_{j=1}^{n+1} p\left(x^{(j)}\right)\lambda_j(x), \tag{2.1}$$

представляющему собой аналог классической интерполяционной формулы Лагранжа. Поэтому мы называем $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ *базисными многочленами Лагранжа, соответствующими симплексу* S. Применяя (2.1) последовательно к $p(x) = 1$, $x_1, \ldots, x_n$, получим для $x \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x) = 1, \quad \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x)x^{(j)} = x. \tag{2.2}$$

Те же равенства (2.2) могут быть получены из формул Крамера, согласно которым

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \ldots & x_1^{(n+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^{(1)} & \ldots & x_n^{(n+1)} \\ 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1(x) \\ \vdots \\ \lambda_n(x) \\ \lambda_{n+1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Числа $\lambda_1(x)$, ..., $\lambda_{n+1}(x)$ являются *барицентрическими координатами* x *относительно симплекса* S (см. [1; гл. 12]). В силу (2.2) хотя бы одно из них положительно. Уравнения $\lambda_j(x)=0$ задают $(n-1)$-мерные гиперплоскости, содержащие грани S, а для $x\in\operatorname{int}(S)$ выполняется $0<\lambda_j(x)<1$. Имеет место представление $S=\{x\in\mathbb{R}^n:\ \lambda_j(x)\geq 0,\ j=1,\dots,n+1\}$. Пусть x — точка границы S. Минимальная размерность грани S, которой принадлежит x, равняется $n-k$ тогда и только тогда, когда среди $\lambda_j(x)$ имеется ровно k чисел, равных нулю $(1\leq k\leq n)$.

Из (2.2) получаются следующие равенства для строчных сумм элементов $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\sum_{j=1}^{n+1} l_{n+1,j}=\sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j(0)=1,$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} l_{ij}=\sum_{j=1}^{n+1}\big[\lambda_j(e_i)-\lambda_j(0)\big]=$$

$$=\sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j(e_i)-\sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j(0)=0,\quad 1\leq i\leq n, \tag{2.3}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n+1} l_{ij}=0.$$

Столбцовые суммы $\mathbf{A}^{-1}$, в отличие от строчных, зависят от S :

$$\sum_{i=1}^{n+1} l_{ij}=\lambda_j(e),\quad 1\leq j\leq n+1.$$

Заметим также, что из невырожденности $\mathbf{A}^{-1}$ следует $\sum_{j=1}^{n+1}|l_{ij}|\neq 0$ при любом $i=1,\dots,n+1$. Как мы увидим ниже, весьма интересный геометрический смысл имеет каждая из величин $2\left(\sum_{j=1}^{n+1}|l_{ij}|\right)^{-1}$ (здесь $1\leq i\leq n$) и $(1/2)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n+1}|l_{ij}|$.

В [6] автор доказал следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть* $1\leq i\leq n$. *Для* i*-го осевого диаметра симплекса* S *верно равенство*

$$\frac{1}{d_i(S)}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1}|l_{ij}|\,. \tag{2.4}$$

В S *существует ровно один отрезок длины* $d_i(S)$, *параллельный оси* x_i. *Центр этого отрезка совпадает с точкой* $y^{(i)}=\sum_{j=1}^{n+1}m_{ij}x^{(j)}$, *где*

$$m_{ij}:=\frac{|l_{ij}|}{\sum\limits_{k=1}^{n+1}|l_{ik}|}.$$

Каждая $(n-1)$*-мерная грань* S *содержит по крайней мере один из концов указанного отрезка. Сумма размерностей двух минимальных по включению граней* S, *содержащих концы отрезка, не превосходит* $n-1$.

Теорема 1 доказывается с помощью применения к S операции Радзишевски R_i. Из её доказательства следует, что все вершины выпуклого многогранника $R_i(S)$ принадлежат параллельным гиперплоскостям $x_i = 0$ и $x_i = d_i(S)$, причём последняя содержит ровно одну вершину. Аналогично результат применения к S симметризации Штейнера относительно гиперплоскости $x_i = 0$ есть выпуклый многогранник, все вершины которого принадлежат гиперплоскостям $x_i = 0$, $x_i = d_i(S)/2$, $x_i = -d_i(S)/2$ (причём каждой из двух последних — ровно по одной вершине). Последнее свойство симплекса S известно — его ранее установили Мартини и Вейссбах. Более того, Мартини [14] доказал, что указанное строение симметризаций Штейнера выпуклого тела в $\mathbb{R}^n$ характеризует симплекс.

Из (2.3) и (2.4) вытекает, что величина $1/d_i(S)$ равна сумме положительных элементов i-й строки $\mathbf{A}^{-1}$ и одновременно сумме модулей отрицательных элементов этой строки. Если $S \subset Q_n$, то

$$\sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}| \geq 2, \quad 1 \leq i \leq n. \tag{2.5}$$

Для любой прямой L симплекс S содержит единственный отрезок максимальной длины, параллельный L. Каждой $(n-1)$-мерной грани S принадлежит хотя бы один из концов этого отрезка. Сумма размерностей двух минимальных по включению граней S, содержащих концы отрезка, не превосходит $n-1$. Метод доказательства теоремы 1 позволяет установить, что объём S ровно в n раз меньше произведения длины указанного отрезка и $(n-1)$-меры проекции S на $(n-1)$-мерную гиперплоскость, ортогональную L.

3. Равенство $\alpha(S) = \sum 1/d_i(S)$

Пусть C — выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$, $d_i(C)$ — i-й осевой диаметр C. Из результата Скотта [17; теорема 1] следует, что если в C можно вписать транслят куба Q_n, то

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(C)} \geq 1. \tag{3.1}$$

Доказательство этого соотношения, приведённое в [17], опирается на n-кратное применение к C симметризаций Штейнера. При этом существенно используется то, что все вершины указанного транслята принадлежат границе C. Автор получил неравенство (3.1) в более общей ситуации, когда подход работы [17] не эффективен. Приводимые ниже теорема 2 и её следствия доказаны в [7].

Теорема 2. *Пусть для выпуклого тела C*

$$\sigma := \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(C)}\right)^{-1}.$$

Тогда C содержит транслят куба σQ_n.

Следствие 1. *Пусть C содержит некоторый транслят Q_n и не содержит никакого транслята τQ_n при $\tau > 1$. Тогда имеет место*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(C)} \geq 1.$$

Следствие 2. *Для любого выпуклого тела $C \subset \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство*

$$\alpha(C) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(C)}. \tag{3.2}$$

Особо выделим случай $C = S$. Оказывается, что в этой ситуации (3.2) обращается в равенство.

Теорема 3. *Пусть S — невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$. Тогда*

$$\alpha(S) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(S)}. \tag{3.3}$$

Теорема 3 доказана в статье [15] двумя способами. Первый способ базируется на равенстве (2.4) для осевых диаметров симплекса. Второй способ опирается на другую идею, о которой автору устно сообщил В. Л. Дольников. Как представляется, оба метода доказательства (3.3) и с точки зрения сложности, и с эстетической точки зрения равноценны.

Итак, если C — невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$, то (3.2) является равенством. Обратное утверждение верно лишь для $n = 1$, когда любое выпуклое тело C есть отрезок и $\alpha(C) = 1/d_1(C)$. Если $n \geq 2$, то в качестве подходящего C, отличного от симплекса, можно взять множество $x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$, $n \leq \sum x_i \leq 2n$. В этом примере $d_1(C) = \ldots = d_n(C) = n$, $\alpha(C) = 1$, поэтому левая и правая части (3.2) одинаковы и равны 1.

Отметим, что неравенство, противоположное (3.2), выполняется с точной константой n в правой части:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(C)} \leq n\alpha(C). \tag{3.4}$$

Равенство в (3.4) верно тогда и только тогда, когда C есть транслят куба σQ_n, $\sigma > 0$.

4. Следствия

Приведённые в настоящей статье следствия равенства (3.3) в основном имеют геометрический характер. Они отмечались в [6] и [15].

Пусть S — невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$. Сначала отметим возможность вычисления $\alpha(S)$ через коэффициенты l_{ij} многочленов λ_j.

Следствие 3. *Справедливо равенство*

$$\alpha(S) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n+1}|l_{ij}|. \tag{4.1}$$

В соответствии со сказанным выше правая часть (4.1) равна по отдельности сумме неотрицательных элементов и сумме неположительных элементов всех строк матрицы $\mathbf{A}^{-1}$, за исключением последней строки.

Ряд результатов связан с величиной $\xi(S) := \min\{\sigma \geq 1 : Q_n \subset \sigma S\}$. Очевидно, $\xi(S) = 1$ тогда и только тогда, когда $Q_n \subset S$.

Следствие 4. *Если $Q_n \not\subset S$, то*

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i(S)} \leq \xi(S). \tag{4.2}$$

Равенство в (4.2) *эквивалентно каждому из двух равносильных условий:*

$$\max_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)}(-\lambda_1(x)) = \ldots = \max_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)}(-\lambda_{n+1}(x))\,;$$

симплекс $\xi(S)S$ описан вокруг Q_n.

Последнее условие означает, что $Q_n \subset \xi(S)S$ и каждая $(n-1)$-мерная грань $\xi(S)S$ содержит вершину Q_n.

Следствие 5. (a) *Неравенство*

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i(S)} \leq 1 \tag{4.3}$$

выполняется тогда и только тогда, когда Q_n содержится в трансляте S.

(b) *Равенство*

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i(S)} = 1$$

имеет место тогда и только тогда, когда некоторый транслят S описан вокруг Q_n.

Следствие 6. *Пусть $S \subset Q_n$. Тогда $\xi(S) \geq \alpha(S) \geq n$. Если $\xi(S) = n$, то $\alpha(S) = n$ и для любого i верно $d_i(S) = 1$.*

С помощью полученных результатов доказывается утверждение, представляющее, по мнению автора, самостоятельный интерес. Рассмотрим n-мерный симплекс S^*, ограниченный гиперплоскостями $x_i = 0$ и $\sum x_i = n$. Очевидно, $Q_n \subset S^*$. Для любого $i = 1, \ldots, n$ симплекс S^* содержит отрезок длины n, параллельный (в данном случае: принадлежащий) i-й координатной оси. Очевидно, что не каждый симплекс S, содержащий Q_n, имеет это свойство. Ниже даётся ответ на вопрос о существовании в S указанного отрезка хотя бы для одного i.

Следствие 7. *Пусть $Q_n \subset S$. Тогда для некоторого $i = 1, \ldots, n$ верно $d_i(S) \geq n$. Иначе говоря, для некоторого i симплекс S содержит отрезок длины n, параллельный i-й координатной оси.*

Заметим, что утверждение следствия 7 было сформулировано автором в виде гипотезы в [5]. Доказательство было дано в [6; следствие 4.2].

Следствие 8. *Если $Q_n \subset S$, то для соответствующих S базисных многочленов λ_j выполняется*

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}| \leq 2. \tag{4.4}$$

В связи с (4.4) заметим, что если $S \subset Q_n$, то $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}| \geq 2n$. Последнее неравенство следует из (2.5).

Следствие 9. *Пусть $Q_n \subset S$, $d_i := d_i(S)$. Обозначим через S' симплекс с вершинами $x^{(i)} := d_i e_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, $x^{(n+1)} := 0$. Тогда $Q_n \subset S'$.*

Определим $d(S)$ как максимальный из осевых диаметров S :

$$d(S) := \max_{1 \leq i \leq n} d_i(S).$$

Обозначим через ϱ_n максимальное значение константы $R > 0$, с которой для любого n-мерного симплекса S, содержащего Q_n, выполняется $d(S) \geq R$.

Следствие 10. *Справедливо равенство $\varrho_n = n$.*

Далее через V обозначается невырожденный параллелепипед в $\mathbb{R}^n$, рёбра которого задаются линейно независимыми векторами $v_1, \ldots, v_n$.

Следствие 11. *Если $V \subset S$, то для некоторого $i = 1, \ldots, n$ симплекс S содержит отрезок, который параллелен v_i и длина которого равна длине v_i, умноженной на n.*

С помощью равенства (3.3) могут быть получены некоторые известные результаты других авторов. В качестве таких примеров приведём следствия 12–15. Утверждение следствия 12 весьма сложным геометрическим путём было доказано Лассаком [13; лемма 1]. Более наглядные следствия 13 и 15 выводятся из следствия 12 так же, как в [13]. Результат следствия 14 был приведён Балла в [10].

Следствие 12. *Предположим, что для симплекса S выполняются включения $-(1/n)S \subset V \subset S$. Тогда для любого $i = 1, \ldots, n$ симплекс $-(1/n)S$ содержит ровно один отрезок, который принадлежит V, параллелен v_i и длина которого равна длине v_i.*

Следствие 13. *Пусть симплекс $S \subset V$ имеет максимальный объём из всех симплексов, принадлежащих V. Тогда для каждого $i = 1, \ldots, n$ симплекс S содержит единственный отрезок, который принадлежит V, параллелен v_i и длина которого равна длине v_i.*

Следствие 14. *Пусть V_1, V_2 — параллелепипеды в $\mathbb{R}^n$, причём V_2 гомотетичен V_1 с коэффициентом $\sigma > 1$. Если $V_1 \subset S \subset V_2$, то $\sigma \geq n$.*

Следствие 15. *Пусть $V \subset S$ есть параллелепипед максимального возможного объёма в симплексе S. Тогда справедливо заключение следствия 13.*

Приведённые выше результаты имеют приложения к вопросам полиномиальной интерполяции непрерывных функций многих переменных. Эти соотношения применялись автором при выводе оценок для норм интерполяционных проекторов через геометрические характеристики множеств. Здесь мы ограничимся случаем линейной интерполяции функций из $C(Q_n)$. По поводу этой тематики см. [4], [5], [6].

Пусть невырожденный симплекс S содержится в Q_n. Рассмотрим интерполяционнный проектор $P : C(Q_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$, узлы которого совпадают с вершинами S. Через $\|P\|$ обозначим норму P как оператора из $C(Q_n)$ в $C(Q_n)$. Точку $x \in \mathrm{ver}(Q_n)$ будем называть 1-*вершиной* Q_n *относительно* S, если $\|P\| = \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)|$ и среди чисел $\lambda_j(x)$ имеется ровно одно отрицательное.

Следствие 16. *Справедливо соотношение*

$$\|P\| \geq \frac{2}{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i(S)} - 1\right) + 1. \tag{4.5}$$

Равенство в (4.5) *имеет место тогда и только тогда, когда существует* 1-*вершина* Q_n *относительно* S *и выполняется любое из эквивалентных условий следствия* 4.

Аналоги неравенства (4.5) получены автором и для полиномиальной интерполяции более общего вида (см. [8]). Ещё одно геометрическое следствие соотношения (3.3) приводится в следующем пункте.

5. О гипотезе Лассака для выпуклого тела

Пусть C — выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $w_i(C)$ i-*ю ширину* C, т. е. ширину C в направлении i-й координатной оси. Величина $w_i(C)$ равна расстоянию между двумя опорными гиперплоскостями к C, нормали к которым направлены из 0 в e_i. Очевидно, что $w_i(C)$ и i-й осевой диаметр $d_i(C)$ связаны неравенством $w_i(C) \geq d_i(C)$.

В 1993 г. Лассак [11] сформулировал следующую интересную гипотезу (мы приводим её в эквивалентном виде).

(H1) *Пусть в выпуклое тело* C *можно вписать транслят* Q_n. *Тогда*

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{w_i(C)} \geq 1. \tag{5.1}$$

Если $n = 1$, то C — отрезок единичной длины и (5.1) является равенством. В двумерной ситуации (5.1) доказано в [11]. Некоторые вычисления с применением производной названы в том доказательстве простыми, но скучными (easy but tedious), и опущены. Иное, нежели в [11], доказательство двумерного варианта (5.1) (и в ряде случаев даже более сильное неравенство), дано в статье автора [9].

К настоящему времени установлен ряд близких к (H1) утверждений, но не эквивалентных (H1). Как отмечалось выше, Скотт [17] доказал, что если в C можно вписать транслят Q_n, то

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(C)} \geq 1. \tag{5.2}$$

Так как $w_i(C) \geq d_i(C)$, то это неравенство слабее, чем (5.1). Автор установил его справедливость в более общей ситуации, когда C содержит транслят Q_n и не содержит транслята σQ_n при $\sigma > 1$ (см. [7] и следствие 1 настоящей статьи). Нетрудно также показать, что аналогичное утверждение для неравенства (5.1) является неверным. В предположениях (H1) в [12] получено соотношение

$$\frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{w_i(C)} + \frac{n-2}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(C)} \geq 1. \tag{5.3}$$

Очевидно, что (5.3) сильнее, чем (5.2), но слабее, чем (5.1).

Обсуждаемые соотношения относятся к задачам о приближении выпуклых тел вписанными параллелепипедами. Некоторые известные факты в этой тематике (включая неравенство (5.3) для трёхмерного случая) приведены в обзоре Бронштейна [5; п. 5.2].

Рассмотрим ситуацию, когда выпуклое тело C представляет собой невырожденный n-мерный симплекс. С помощью части (b) следствия 4, а также неравенства (5.3) автор установил справедливость (H1) в случае $C = S$. Более того, в этой ситуации неравенство в (5.1) становится равенством. Итак, для $C = S$ гипотеза Лассака верна в таком усиленном варианте.

Теорема 4. *Пусть в n-мерный симплекс S можно вписать транслят Q_n. Тогда*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{w_i(S)} = 1, \tag{5.4}$$

$$w_1(S) = d_1(S), \quad \dots, \quad w_n(S) = d_n(S). \tag{5.5}$$

Из соображений подобия немедленно получается следующий результат.

Следствие 17. *Пусть в симплекс $S \subset \mathbb{R}^n$ можно вписать транслят σQ_n при некотором $\sigma > 0$. Тогда для любого $i = 1, \dots, n$ верно $w_i(S) = d_i(S)$.*

Для $n = 1$ и $n = 2$ верно и утверждение, обратное к следствию 16. Минимальное n, для которого это обратное утверждение не верно, равно 3. Действительно, пусть S — правильный тетраэдр с длинами рёбер $\sqrt{2}$, вписанный в Q_3. Таковым является, например, тетраэдр с вершинами $(0,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$. Каждый из трёх отрезков, соединяющих центры скрещивающихся рёбер S, параллелен одной из координатных осей и имеет длину 1. Поэтому для любого $i = 1, 2, 3$ верно $d_i(S) = w_i(S) = 1$. Максимальное σ, при котором S содержит транслят σQ_3, равно $1/3$. При этом куб $(1/3)Q_3$ располагается в S таким образом, что каждая грань S содержит ровно одну из его вершин. Четыре вершины куба $(1/3)Q_3$ не принадлежат границе S. Это означает, что в S нельзя вписать транслят σQ_3 ни при каком $\sigma > 0$.

Заметим также, что если в выпуклое тело $C \subset \mathbb{R}^n$ можно вписать транслят Q_n и для него выполнены равенства (5.4)–(5.5), то C не обязательно является симплексом. Пример: $n = 2$, C — квадрат с вершинами $(\pm 1, 0), (0, \pm 1)$.

В заключение приведём очевидное неулучшаемое неравенство, противоположное (5.1). Если в выпуклое тело $C \subset \mathbb{R}^n$ можно вписать транслят Q_n, то $w_i(C) \geq 1$, поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{w_i(C)} \leq n. \tag{5.6}$$

Равенство в (5.6) эквивалентно условию $w_1(C) = \ldots = w_n(C) = 1$, которое выполняется тогда и только тогда, когда C есть транслят Q_n.

Список литературы

1. Александров П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1979.

2. Бляшке В. Круг и шар. М.: Наука, 1967. 232 с.

3. Бронштейн Е. М. Аппроксимация выпуклых множеств многогранниками // Современная математика. Фундаментальные направления. 2007. Т. 22. С. 5–37.

4. Невский М. В. О минимальной норме интерполяционного проектора // Математика, кибернетика, информатика: труды международной научной конференции, посв. памяти профессора А. Ю. Левина. Яросл. гос. ун-т. Ярославль: ЯрГУ, 2008. С. 137–144.

5. Невский М. В. Об одном соотношении для минимальной нормы интерполяционного проектора // Модел. и анализ информ. систем. 2009. Т. 16, № 2. С. 24–43.

6. Невский М. В. Об одном свойстве n-мерного симплекса // Матем. заметки. 2010. Т. 87, № 4. С. 580–593. (Английский перевод: *Nevskii M. V.* On a property of n-dimensional simplices // Math. Notes. 2010. V. 87, № 4. P. 543–555.)

7. Невский М. В. Об осевых диаметрах выпуклого тела // Матем. заметки. 2011. Т. 90, № 2. С. 313–315. (Английский перевод: *Nevskii M. V.* On the axial diameters of a convex body // Math. Notes. 2011. V. 90, № 2. P. 295–298.)

8. Невский М. В. Геометрические оценки в полиномиальной интерполяции // Модел. и анализ информ. систем. 2011. Т. 18, № 1. С. 142–148.

9. Невский М. В. О гипотезе Лассака для выпуклого тела // Модел. и анализ информ. систем. 2011. Т. 18, № 3. С. 5–11.

10. Balla M. Y. Approximation of convex bodies by parallelotopes. International Centre for Theoretical Physics. Internal report IC/87/310. Trieste, 1987. 5 pp.

11. Lassak M. Approximation of convex bodies by rectangles // Geom. Dedic. 1993. V. 47. P. 111–117.

12. Lassak M. Relationships between widths of a convex body and of an inscribed parallelotope // Bull. Austral. Math. Soc. 2001. V. 63. P. 133–140.

13. Lassak M. Parallelotopes of maximum volume in a simplex // Discrete Comput. Geom. 1999. V. 21. P. 449–462.

14. Martini H. Some characterizing properties of the simplex // Geom. Dedic. 1989. V. 29. P. 1–6.

15. Nevskii M. Properties of axial diameters of a simplex // Discrete Comput. Geom. 2011. V. 46, № 2. P. 301–312.

16. Radziszewski K. Sur une probleme extremal relatif aux figures inscrites et circonscrites aux fiures convexes // Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska. Sect. A. 1952. V. 6. P. 5–18.

17. Scott P. R. Lattices and convex sets in space // Quart. J. Math. Oxford (2). 1985. V. 36. P. 359–362.

18. Scott P. R. Properties of axial diameters // Bull. Austral. Math. Soc. 1989. V. 39. P. 329–333.

On Some Results in the Geometry of Convex Bodies and their Applications

Nevskii M. V.

Keywords: convex body, axial diameter, homothety, simplex, interpolation, projection

We give a survey of some results in the geometry of convex bodies and their applications.

Сведения об авторе:
Невский Михаил Викторович,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
кандидат физико-математических наук, доцент,
декан математического факультета