Моделирование и анализ информационных систем. Т. 23, №2 (2016), с. 211–227
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 23, No 2 (2016), pp. 211–227

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-2-211-227

УДК 519.6

Задача маршрутизации, осложненная зависимостью функций стоимости и "текущих" ограничений от списка заданий

Ченцов А. Г., Ченцов А. А.

получена 28 ноября 2015

Аннотация. Рассматривается задача маршрутизации перемещений, осложненная ограничениями различных типов (условия предшествования, ограничения на достижимость состояний при каждом перемещении и др.). Допускается многовариантность на этапе перемещений, что естественным образом приводит к задаче о посещении мегаполисов. Стоимости перемещений и работ, выполняемых при посещении мегаполисов, могут зависеть от списка заданий. Данный список может отвечать уже выполненным, либо, напротив, еще не выполненным заданиям. Допускается также, что "текущие" ограничения (на перемещения) могут зависеть от упомянутого списка заданий. Рассматриваемая постановка ориентирована на приложения к задачам атомной энергетики (проблема снижения облучаемости персонала АЭС при выполнении комплекса работ в условиях повышенной радиации) и машиностроения. В последнем случае, связанном с управлением инструментом при листовой резке деталей на машинах с ЧПУ, "текущие" ограничения на перемещения могут быть обусловлены тепловыми допусками по отношению к уже "пройденным" фрагментам листа. В статье приведена схема построения оптимального решения на основе широко понимаемого динамического программирования. Используемый при этом алгоритм реализован на ПЭВМ; результаты его применения иллюстрируются на модельных примерах.

Ключевые слова: маршрут, трасса, условия предшествования

Для цитирования: Ченцов А. Г., Ченцов А. А., "Задача маршрутизации, осложненная зависимостью функций стоимости и "текущих" ограничений от списка заданий", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:2 (2016), 211–227.

Об авторах:
Ченцов Александр Георгиевич, orcid.org/0000-0002-8274-1456, член-корр. РАН,
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского,
ул. Софьи Ковалевской, 16, г. Екатеринбург, 620990 Россия,
Уральский Федеральный Университет, профессор,
ул. Мира, 19, г. Екатеринбург, 620002, Россия, e-mail: chentsov@imm.uran.ru

Ченцов Алексей Александрович, orcid.org/0000-0002-0646-9147, канд. физ.-мат. наук,
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского,
ул. Софьи Ковалевской, 16, г. Екатеринбург, 620990 Россия, e-mail: chentsov.a@binsys.ru

Благодарности:
Работа выполнена при финансовой поддержке программы фундаментальных исследований Президиума РАН «Математические задачи современной теории управления».

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 14-08-00419, 15-01-07909).

Работа выполнена при финансовой поддержке Постановления № 211 Правительства Российской Федерации, контракт № 02.A03.21.0006.

Введение

Рассматривается задача маршрутизации перемещений с ограничениями различных типов. Постановка ориентирована на инженерные приложения, среди которых особо отметим некоторые задачи атомной энергетики и задачу управления инструментом при листовой резке деталей на станках с числовым программным управлением (ЧПУ). В упомянутых весьма конкретных задачах возникает необходимость маршрутизации перемещений в условиях большого числа разнообразных ограничений, что крайне затрудняет применение методов дискретной оптимизации, разрабатываемых преимущественно для решения задачи коммивояжера (ЗК) и задач типа ЗК. Серьезные затруднения возникают уже на постановочном уровне. Так, в части, относящейся к задаче о демонтаже энергоблока АЭС, выведенного из эксплуатации, мы сталкиваемся с функциями стоимости, зависящими от списка заданий, не выполненных на текущий момент. В самом деле, исполнитель находится под воздействием радиации от источников, которые еще не демонтированы на данный момент времени. Здесь же возможна ситуация, когда некоторые варианты перемещений, будучи запрещенными в начале процесса демонтажа, с течением времени могут уже стать доступными за счет более раннего демонтирования части радиоактивного оборудования (какие-то источники со временем оказываются "выключенными"). Таким образом, возможно влияние списка заданий и на саму систему ограничений.

Подобная ситуация может складываться и в задаче, связанной с листовой резкой на машинах с ЧПУ (см. [1], [2]). Здесь, однако, могут возникать ограничения на перемещения, зависящие от списка заданий, уже выполненных на момент перемещения. Они при некоторой идеализации могут формулироваться в виде следующего требования: новые точки врезки (в металл) должны быть достаточно удалены от уже вырезанных фрагментов листа, что, в частности, может быть связано со специальными тепловыми допусками. Учет данных ограничений может осуществляться непосредственно (путем введения запретов на определенные типы перемещений), а также косвенно: могут быть введены специальные функции стоимости (по сути, штрафы), при которых нарушение ограничений, формально разрешенное, сопровождается резким ухудшением критерия качества.

Отметим здесь же, что в обоих вышеупомянутых инженерных задачах возникают также ограничения на очередность выполнения заданий, т.е. на маршрут, в виде так называемых условий предшествования (условия типа "одно после другого"). Так, в задаче о демонтаже энергоблока одни излучающие фрагменты оборудования могут располагаться на других, а потому первые (верхние) должны всякий раз демонтироваться раньше нижних. В задаче, связанной с листовой резкой деталей, имеющих один внешний и, возможно, несколько внутренних контуров, резка последних должна осуществляться (всякий раз) раньше.

Полезно отметить также и то, что объектами посещения в упомянутых задачах маршрутизации прикладного характера являются не города (как в ЗК), а мегаполисы, т.е. имеется определенная многовариантность в системе возможных перемещений. Так, например, в задаче об управлении процессом резки пункты прибытия (к каждому контуру) суть точки врезки, а пункты отправления — соответствующие им точки выключения инструмента. Совокупность всех точек упомянутых двух типов образует мегаполис, связанный с вырезаемым контуром. Сама же резка осуществляется по некоторой эквидистанте данного контура. После прибытия режущего инструмента (резака) в точку врезки начинается этап внутренних работ, который завершается в точке выключения инструмента. Вероятно, было бы еще логичнее создать некоторую вторичную эквидистанту, все точки которой могли бы использоваться в качестве возможных точек врезки, что после должной формализации привело бы к "непрерывной" экстремальной задаче на этапе резки каждого контура. На сегодняшний день, однако, трудности вычислительной реализации вынуждают к дискретизации, т.е. к работе с мегаполисами. При этом точки врезки и точки выключения инструмента группируются в упорядоченные пары, совокупность которых (для каждого контура) также порождает ограничения на возможные перемещения между мегаполисами.

Исследуемая ниже задача имеет своим прототипом известную труднорешаемую (в традиционном понимании [3]) ЗК; см. [4]– [7] и др. Отметим достаточно подробное обсуждение задач маршрутизации, подобных в том или ином отношении ЗК, приведенное в [4] (имеются в виду задачи типа ЗК; см. также [8]). В связи с использованием ДП при решении ЗК отметим [9], [10].

В настоящей работе последовательно развивается подход, восходящий к [11]; см. также [12]– [16]. Непосредственную же основу настоящей работы можно связать с [17], где рассматривалась задача последовательного обхода мегаполисов, в которой имеются условия предшествования, а функции стоимости и "текущие" ограничения зависят от списка заданий. Для данной общей постановки в [17] построен вариант широко понимаемого ДП, который был реализован в виде алгоритма для ПЭВМ. В настоящей статье упомянутая конструкция [17] развивается в направлении организации вычислений в задачах, имеющих достаточно большую для метода ДП размерность.

Итак, новым моментом в настоящем исследовании является прежде всего то, что и функции стоимости, и ограничения допускают зависимость от списка заданий. Сами ограничения формулируются, следовательно, в зависимости от процесса выполнения заданий и являются по сути динамическими.

1. Некоторые общие обозначения и определения

В статье используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, связки и др.). Символ $\triangleq$ используется для обозначения равенства по определению. Семейством называется множество, все элементы которого — множества. Ниже используются всякий раз семейства подмножеств (п/м) того или иного фиксированного множества. В этой связи через $\mathcal{P}(H)$ (через $\mathcal{P}'(H)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м множества H; через $\mathrm{Fin}(H)$ обозначаем семейство всех непустых конечных п/м H. Если p и q — какие-либо объекты, то через $\{p;q\}$ обозначаем (единственное) множество, содержащее p, q и не содержащее никаких других элементов; итак, $\{p;q\}$ — неупорядоченная пара объектов p, q, т.е. двоеточие. Каждому объекту y сопоставляем синглетон $\{y\} \triangleq \{y;y\}$, содержащий y. Поскольку каждое множество — объект, в упомянутых терминах определена (см. [18, с. 67]) упорядоченная пара произвольных объектов: если a и b суть объекты, то $(a,b) \triangleq \big\{\{a\};\{a;b\}\big\}$. Если z — какая-либо упорядоченная пара, то через $\mathrm{pr}_1(z)$

и $\mathrm{pr}_2(z)$ обозначаем соответственно ее первый и второй элементы, определяемые условием $z = (\mathrm{pr}_1(z), \mathrm{pr}_2(z))$. Если α, β и γ — три произвольных объекта, то определен [19, с. 17] триплет $(\alpha, \beta, \gamma) \triangleq \big((\alpha, \beta), \gamma\big)$, являющийся упорядоченной парой специального вида. Для любых трех множеств A, B и C полагаем, следуя [19, с. 17], что $A \times B \times C \triangleq (A \times B) \times C$; поэтому при $x \in A \times B$ и $y \in C$ имеем $(x, y) \in A \times B \times C$. Данное обстоятельство учитываем при обозначении соответствующих значений функций трех переменных: для всяких непустого множества D, функции φ, действующей из $A \times B \times C$ в D, $x \in A \times B$ и $y \in C$ в виде $\varphi(x, y) \in D$ имеем значение φ в точке $(x, y) \in A \times B \times C$, которое также записываем в виде $\varphi(x_1, x_2, y)$, где $x_1 = \mathrm{pr}_1(x)$ и $x_2 = \mathrm{pr}_2(x)$: $\varphi(x_1, x_2, y) = \varphi(x, y)$.

Через $\mathcal{R}_+[T]$ обозначаем множество всех функций, действующих из непустого множества T в полупрямую $[0, \infty[\triangleq \{\xi \in \mathbb{R}|\ 0 \leq \xi\}$ (здесь и ниже $\mathbb{R}$ — вещественная прямая). Полагаем, как обычно, $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; ...\}$, $\mathbb{N}_0 \triangleq \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0; 1; 2; ...\}$ и

$$\overline{p, q} \triangleq \big\{j \in \mathbb{N}_0|\ (p \leq j) \& (j \leq q)\big\} \ \ \forall p \in \mathbb{N}_0\ \forall q \in \mathbb{N}_0$$

(заметим, что $\overline{p, q} = \emptyset$ при $q < p$). Если K — непустое конечное множество, то $|K| \in \mathbb{N}$ есть def мощность (количество элементов) K и определено непустое конечное множество $(\mathrm{bi})[K]$ всех биекций "отрезка" $\overline{1, |K|}$ на K. Полагаем, что $|\emptyset| \triangleq 0$.

2. Постановка задачи

Фиксируем непустое множество X, $x^0 \in X$, число $N \in \mathbb{N}$ со свойством $N \geq 2$, а также множества

$$M_1 \in \mathrm{Fin}(X), ..., M_N \in \mathrm{Fin}(X),$$

именуемые ниже мегаполисами. Полагаем далее, что

$$\big(x^0 \notin M_j \ \ \forall j \in \overline{1, N}\big) \& \big(M_p \cap M_q = \emptyset \ \ \forall p \in \overline{1, N}\ \forall q \in \overline{1, N} \setminus \{p\}\big).$$

Полагаем также заданными (непустые) отношения

$$\mathbb{M}_1 \in \mathcal{P}'(M_1 \times M_1), ..., \mathbb{M}_N \in \mathcal{P}'(M_N \times M_N). \tag{1}$$

Если $j \in \overline{1, N}$, то получаем, что $\mathfrak{M}_j \triangleq \{\mathrm{pr}_1(z) :\ z \in \mathbb{M}_j\} \in \mathcal{P}'(M_j)$ и $\mathbf{M}_j \triangleq \{\mathrm{pr}_2(z) :\ z \in \mathbb{M}_j\} \in \mathcal{P}'(M_j)$ (заметим, что в конкретизации, отвечающей листовой резке на машинах с ЧПУ, элементы $\mathfrak{M}_j$ являются возможными точками врезки, а элементы $\mathbf{M}_j$ — точками выключения инструмента). Получаем, что

$$\mathbb{X} \triangleq \{x^0\} \cup \big(\bigcup_{i=1}^{N} M_i\big) \in \mathrm{Fin}(X), \ \ \mathbf{X} \triangleq \{x^0\} \cup \big(\bigcup_{i=1}^{N} \mathbf{M}_i\big) \in \mathrm{Fin}(\mathbb{X}). \tag{2}$$

Пусть $\mathfrak{N} \triangleq \mathcal{P}'(\overline{1, N})$, $A_1 :\ \mathbf{X} \times \mathfrak{N} \to \mathcal{P}'(M_1), ..., A_N :\ \mathbf{X} \times \mathfrak{N} \to \mathcal{P}'(M_N)$. Полагаем, что при $j \in \overline{1, N}$, $x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$ непустое множество $A_j(x, K)$, $A_j(x, K) \subset M_j$, исчерпывает возможности перемещения в мегаполис M_j из состояния x в условиях, когда K есть множество всех заданий, не выполненных на момент перемещения. Постулируем, что

$$A_j(x,K)\cap\mathfrak{M}_j\neq\emptyset\ \ \forall x\in\mathbf{X}\ \forall K\in\mathfrak{N}\ \forall j\in K. \tag{3}$$

Заметим, что с точки зрения здравого смысла условие (3), да и предположения относительно непустоты множеств, являющихся образами отображений $A_1,\ldots,A_N$, несколько избыточны. Так, в частности, в (3) допускается, что при $K\in\mathfrak{N}$ и $j\in K$ рассматривается случай $x\in\mathbf{M}_j$ (см. (3)), который не будет возникать при наших построениях. Мы сохраняем, однако, упомянутые избыточные условия, имея в виду, что и при определении $A_1,\ldots,A_N$, и при формулировании (3) рассматриваются на самом деле продолжения "реальных" зависимостей, связанных с фактическими ограничениями, которые имеют силу в пределах некоторых п/м $\mathbf{X}\times\mathfrak{N}$. Упомянутые продолжения, а точнее, доопределения, могут осуществляться (ограничимся сейчас обсуждением (2)), например, следующим образом: при $K\in\mathfrak{N}$, $j\in K$ и $x\in\mathbf{M}_j$ полагаем, что $A_j(x,K)=\mathfrak{M}_j$; тем самым объявляется формальная совместность "петли", когда из $x\in\mathbf{M}_j$ возможно возвращение в $\mathfrak{M}_j$, чего, конечно, в нашей задаче маршрутизации происходить не будет. Аналогичные соображения можно использовать при доопределении "реальных" зависимостей, связанных с фактическими условиями на возможные перемещения, до мультифункций $A_1,\ldots,A_N$.

Заметим также, что случаи, когда фактические ограничения зависят от списка $\tilde{K}$ выполненных (на текущий момент) заданий, легко сводятся к вышеупомянутому варианту посредством представления $\tilde{K}=\overline{1,N}\setminus K$, где K — множество (список) оставшихся заданий. Использование же именно множества K в последующих построениях представляется целесообразным с точки зрения применения аппарата ДП.

Всюду в дальнейшем полагаем, что $\mathbb{P}\triangleq(\mathrm{bi})[\overline{1,N}]$; элементы $\mathbb{P}$ (а это — перестановки множества $\overline{1,N}$) называем маршрутами. При $\alpha\in\mathbb{P}$ определена перестановка $\alpha^{-1}\in\mathbb{P}$, обратная к α: $\alpha(\alpha^{-1}(k))=\alpha^{-1}(\alpha(k))=k$ при $k\in\overline{1,N}$. Через $\mathbb{Z}$ обозначаем множество всех кортежей $(z_j)_{j\in\overline{0,N}}:\ \overline{0,N}\to\mathbb{X}\times\mathbf{X}$ (итак, $z_0\in\mathbb{X}\times\mathbf{X}, z_1\in\mathbb{X}\times\mathbf{X},\ldots,z_N\in\mathbb{X}\times\mathbf{X}$). При $\alpha\in\mathbb{P}$ полагаем, что

$$\begin{gathered}\mathcal{Z}_\alpha\triangleq\big\{(z_t)_{t\in\overline{0,N}}\in\mathbb{Z}|\ (z_0=(x^0,x^0))\&(z_t\in\mathbb{M}_{\alpha(t)}\ \ \forall t\in\overline{1,N})\&\\ \&(\mathrm{pr}_1(z_s)\in A_{\alpha(s)}(\mathrm{pr}_2(z_{s-1}),\{\alpha(l):\ l\in\overline{s,N}\})\ \ \forall s\in\overline{1,N})\big\},\end{gathered} \tag{4}$$

получая в виде элементов (4) траектории, согласованные с маршрутом α (имеется в виду согласование и в смысле отношений (1), и в смысле условий, связанных с (3)). Определение (4) допускает естественное распространение на случай, когда требуется выполнение уже не всех заданий. В этой связи при $K\in\mathfrak{N}$ полагаем, что $\mathbb{Z}_K$ есть def множество всех кортежей $(z_t)_{t\in\overline{0,|K|}}:\ \overline{0,|K|}\to\mathbb{X}\times\mathbf{X}$. Если же $x\in\mathbf{X}$, $K\in\mathfrak{N}$ и $\alpha\in(\mathrm{bi})[K]$, то

$$\begin{gathered}\mathcal{Z}(x,K,\alpha)\triangleq\big\{(z_t)_{t\in\overline{0,|K|}}\in\mathbb{Z}_K|\ (z_0=(x,x))\&(z_t\in\mathbb{M}_{\alpha(t)}\ \ \forall t\in\overline{1,|K|})\&\\ \&(\mathrm{pr}_1(z_s)\in A_{\alpha(s)}(\mathrm{pr}_2(z_{s-1}),\{\alpha(l):\ l\in\overline{s,|K|}\})\ \ \forall s\in\overline{1,|K|})\big\}.\end{gathered} \tag{5}$$

Рассуждением по индукции проверяется, что каждое из множеств (5) непусто. Поскольку $\mathcal{Z}_\alpha=\mathcal{Z}(x^0,\overline{1,N},\alpha)$ при $\alpha\in\mathbb{P}$, имеем следующее свойство. Именно, $\mathcal{Z}_\alpha\neq\emptyset$

при $\alpha \in \mathbb{P}$. Итак (при условии (3)), с маршрутами (полными и частичными) связываются непустые множества траекторий. На выбор же самих маршрутов также накладываются ограничения.

Условия предшествования. Фиксируем множество $\mathbf{K} \in \mathcal{P}(\overline{1,N} \times \overline{1,N})$, элементы которого называем адресными парами. Если $z \in \mathbf{K}$, то, в частности, $z = (i,j)$, где $i \in \overline{1,N}$ и $j \in \overline{1,N}$; $i = \mathrm{pr}_1(z)$ и $j = \mathrm{pr}_2(z)$. Всюду в дальнейшем полагаем, что $\forall \mathbf{K}_0 \in \mathcal{P}'(\mathbf{K})\ \exists z_0 \in \mathbf{K}_0 :\ \mathrm{pr}_1(z_0) \neq \mathrm{pr}_2(z)\ \ \forall z \in \mathbf{K}_0$ (конкретные варианты данного условия см. в [11, часть 2]). Тогда

$$\mathbf{A} \triangleq \big\{\alpha \in \mathbb{P}|\ \forall z \in \mathbf{K}\ \forall t_1 \in \overline{1,N}\ \forall t_2 \in \overline{1,N}\ \ ((\mathrm{pr}_1(z) = \alpha(t_1))\& \\ \&(\mathrm{pr}_2(z) = \alpha(t_2))) \Rightarrow (t_1 < t_2)\big\} = \big\{\alpha \in \mathbb{P}|\ \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_1(z)) < \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_2(z))\ \ \forall z \in \mathbf{K}\big\} \neq \emptyset; \tag{6}$$

итак, у нас существуют $\mathbf{K}$–допустимые (по предшествованию) маршруты. В итоге

$$\mathbf{D} \triangleq \big\{(\alpha, (z_t)_{t\in\overline{0,N}}) \in \mathbf{A} \times \mathbb{Z}|\ (z_t)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_\alpha\big\} \in \mathrm{Fin}(\mathbf{A} \times \mathbb{Z}) \tag{7}$$

и, в частности, $\mathbf{D} \neq \emptyset$; элементы $\mathbf{D}$ рассматриваем в качестве допустимых решений (ДР). Каждый такой элемент есть пара "маршрут-трасса".

Функции стоимости. Фиксируем далее функции

$$\mathbf{c} \in \mathcal{R}_+[\mathbb{X} \times \mathbb{X} \times \mathfrak{N}],\ c_1 \in \mathcal{R}_+[\mathbb{X} \times \mathbb{X} \times \mathfrak{N}], ..., c_N \in \mathcal{R}_+[\mathbb{X} \times \mathbb{X} \times \mathfrak{N}],\ f \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X}]. \tag{8}$$

Относительно (8) полагаем, что функция $\mathbf{c}$ оценивает внешние перемещения, функции $c_1, ..., c_N$ — работы, связанные с посещением мегаполисов (далее именуем эти работы внутренними), а f — терминальное состояние процесса. С учетом этого полагаем, что при $\alpha \in \mathbb{P}$ и $(z_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathbb{Z}$

$$\mathfrak{C}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}] \triangleq \sum_{s=1}^{N} \big[\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(z_{s-1}), \mathrm{pr}_1(z_s), \{\alpha(t) :\ t \in \overline{s,N}\})+ \\ +c_{\alpha(s)}(z_s, \{\alpha(t) :\ t \in \overline{s,N}\})\big] + f(\mathrm{pr}_2(z_N)); \tag{9}$$

для наших целей важен вариант (9), в котором $\alpha \in \mathbf{A}$ и $(z_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_\alpha$, т.к. тогда (9) оценивает качество ДР из множества (7). Итак, в качестве основной рассматриваем задачу

$$\mathfrak{C}_\alpha[(z_t)_{t\in\overline{0,N}}] \to \min,\ \ \alpha \in \mathbf{A},\ (z_t)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_\alpha. \tag{10}$$

С учетом (7) получаем, что данная задача совместна по ограничениям; ей сопоставляется экстремум

$$V \triangleq \min_{\alpha\in\mathbf{A}}\ \min_{(z_t)_{t\in\overline{0,N}}\in\mathcal{Z}_\alpha} \mathfrak{C}_\alpha[(z_t)_{t\in\overline{0,N}}] \in [0, \infty[\tag{11}$$

и непустое множество оптимальных ДР, т.е. таких ДР $(\alpha^0, (z_t^0)_{t\in\overline{0,N}}) \in \mathbf{D}$, для которых $\mathfrak{C}_{\alpha^0}[(z_t^0)_{t\in\overline{0,N}}] = V$. Мы ставим своей целью нахождение V (11) и какого-либо оптимального ДР. Для достижения этой цели предлагается вариант широко понимаемого ДП.

3. Динамическое программирование

В настоящем разделе излагается схема работы [17] с некоторыми добавлениями, связанными с описанием вспомогательных конструкций. Прежде всего отметим, что в самой задаче (10) процедуру ДП применять затруднительно в связи с большим числом разнообразных условий, ограничивающих конкретный выбор как собственно маршрута, так и траектории. Поэтому, следуя [11, часть 2], мы используем редукцию основной задачи, подменяя условия предшествования соответствующими условиями вычеркивания. В этой связи полагаем при $K \in \mathfrak{N}$, что $\Xi[K] \triangleq \big\{z \in \mathbf{K}|\ (\mathrm{pr}_1(z) \in K)\&(\mathrm{pr}_2(z) \in K)\big\}$. Оператор $\mathbf{I}$, действующий в $\mathfrak{N}$, определяем правилом: при $K \in \mathfrak{N}$

$$\mathbf{I}(K) \triangleq K \setminus \big\{\mathrm{pr}_2(z) :\ z \in \Xi[K]\big\}. \tag{12}$$

Собственно в (12) как раз и определено правило вычеркивания (заданий из списка). Теперь мы вводим в рассмотрение (частичные) маршруты, соблюдающие данное правило, полагая, что

$$(\mathbf{I}\text{−bi})[K] = \big\{\alpha \in (\mathrm{bi})[K]|\ \alpha(s) \in \mathbf{I}(\{\alpha(t) :\ t \in \overline{s, |K|}\})\ \ \forall s \in \overline{1, |K|}\big\}\ \ \forall K \in \mathfrak{N}. \tag{13}$$

При этом [11, часть 2] $(\mathbf{I}\text{−bi})[K] \neq \emptyset \quad \forall K \in \mathfrak{N}$. Посредством (13) определено, в частности, множество $(\mathbf{I}\text{−bi})[\overline{1, N}]$, для которого [11, часть 2]

$$\begin{gathered}\mathbf{A} = (\mathbf{I}\text{−bi})[\overline{1, N}] = \big\{\alpha \in \mathbb{P}|\ (\alpha(k) \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\alpha(l) :\ l \in \overline{1, k-1}\})\ \ \forall k \in \overline{2, N})\&\\ \&(\alpha(1) \in \mathbf{I}(\overline{1, N}))\big\}.\end{gathered} \tag{14}$$

Введем теперь частичные критерии качества, полагая сначала при $K \in \mathfrak{N}$, $\alpha \in (\mathrm{bi})[K]$ и $(z_t)_{t\in\overline{0,|K|}} \in \mathbb{Z}_K$, что

$$\begin{gathered}\hat{\mathfrak{C}}_\alpha[(z_t)_{t\in\overline{0,|K|}}|K] \triangleq \sum_{s=1}^{|K|}\big[\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(z_{s-1}), \mathrm{pr}_1(z_s), \{\alpha(t) :\ t \in \overline{s, |K|}\})+\\ +c_{\alpha(s)}(z_s, \{\alpha(t) :\ t \in \overline{s, |K|}\})\big] + f(\mathrm{pr}_2(z_{|K|})).\end{gathered} \tag{15}$$

Разумеется, (15) будет использоваться при $\alpha \in (\mathbf{I}\text{−bi})[K]$ и $(z_t)_{t\in\overline{0,|K|}} \in \mathcal{Z}(x, K, \alpha)$. С учетом этого при $x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$ рассматриваем экстремальную задачу

$$\hat{\mathfrak{C}}_\alpha[(z_t)_{t\in\overline{0,|K|}}|K] \to \min,\ \ \alpha \in (\mathbf{I}\text{−bi})[K],\ (z_t)_{t\in\overline{0,|K|}} \in \mathcal{Z}(x, K, \alpha), \tag{16}$$

ограничения которой совместны, а потому определено значение

$$v(x, K) \triangleq \min_{\alpha\in(\mathbf{I}\text{−bi})[K]}\ \min_{(z_t)_{t\in\overline{0,|K|}}\in\mathcal{Z}(x,K,\alpha)} \hat{\mathfrak{C}}_\alpha[(z_t)_{t\in\overline{0,|K|}}|K] \in [0, \infty[. \tag{17}$$

Пусть, кроме того, $v(x, \emptyset) \triangleq f(x)\ \ \forall x \in \mathbf{X}$. Теперь (см. (17)) определена функция Беллмана $v \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X}\times\mathcal{P}(\overline{1, N})]$. Нам потребуется одна несущественная модификация мультифункций $A_1, ..., A_N$. Итак, при $j \in \overline{1, N}$, $x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathbf{N}$ полагаем

$$\mathbb{A}_j(x, K) \triangleq \big\{z \in \mathbb{M}_j|\ \mathrm{pr}_1(z) \in A_j(x, K)\big\};$$

при этом (см. (3)) $\mathbb{A}_j(x, K) \in \mathcal{P}'(\mathbb{M}_j)$ в случае $j \in K$, где в качестве j можно, в частности, использовать элемент $\mathbf{I}(K)$. По аналогии с [14] устанавливается

Теорема 1. *Если* $x \in \mathbf{X}$ *и* $K \in \mathfrak{N}$, *то*

$$v(x, K) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in \mathbb{A}_j(x,K)} \big[\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z), K) + c_j(z, K) + v(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})\big].$$

Поскольку, как легко видеть, $V = v(x^0, \overline{1,N})$, из теоремы 1 следует, что

$$V = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1,N})} \min_{z \in \mathbb{A}_j(x^0, \overline{1,N})} \big[\mathbf{c}(x^0, \mathrm{pr}_1(z), \overline{1,N}) + c_j(z, \overline{1,N}) + v(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N} \setminus \{j\})\big]. \tag{18}$$

4. Рекуррентная процедура построения слоев функции Беллмана

Ниже приведена схема, являющаяся развитием [11, §4.9] и не предусматривающая построения всего массива значений функции Беллмана; последнее связано с использованием условий предшествования для целей снижения вычислительной сложности. Пусть

$$\mathcal{G} \triangleq \big\{K \in \mathfrak{N} |\ \forall z \in \mathbf{K}\ \ (\mathrm{pr}_1(z) \in K) \Rightarrow (\mathrm{pr}_2(z) \in K)\big\}. \tag{19}$$

Множества — элементы (19) — именуем существенными списками заданий. Пусть, кроме того,

$$\mathcal{G}_s \triangleq \big\{K \in \mathcal{G} |\ s = |K|\big\}\ \ \forall s \in \overline{1,N}.$$

В виде $\{\mathcal{G}_1, ..., \mathcal{G}_N\}$ имеем разбиение $\mathcal{G}$. При этом $\mathcal{G}_N = \{\overline{1,N}\}$ (синглетон, содержащий $\overline{1,N}$) и $\mathcal{G}_1 \triangleq \big\{\{t\} :\ t \in \overline{1,N} \setminus \mathbf{K}_1\big\}$, где $\mathbf{K}_1 \triangleq \{\mathrm{pr}_1(z) :\ z \in \mathbf{K}\}$ (итак, синглетоны из $\mathcal{G}_1$ соответствуют индексам "неотправителей" в смысле $\mathbf{K}$). Известно [14], [15], что

$$\mathcal{G}_{s-1} = \big\{K \setminus \{t\} :\ K \in \mathcal{G}_s,\ t \in \mathbf{I}(K)\big\}\ \ \forall s \in \overline{2,N}.$$

Получили рекуррентную процедуру $\mathcal{G}_N \to \mathcal{G}_{N-1} \to ... \to \mathcal{G}_1$ (имеется в виду случай $N > 2$). Следующий шаг состоит в построении слоев пространства позиций, обозначаемых через $D_0, D_1, ..., D_N$. При этом полагаем, что $D_N \triangleq \big\{(x^0, \overline{1,N})\big\}$ (синглетон, содержащий позицию $(x^0, \overline{1,N})$) и $D_0 \triangleq \big\{(x, \emptyset) :\ x \in \tilde{\mathbf{M}}\big\}$, где

$$\tilde{\mathbf{M}} \triangleq \bigcup_{j \in \overline{1,N} \setminus \mathbf{K}_1} \mathbf{M}_j.$$

Итак, определены крайние слои. Если $s \in \overline{1, N-1}$, то при $K \in \mathcal{G}_s$ определяем последовательно

$$\mathcal{J}_s(K) \triangleq \{j \in \overline{1,N} \setminus K |\ \{j\} \cup K \in \mathcal{G}_{s+1}\} \in \mathcal{P}'(\overline{1,N}),$$
$$\mathcal{M}_s[K] \triangleq \bigcup_{j \in \mathcal{J}_s(K)} \mathbf{M}_j,\ \ \mathbb{D}_s[K] \triangleq \big\{(x, K) :\ x \in \mathcal{M}_s[K]\big\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{X} \times \mathcal{G}_s),$$

после чего полагаем

$$D_s \triangleq \bigcup_{\mathbb{K} \in \mathcal{G}_s} \mathbb{D}_s[\mathbb{K}]. \tag{20}$$

Таким образом (см. (20)), определение слоев $D_0, D_1, ..., D_N$ завершено. При этом, конечно, $D_j \neq \emptyset \quad \forall j \in \overline{1,N}$. Отметим следующее важное свойство (см. [17, (8)]): если $s \in \overline{1,N}$, $(x,K) \in D_s$, $j \in \mathbf{I}(K)$ и $z \in \mathbb{A}_j(x,K)$, то непременно

$$(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \in D_{s-1}. \tag{21}$$

Учитывая непустоту слоев D_l, $l \in \overline{0,N}$, введем в рассмотрение сужения функции Беллмана v на каждый из этих слоев: если $t \in \overline{0,N}$, то $v_t \in \mathcal{R}_+[D_t]$ определяем условиями

$$v_t(x,K) \triangleq v(x,K) \quad \forall (x,K) \in D_t. \tag{22}$$

Из (21) и (22) имеем, в частности, что при условиях, обеспечивающих (21), определено значение $v_{s-1}(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \in [0,\infty[$. Поэтому при $s \in \overline{1,N}$ и $(x,K) \in D_s$ имеем следующее значение:

$$\min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in \mathbb{A}_j(x,K)} \big[\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z), K) + c_j(z,K) + v_{s-1}(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})\big] \in [0,\infty[.$$

Из теоремы 1 имеем с учетом (21), (22), что (см. [17]) справедливо

Предложение 1. *Если $s \in \overline{1,N}$, то преобразование v_{s-1} в v_s имеет следующий вид:*

$$\begin{gathered}v_s(x,K) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in \mathbb{A}_j(x,K)} \big[\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z), K) + c_j(z,K) + \\ + v_{s-1}(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})\big] \in [0,\infty[\quad \forall (x,K) \in D_s.\end{gathered}$$

Получили рекуррентную процедуру $v_0 \to v_1 \to ... \to v_N$, где $v_0 \in \mathcal{R}_+[D_0]$ определяется явным образом: $v_0(x,\emptyset) = f(x) \quad \forall x \in \tilde{\mathbf{M}}$. Отметим, что из предложения 1, в частности, следует, что (см. (22))

$$\begin{gathered}V = v_N(x^0, \overline{1,N}) = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1,N})} \min_{z \in \mathbb{A}_j(x^0, \overline{1,N})} \big[\mathbf{c}(x^0, \mathrm{pr}_1(z), \overline{1,N}) + \\ + c_j(z, \overline{1,N}) + v_{N-1}(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N} \setminus \{j\})\big].\end{gathered} \tag{23}$$

В заключении раздела рассмотрим (совсем кратко) схему построения оптимального ДР. Полагаем $\mathbf{z}^{(0)} \triangleq (x^0, x^0)$. Далее с учетом (23) выбираем $\eta_1 \in \mathbf{I}(\overline{1,N})$ и $\mathbf{z}^{(1)} \in \mathbb{A}_{\eta_1}(x^0, \overline{1,N})$ из условия

$$V = \mathbf{c}(x^0, \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N}) + c_{\eta_1}(\mathbf{z}^{(1)}, \overline{1,N}) + v_{N-1}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}). \tag{24}$$

Из (21) получаем следующее свойство: $(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}) \in D_{N-1}$. Поэтому согласно предложению 1

$$\begin{gathered}v_{N-1}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}) = \\ = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\eta_1\})} \min_{z \in \mathbb{A}_j(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\})} \big[\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \mathrm{pr}_1(z), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}) + \\ + c_j(z, \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}) + v_{N-2}(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1; j\})\big].\end{gathered} \tag{25}$$

С учетом (25) выбираем $\eta_2 \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\eta_1\})$ и $\mathbf{z}^{(2)} \in \mathbb{A}_{\eta_2}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\})$ из условия

$$\begin{gathered}v_{N-1}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}) = \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}) + \\ + c_{\eta_2}(\mathbf{z}^{(2)}, \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}) + v_{N-2}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\}).\end{gathered} \tag{26}$$

Из (24) и (26) вытекает, что справедливо равенство

$$\begin{aligned} V = \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(0)}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N}) + \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}) + \\ + c_{\eta_1}(\mathbf{z}^{(1)}, \overline{1,N}) + c_{\eta_2}(\mathbf{z}^{(2)}, \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}) + v_{N-2}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\}). \end{aligned} \tag{27}$$

Дальнейшие построения аналогичны (24), (26); их следует продолжать вплоть до исчерпывания полного списка заданий $\overline{1,N}$. Точнее, после N шагов (этапов), подобных (24) и (26), будут построены

$$\eta \stackrel{\triangle}{=} (\eta_j)_{j \in \overline{1,N}} \in \mathbf{A}, \quad (\mathbf{z}^{(j)})_{j \in \overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_\eta,$$

для которых $\mathfrak{C}_\eta[(\mathbf{z}^{(j)})_{j \in \overline{0,N}}] = V$ (при $N = 2$ данный вывод следует из (27) непосредственно по определению функции v_0). Иными словами, будет построено оптимальное ДР $(\eta, (\mathbf{z}^{(j)})_{j \in \overline{0,N}}) \in \mathbf{D}$. Данные очевидные построения сейчас опустим, отсылая за подробностями к подобным в идейном отношении конструкциям [14, раздел 7].

5. Вычислительный эксперимент

Рассматриваемые в данной работе теоретические конструкции, являющиеся общим описанием концепции алгоритмов решения маршрутной задачи обхода мегаполисов, будем использовать для решения конкретной задачи маршрутизации движения резака в задаче оптимизации листовой резки. Будем использовать следующую упрощенную постановку данной задачи. Зафиксируем вещественные числа $a_1 \in \mathbb{R}$, $a_2 \in \mathbb{R}$, $b_1 \in \mathbb{R}$ и $b_2 \in \mathbb{R}$, $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$, которые задают на плоскости размеры прямоугольной области (листа), являющейся в нашей постановке множеством X, а именно: $X \stackrel{\triangle}{=} [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$. Данный лист размечен для резки некоторого количества деталей, задаваемых посредством N замкнутых контуров, которые в нашей модели соответствуют мегаполисам $M_1, ..., M_N$; пересечение контуров не допустимо, но одни контуры могут находиться внутри других (например, деталь в виде шайбы). Более подробно рассмотрим, что представляют собой в данной постановке контуры деталей. Каждый контур представлен двумя эквидистантами:

1) Основная эквидистанта — это замкнутая кривая, по которой движется резак при вырезании контура.

2) Вспомогательная эквидистанта — множество пар точек, у которых первый элемент является точкой врезки (точкой включения резака; из данной точки совершается перевод инструмента с включенным резаком на основную эквидистанту для выполнения реза по контуру), а второй — точка выключения инструмента (резак при завершении движения по основной эквидистанте, т.е. по завершении цикла реза по контуру, совершает перемещение в данную точку для выключения перед перемещением к другому контуру; выключение необходимо для исключения повреждения еще не вырезанных деталей).

В рассматриваемой модели основные эквидистанты дискретизированы для удобства вычислительной реализации, а вспомогательные эквидистанты отождествляются с множествами $\mathbb{M}_1, ..., \mathbb{M}_N$ (1), в которых первые элементы каждой пары — точки включения, а вторые элементы — точки выключения резака.

Будем придерживаться модели, в которой весь процесс резки начинается из точки x^0, являющейся положением парковки резака, и завершается отводом резака после реза последнего контура в состояние x^0 (терминальный этап цикла резки листа — отвод в позицию парковки).

Ограничения на порядок резки контуров в данной концепции выглядят вполне естественно: внутренние (по порядку вложенности) контуры должны вырезаться раньше внешних, что, собственно, определяется технологическими соображениями.

Функции стоимости (8) в данной модели будем определять следующим образом.

1) Функция $\mathbf{c}$ оценивает затраты на перемещение с выключенным резаком из точки парковки резака x^0 в первую (по порядку реализации раскройного плана) точку врезки или из очередной точки выключения резака в следующую точку врезки. Данная функция в нашей модели — евклидово расстояние.

2) Функции $c_1, ..., c_N$ оценивают внутренние работы, а именно, работы, связанные с выходом из точки врезки на основную эквидистанту и отводом резака от нее по завершении реза в точку выключения резака, расположенную на вспомогательной эквидистанте. Следует отметить, что в оценку затрат на внутренние работы также должны входить затраты на перемещение резака по основной эквидистанте при выполнении реза данного контура, но их величина является постоянной и не зависит ни от точки врезки, ни от точки выключения резака, поэтому (в нашей модели) в оптимизационной задаче данные слагаемые мы не учитываем. Итак, всякий раз функция c_i, где $i \in \overline{1,N}$, определяется суммой $3 * \rho(x,y) + \rho(y,z)$, где ρ — евклидово расстояние, x — точка врезки, y — точка начала цикла резки на вырезаемом контуре (основной эквидистанте), а z — точка выключения резака; коэффициент 3 в формуле характеризует дополнительные затраты, связанные с "пробивкой" материала при врезке. Здесь x и z используются в качестве аргументов, $y = y_{x,z}$ однозначно сопоставляется паре (x,z); зависимость от списка заданий, как и в случае с $\mathbf{c}$, здесь отсутствует.

3) Функция f — евклидово расстояние от последней (по ходу реализации раскройного плана) точки выключения резака до точки парковки инструмента.

Технология резки деталей, как уже упоминалось выше, диктует свои ограничения на выбор допустимых точек врезки, которые формализуются в виде отображений $A_1, ..., A_N$. В нашей модели рассматриваем следующие критерии допустимости точек врезки: предотвращение деформации деталей (соблюдение тепловых допусков) и отсеивание наиболее удаленных точек врезки (минимизация холостого хода инструмента). Рассмотрим подробнее каждое из этих условий, при этом будем учитывать, что на момент принятия решения индексы еще не вырезанных контуров образуют множество K, $K \subset \overline{1,N}$.

1) Предотвращение тепловой деформации деталей: для каждого i-го контура задано вещественное число $\delta_i \in \mathbb{R}$, $\delta_i > 0$, определяющее минимально допустимый отступ от данного контура по отношению к уже вырезанным участкам листа. При рассмотрении возможностей для выбора точки врезки для контура с индексом i допустимыми признаются те точки врезки y, которые удовлетворяют системе неравенств:

$$\big(\rho(y,z) > \delta_i \;\; \forall k \in \overline{1,N} \setminus K \; \forall z \in \mathfrak{M}_k\big) \& \big(\rho(y,\tilde{z}) > \delta_i \;\; \forall k \in \overline{1,N} \setminus K \; \forall \tilde{z} \in \tilde{M}_k\big),$$

где $\tilde{M}_k$ — "сетка", являющаяся дискретизацией основной эквидистанты контура с индексом k. Данное условие призвано минимизировать деформацию материала при врезке за счет рассеивания тепла в еще не вырезанных частях листа.

2) Отсеивание наиболее удаленных точек врезки: обозначим через $\mathfrak{M}_i^{(1)}$ множество точек врезки i-контура, удовлетворяющих 1). Пусть порядок вырезания контуров определяется маршрутом α и $\alpha(j) = i$. Среди точек $\mathfrak{M}_i^{(1)}$ выберем ближайшую к предыдущей точке выключения резака или (для перехода из позиции парковки резака) к x^0 точку врезки y', а именно такую точку, для которой $\mathbf{c}(x, y') = \min\limits_{y \in \mathfrak{M}_i^{(1)}} \mathbf{c}(x, y)$, где $\big(x = x^0,\ y \in \mathfrak{M}_{\alpha(1)}^{(1)}\big) \vee \big(x \in \mathbf{M}_{\alpha(j-1)},\ j \in \overline{2, N}, \alpha(j-1) \in \overline{1, N} \setminus K\big)$. Точка y' признается годной согласно 2). Помимо точки y' допустимыми по 2) полагаем также элементы y множества $\mathfrak{M}_i^{(1)}$, удовлетворяющие неравенству $\rho(x, y) - \rho(x, y') \leq \varepsilon_i$, где x — точка начала перемещения на контур с индексом i (см. выше), а вещественное число ε_i, $\varepsilon_i \geq 0$, — допуск на отклонение от ближайшей точки планируемого для осуществления резки контура.

Допустимыми являются точки врезки контура, удовлетворяющие 1) и 2). Отметим, что возможна ситуация, когда из-за вырезанных вокруг контура деталей ни для одной точки врезки контура не выполняется 1), иными словами, это означает, что все точки врезки расположены таким образом, что при включении резака не будет обеспечиваться рассеивание тепловой энергии в еще не вырезанных участках листа и возможна деформация заготовки. Для обеспечения работы алгоритма в таком случае производится отступление от правил выбора точек врезки, основанных на последовательном применении критерия 1) и затем критерия 2). Итак, пусть для контура с индексом i нет ни одной допустимой точки врезки, при этом индексы еще не вырезанных контуров образуют множество K, $K \subset \overline{1, N}$. Применяем ко всему контуру правило 2), т.е. находим множество $\mathfrak{M}_i^{(2)}$ ε_i–ближайших (к текущей точке нахождения инструмента) точек врезки. Среди элементов $\mathfrak{M}_i^{(2)}$ находим такой элемент y'', который характеризуется наибольшим минимальным расстоянием до уже вырезанных контуров, т.е. состояние, для которого справедливо

$$c(x, y'') = \max_{k \in \overline{1,N} \setminus K} \min_{y \in \tilde{M}_k} \rho(x, y),$$

где, как было отмечено выше, $x = x^0$ для случая перемещения инструмента из позиции парковки или x есть точка выключения резака на предыдущем (по порядку реализации раскройного плана) контуре. Точка y'' признается допустимой точкой врезки контура i. Такой прием позволяет исключить коллизии, связанные с невозможностью выбора новой точки врезки.

Описанный в настоящей статье алгоритм был реализован в виде программы для ПЭВМ, написанной на языке программирования C++, работающей под управлением 64-разрядной операционной системы семейства Windows, начиная с версии 7, применительно к приведенной в данном разделе модели для задачи оптимизации листовой резки. Программа работает в многопотоковом режиме: вычислительная часть выполняется в отдельном от интерфейса пользователя потоке. Для случая решения задачи на плоскости имеется возможность графического представления траектории движения по мегаполисам с возможностью увеличения отдельных участков графика и сохранения изображения в файл графического формата bmp. Исходные данные и результаты работы программы хранятся в текстовом файле специальной структуры.

Вычислительный эксперимент проводился на ПЭВМ с процессором Intel Core i7, объемом ОЗУ 64 гБ с установленной операционной системой Windows 7 Максимальная SP1 x64.

Пусть, для определенности, $a_1 = -115$, $a_2 = 110$, $b_1 = -115$, $b_2 = 110$; $x^0 = (0, 0)$, т.е. x^0 совпадает с началом координат, а $\delta_i = 6 \quad \forall i \in \overline{1, 34}$; также пусть задано $N = 34$ контуров и 32 адресных пары, образующие множество $\mathbf{K}$, т.е. ограничения на порядок резки контуров. По соображениям объема мы опустим описание контуров, условий предшествования, а также маршрутов и трасс, ограничившись лишь приведением величины затрат и графиков обхода контуров. На графиках значками $\triangleleft$ отмечены точки врезки, а символами $\triangleright$ — соответствующие им точки выключения резака.

Рассмотрим сначала решение задачи для случая $\varepsilon_i = 10 \quad \forall i \in \overline{1, 34}$. Получены следующие результаты:

величина совокупных затрат: $V(x^0, \overline{1, N}) = 1031.4$;

время счета составило: 14 час. 0 мин. 53 сек.

График маршрута и трассы приведен на рис. 1.

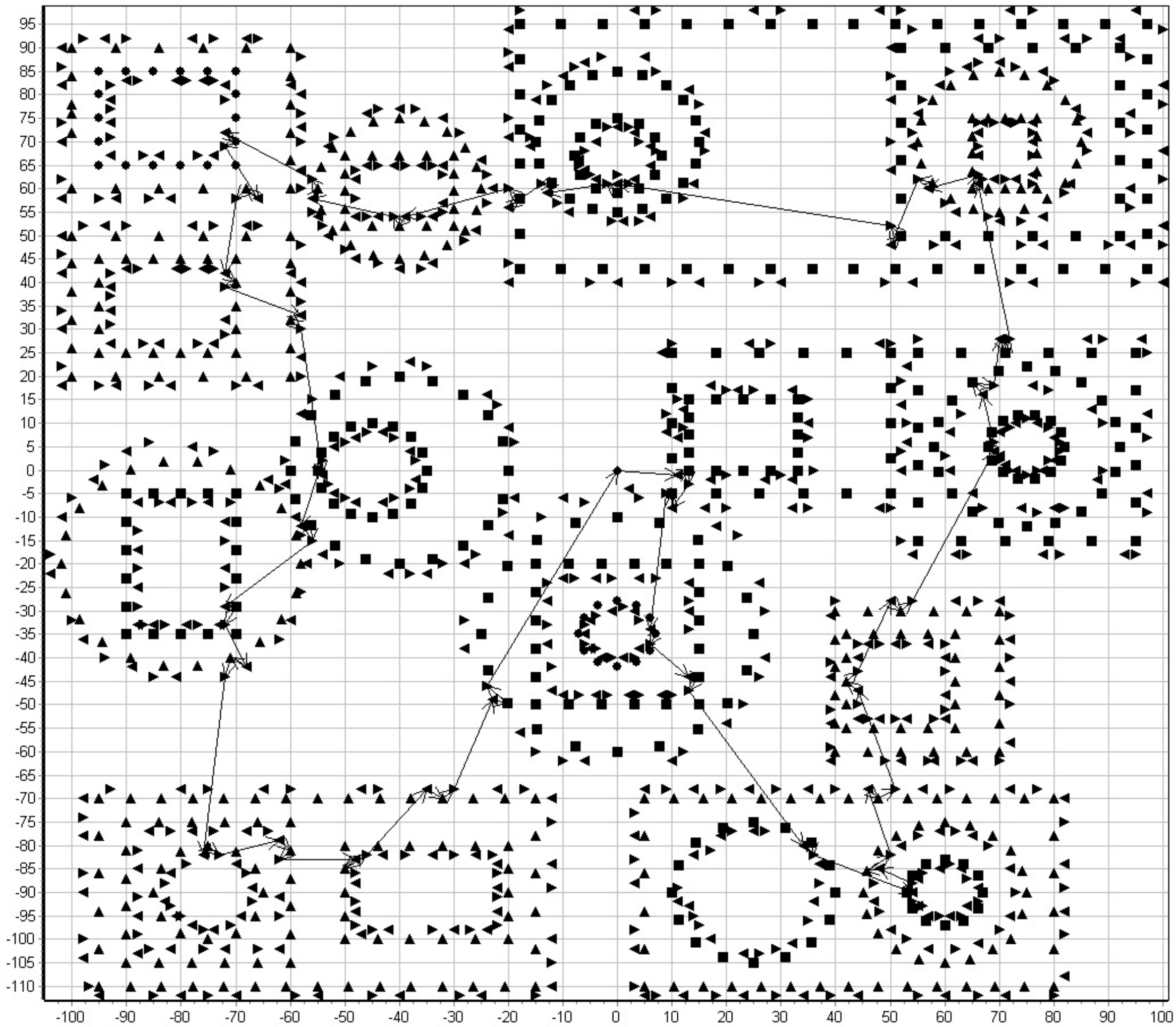

Рис. 1. Маршрут и трасса при значении ε_i равном 10

В ситуации, когда $\varepsilon_i = 50 \ \ \forall i \in \overline{1,34}$, получены следующие результаты:
величина совокупных затрат: $V(x^0, \overline{1,N}) = 1026.4$;
время счета составило: 15 час. 13 мин. 39 сек.
График движения по контурам приведен на рис. 2.

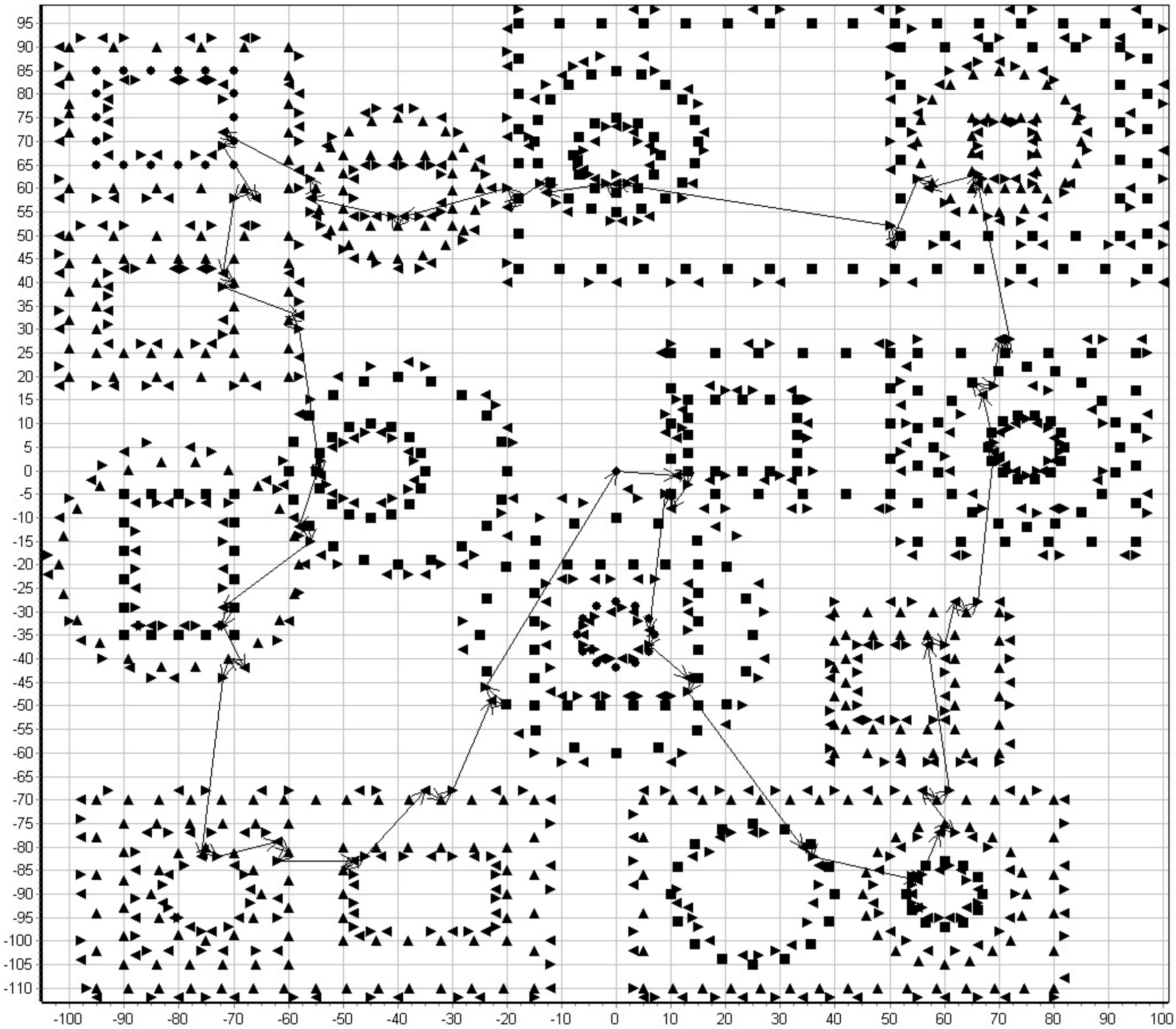

Рис. 2. Маршрут и трасса при значении ε_i равном 50

Как видно из приведенных результатов, с увеличением величин допусков ε_i растет время счета, но уменьшается величина совокупных затрат, что вполне логично: чем больше допуск, тем больше точек врезки доступно для выбора на каждом контуре и тем больше вариантов для оптимизации, но при этом увеличивается объем перебора, что приводит к увеличению времени счета.

Заключение

В статье приведен новый вариант ДП, применимый для построения оптимального решения маршрутной задачи с ограничениями различных типов. На основе данного варианта ДП построен оптимальный алгоритм, реализованный на ПЭВМ; при этом удалось увеличить размерность задач, допускающих точное решение с соблюдением всех ограничений, с $N \approx 31$ до $N \approx 34$. Последнее существенно в задачах (восходящих идейно к ЗК), для которых своеобразной доминантой размерности является $N!$.

Список литературы / References

[1] Петунин А.А., "О некоторых стратегиях формирования маршрута инструмента при разработке управляющих программ для машин термической резки материала", *Вестник УГАТУ. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика*, **13**:2 (35) (2009), 280—286; [Petunin A.A., "O nekotoryh strategijah formirovanija marshruta instrumenta pri razrabotke upravljajushhih programm dlja mashin termicheskoj rezki materiala", *Vestnik UGATU. Serija: Upravlenie, vychislitelnaja tehnika i informatika*, **13**:2 (35) (2009), 280–286, (in Russian).]

[2] Фроловский В.Д., "Автоматизация проектирования управляющих программ тепловой резки металла на оборудовании с ЧПУ", *Информационные технологии в проектировании и производстве*, 2005, № 4, 63—66; [Frolovskij V.D., "Avtomatizacija proektirovanija upravljajushhih programm teplovoj rezki metalla na oborudovanii s ChPU", *Informacionnye tehnologii v proektirovanii i proizvodstve*, 2005, № 4, 63–66, (in Russian).]

[3] Гэри М., Джонсон Д., *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи*, Мир, Москва, 1982; [Gjeri M., Dzhonson D., *Vychislitelnye mashiny i trudnoreshaemye zadachi*, Mir, Moskva, 1982, (in Russian).]

[4] Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х., "Задача коммивояжера. Вопросы теории", *Автоматика и телемеханика*, 1989, № 9, 3–34; [Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.H., "Zadacha kommivojazhera. Voprosy teorii", *Avtomatika i telemehanika*, 1989, № 9, 3–34, (in Russian).]

[5] Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х., "Задача коммивояжера. Точные алгоритмы", *Автоматика и телемеханика*, 1989, № 10, 3–29; [Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.H., "Zadacha kommivojazhera. Tochnye algoritmy", *Avtomatika i telemehanika*, 1989, № 10, 3–29, (in Russian).]

[6] Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х., "Задача коммивояжера. Приближенные алгоритмы", *Автоматика и телемеханика*, 1989, № 11, 3–26; [Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.H., "Zadacha kommivojazhera. Priblizhennye algoritmy", *Avtomatika i telemehanika*, 1989, № 11, 3–26, (in Russian).]

[7] Gutin G., Punnen A.P., *The Traveling Salesman Problem and Its Variations*, Kluwer, 2002.

[8] Сигал И.Х., "Алгоритмы для решения бикритериальной задачи коммивояжера большой размерности", *Техническая кибернетика*, 1990, № 6, 143–155; [Sigal I.H., "Algoritmy dlja reshenija bikriterialnoj zadachi kommivojazhera bolshoj razmernosti", *Tehnicheskaja kibernetika*, 1990, № 6, 143–155, (in Russian).]

[9] Беллман Р., "Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере", *Кибернетический сборник*, **9** (1964), 219–228; [Bellman R., "Primenenie dinamicheskogo programmirovanija k zadache o kommivojazhere", *Kiberneticheskij sbornik*, **9** (1964), 219–228, (in Russian)].

[10] Хелд М., Карп Р.М., "Применение динамического программирования к задачам упорядочения", *Кибернетический сборник*, **9** (1964), 202–218; [Held M., Karp R.M., "Primenenie dinamicheskogo programmirovanija k zadacham uporjadochenija", *Kiberneticheskij sbornik*, **9** (1964), 202–218, (in Russian)].

[11] Ченцов А.Г., *Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории*, РХД, Москва–Ижевск, 2008; [Chentsov A.G., *Jekstremalnye zadachi marshrutizacii i raspredelenija zadanij: voprosy teorii*, RHD, Moskva–Izhevsk, 2008, (in Russian).]

[12] Ченцов А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А., "Экстремальная задача маршрутизации перемещений с ограничениями и внутренними потерями", *Изв. ВУЗов. Математика*, 2010, № 6, 64–81; [Chentsov A.A., Chentsov A.G., Chentsov P.A., "Jekstremalnaja zadacha marshrutizacii peremeshhenij s ogranichenijami i vnutrennimi poterjami", *Izv. VUZov. Matematika*, 2010, № 6, 64–81, (in Russian).]

[13] Ченцов А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А., "Элементы динамического программирования в экстремальных задачах маршрутизации", *Проблемы управления*, 2013, № 5, 12–21; [Chentsov A.A., Chentsov A.G., Chentsov P.A., "Jelementy dinamicheskogo programmirovanija v jekstremalnyh zadachah marshrutizacii", *Problemy upravlenija*, 2013, № 5, 12–21, (in Russian).]

[14] Ченцов А.Г., "К вопросу о маршрутизации комплекса работ", *Вестник Удм. ун-та. Математика. Механика. Комп. науки.*, 2013, № 1, 59–82; [Chentsov A.G., "K voprosu o marshrutizacii kompleksa rabot", *Vestnik Udm. un-ta. Matematika. Mehanika. Komp. nauki.*, 2013, № 1, 59–82, (in Russian).]

[15] Ченцов А.Г., "Задача последовательного обхода мегаполисов с условиями предшествования", *Автоматика и телемеханика*, 2014, № 4, 170–190; [Chentsov A.G., "Zadacha posledovatelnogo obhoda megapolisov s uslovijami predshestvovanija", *Avtomatika i telemehanika*, 2014, № 4, 170–190, (in Russian).]

[16] Ченцов А.А., Ченцов А.Г., "Динамическое программирование в задаче маршрутизации с ограничениями и стоимостями, зависящими от списка заданий", *Доклады Академии Наук*, **453**:1 (2013), 20–23; [Chentsov A.A., Chentsov A.G., "Dinamicheskoe programmirovanie v zadache marshrutizacii s ogranichenijami i stoimostjami, zavisjashhimi ot spiska zadanij", *Doklady Akademii Nauk*, **453**:1 (2013), 20–23, (in Russian).]

[17] Ченцов А.А., Ченцов А.Г., "Задача маршрутизации с ограничениями, зависящими от списка заданий", *Доклады Академии Наук*, **465**:2 (2015), 154–158; [Chentsov A.A., Chentsov A.G., "Zadacha marshrutizacii s ogranichenijami, zavisjashhimi ot spiska zadanij", *Doklady Akademii Nauk*, **465**:2 (2015), 154–158, (in Russian).]

[18] Куратовский К., Мостовский А., *Теория множеств*, Мир, Москва, 1970; [Kuratovskij K., Mostovskij A., *Teorija mnozhestv*, Mir, Moskva, 1970, (in Russian).]

[19] Дьедонне Ж., *Основы современного анализа*, Мир, Москва, 1964; [D'edonne Zh., *Osnovy sovremennogo analiza*, Mir, Moskva, 1964, (in Russian).]

Chentsov A. G., Chentsov A. A., "Routization Problem Complicated by the Dependence of Costs Functions and «Current» Restrictions From the Tasks List", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:2 (2016), 211–227.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-2-211-227

Abstract. The problem of a routization of the movements complicated by the restrictions of different type (preceding conditions, the restrictions on the attainability of states by each movement and others) is considered. A multivariance at the movement step is permitted, it is naturally resulted in the problem about the visiting of megalopolises. The costs of movements and jobs executed when visiting megalopolises may depend on the list of tacks. This list may correspond to performed or unperformed tasks. "Current" restrictions (on movements) may depend on the aforementioned list of tasks. The considered setting is oriented to the application with regard to a nuclear power engineering problems (the problem of decreasing irradiation of the nuclear power station staff when executing a complex of tasks under high radiation intensity) and the machine building. In the second case, which consists in controling a machine for the sheet cutting of details by the numerical program control machines, "current" restrictions on movements may be conditioned by temperature tolerance relative to the fragments of sheet which have already been "visited" by the cutting machine. The scheme of constructing the optimal solution based on the widely understood dynamic programming is considered in this article. The used algorithm is realized on a personal computer; the results of its application are illustrated by the modelling examples.

Keywords: route, trace, preceding conditions

On the authors:
Chentsov Alexander Georgievich, orcid.org/0002-0007-1896-0951, correspondent-member of RAS
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
S. Kovalevskaya str., 16, Ekaterinburg, 620990, Russia,
Ural Federal University, professor,
Mira str., 19, Ekaterinburg, 620002, Russia, e-mail: chentsov@imm.uran.ru

Chentsov Alexey Alexandrovich, orcid.org/0009-0203-2514-7755, candidate of science,
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
S.Kovalevskaya str., 16, Ekaterinburg, 620990, Russia, e-mail: chentsov.a@binsys.ru

Acknowledgments:
This work was supported by the Federal targeted Program "Mathematical problems of modern control theory".
This work was supported by the Russian foundation for basic reseach (projects 14-08-00419, 15-01-07909).
This work was supported by Act 211 Government of the Russian Federation, contract № 02.A03.21.0006