Моделирование и анализ информационных систем. Т. 23, № 3 (2016), с. 248–258
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 23, No 3 (2016), pp. 248–258

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-3-248-258

УДК 519.624.2

Асимптотика, устойчивость и область притяжения периодического решения сингулярно возмущённой параболической задачи с двукратным корнем вырожденного уравнения

Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н., Реке Л., Шнайдер К. Р.

получена 15 мая 2016

Аннотация. Для сингулярно возмущённой параболической задачи с краевыми условиями Дирихле построено и обосновано асимптотическое разложение периодического по времени решения с пограничными слоями вблизи концов отрезка в случае, когда вырожденное уравнение имеет двукратный корень. Поведение решения в пограничных слоях и сам алгоритм построения асимптотики существенно отличаются от случая однократного корня вырожденного уравнения. Исследован также вопрос об устойчивости периодического решения и области его притяжения.

Ключевые слова: сингулярно возмущенные уравнения реакция-диффузия, асимптотические приближения, устойчивость по Ляпунову, периодические решения, пограничные слои, область притяжения

Для цитирования: Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н., Реке Л., Шнайдер К. Р., "Асимптотика, устойчивость и область притяжения периодического решения сингулярно возмущённой параболической задачи с двукратным корнем вырожденного уравнения", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:3 (2016), 248–258.

Об авторах:
Бутузов Валентин Фёдорович, доктор физ.-мат. наук, профессор,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
119991, г. Москва, Ленинские горы, МГУ, д. 1, стр. 2, физический факультет, e-mail: butuzov@phys.msu.ru

Нефедов Николай Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
119991, г. Москва, Ленинские горы, МГУ, д. 1, стр. 2, физический факультет, e-mail: nefedov@phys.msu.ru

Реке Луц, доктор физ.-мат. наук, профессор,
HU Berlin, Institut für Mathematik, Rudower Chaussee, Berlin, Germany, e-mail: recke@mathematik.hu-berlin.de

Шнайдер Клаус, доктор физ.-мат. наук, профессор,
Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics, Mohrenstr. 39, 10117 Berlin, Germany,
e-mail: schneider@wias-berlin.de

Благодарности:
Работа выполнена при поддержке проектов РФФИ и РФФИ – ННИО (проекты 15-01-04619, 14-01-91333).

1. Введение

Рассматривается сингулярно возмущённое параболическое уравнение

$$\varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) = f(u, x, t, \varepsilon), \tag{1.1}$$

$$(x, t) \in D = (0 < x < 1) \times (-\infty < t < \infty),$$

в котором $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $f(u, x, t, \varepsilon)$ – T-периодическая по времени функция, с краевыми условиями

$$u(0, t, \varepsilon) = u^0(t), \quad u(1, t, \varepsilon) = u^1(t), \quad -\infty < t < \infty, \tag{1.2}$$

где $u^0(t)$, $u^1(t)$ – T-периодические функции, и условием T-периодичности решения по времени:

$$u(x, t + T, \varepsilon) = u(x, t, \varepsilon), \quad (x, t) \in \bar{D}. \tag{1.3}$$

Известно, что если вырожденное уравнение

$$f(u, x, t, 0) = 0 \tag{1.4}$$

имеет простой (однократный) корень, то построение асимптотики, а также ее обоснование проводится по достаточно стандартной схеме (см. [1], [2]).

В данной работе задача (1.1) – (1.3) исследуется при условии, что вырожденное уравнение (1.4) имеет двукратный корень. Более точно, мы будем рассматривать случай, когда

$$f(u, x, t, \varepsilon) = h(x, t)\,(u - \varphi(x, t))^2 - \varepsilon f_1(u, x, t, \varepsilon). \tag{1.5}$$

В этом случае корень $u = \varphi(x, t)$ вырожденного уравнения является двукратным. Оказывается, что при определённых условиях (см. ниже Условия A1–A3), задача (1.1) – (1.3) имеет решение с более сложной асимптотикой, в частности, изменяется алгоритм построения пограничных функций, а пограничные слои становятся трёхзонными.

Отметим, что аналогичная задача о погранслойном T-периодическом по времени решении уравнения (1.1) с функцией $f(u, x, t, \varepsilon)$ вида (1.5) и краевыми условиями Неймана была рассмотрена в [3]. В этом случае, в отличие от рассматриваемого в данной работе, асимптотика строится с помощью стандартного алгоритма и пограничные слои имеют однозонный характер с экспоненциальным убыванием пограничных функций, как и в случае простого корня вырожденного уравнения. Отличие от случая простого корня состоит лишь в том, что погранслойные переменные ξ и $\tilde{\xi}$ имеют другой масштаб. Рассматриваемая в данной работе краевая задача Дирихле развивает результаты работы авторов по построению асимптотики для начальной задачи [4] на более сложный класс, а также методы обоснования асимптотики, исследования устойчивости и области влияния устойчивого решения работ [5], [6], [7].

2. Построение асимптотики решения

2.1. Условия и вид асимптотики

Уточним требования к функциям $f(u, x, t, \varepsilon), \quad u^0(t)$ и $u^1(t)$.

Условие A1. Пусть функция $f(u, x, t, \varepsilon)$ имеет вид (1.5), и пусть

$$h(x, t) > 0, \quad (x, t) \in \bar{D}, \tag{2.1}$$

и функции $h(x, t)$, $\varphi(x, t)$, $f_1(u, x, t, \varepsilon)$, $u^0(t)$ и $u^1(t)$ являются T-периодическими по переменной t и достаточно гладкими.

Как обычно, требуемый порядок гладкости обусловлен порядком асимптотики, которую мы хотим построить. Для построения асимптотики произвольного порядка потребуем, чтобы функции были бесконечно дифференцируемыми.

Условие A2.

$$\bar{f}_1(x, t) := f_1\left(\varphi(x, t), x, t, 0\right) > 0, \quad (x, t) \in \bar{D}.$$

Как будет видно из дальнейшего, это условие играет принципиальную роль как в построении погранслойной асимптотики, так и в доказательстве существования решения с построенной асимптотикой. Оно означает, что в случае двукратного корня вырожденного уравнения (в отличие от случая однократного корня) принципиальную роль играют слагаемые порядка $O(\varepsilon)$, входящие в правую часть уравнения (1.1).

Условие A3.

$$u^0(t) > \varphi(0, t), \quad u^1(t) > \varphi(1, t).$$

Это условие играет важную роль при построении погранслойных рядов.

При условиях A1–A3 асимптотическое разложение решения задачи (1.1)–(1.3) будем строить в виде, существенное отличие которого от случая простого корня состоит в том, что регулярная часть асимптотики будет рядом по целым степеням $\sqrt{\varepsilon}$ (а не ε, как в случае простого корня), а погранслойные ряды будут рядами по целым степеням $\sqrt[4]{\varepsilon}$, т.е.

$$\bar{u}(x, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{\frac{i}{2}} \bar{u}_i(x, t), \tag{2.2}$$

$$\Pi(\xi, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{\frac{i}{4}} \Pi_i(\xi, t), \tag{2.3}$$

$$\tilde{\Pi}_i(\tilde{\xi}, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{\frac{i}{4}} \tilde{\Pi}_i(\tilde{\xi}, t). \tag{2.4}$$

Погранслойные переменные ξ и $\tilde{\xi}$ в (2.3) и (2.4) имеют такой же масштаб, как и в случае простого корня вырожденного уравнения:

$$\xi = \frac{x}{\varepsilon}, \quad \tilde{\xi} = \frac{1 - x}{\varepsilon}.$$

Сразу же отметим, что на самом деле пограничные функции $\Pi_i(\xi, t)$ и $\tilde{\Pi}_i(\tilde{\xi}, t)$ будут зависеть не только от ξ, t и $\tilde{\xi}, t$, но также и от ε, однако с целью упрощения записи эту зависимость от ε не будем указывать, т.е. будем писать $\Pi_i(\xi, t)$ вместо $\Pi_i(\xi, t, \varepsilon)$.

2.2. Регулярная часть асимптотики

Стандартным способом, т.е. подставляя ряд (2.2) в равенство

$$\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2}-\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}\right)=f(\bar{u},x,t,\varepsilon)$$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε в разложениях обеих частей равенства, получаем уравнения для коэффициентов $\bar{u}_i(x,t)$ ряда (2.2). Для $\bar{u}_0(x,t)$ получается вырожденным уравнение

$$h(x,t)\left(\bar{u}_0-\varphi(x,t)\right)^2=0,$$

откуда следует, что $\bar{u}_0(x,t)=\varphi(x,t)$.

Для $\bar{u}_1(x,t)$ получается квадратное уравнение

$$h(x,t)\cdot\bar{u}_1^2-\bar{f}_1(x,t)=0.$$

В силу (2.1) и условия A2 это уравнение имеет два корня. В качестве $\bar{u}_1(x,t)$ возьмём положительный корень

$$\bar{u}_1(x,t)=\left[h^{-1}(x,t)\bar{f}_1(x,t)\right]^{\frac{1}{2}}>0. \tag{2.5}$$

Такой выбор будет оправдан ниже при рассмотрении уравнений для пограничных функций и далее при доказательстве существования решения с построенной асимптотикой.

Для следующих коэффициентов $\bar{u}_i(x,t),\ \ i=2,3,\ldots$ ряда (2.2) получаются линейные алгебраические уравнения

$$\left[2h(x,t)\bar{u}_1(x,t)\right]\bar{u}_i=F_i(x,t),$$

где $F_i(x,t)$ выражаются рекуррентно через $\bar{u}_j(x,t)$ с номерами $j<i$. Так как $2h(x,t)\bar{u}_1(x,t)\neq 0$, то из этих уравнений однозначно определяются функции $\bar{u}_i(x,t)$. Очевидно, все $\bar{u}_i(x,t)$ являются T-периодическими функциями по переменной t.

2.3. Погранслойная часть асимптотики

Задачи для пограничных функций $\Pi_i(\xi,t)$ будем формировать с помощью уравнения

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial\xi^2}-\varepsilon^2\frac{\partial\Pi}{\partial t}=\Pi f:=f(\bar{u}(\varepsilon\xi,t,\varepsilon)+\Pi(\xi,t,\varepsilon),\varepsilon\xi,t,\varepsilon)-$$
$$-f(\bar{u}(\varepsilon\xi,t,\varepsilon),\varepsilon\xi,t,\varepsilon)=h(\varepsilon\xi,t)\Big[\left(\bar{u}(\varepsilon\xi,t,\varepsilon)+\Pi(\xi,t,\varepsilon)-\varphi(\varepsilon\xi,t)\right)^2-$$
$$-\left(\bar{u}(\varepsilon\xi,t,\varepsilon)-\varphi(\varepsilon\xi,t)\right)^2\Big]-\varepsilon\Pi f_1,\quad \xi>0, \tag{2.6}$$

и граничных условий

$$\Pi(0,t,\varepsilon)=-\bar{u}(0,t,\varepsilon),\quad \Pi(\infty,t,\varepsilon)=0. \tag{2.7}$$

Уравнение (2.6) и граничные условия (2.7) являются стандартными для метода пограничных функций (см. [1]), однако извлечение из (2.6) уравнений для коэффициентов $\Pi_i(\xi,t)$ ряда (2.3) после подстановки этого ряда в (2.6), будем производить не стандартным способом, а с помощью специального алгоритма, поскольку стандартный способ оказывается непригодным в случае кратного корня вырожденного уравнения.

Опишем алгоритм формирования уравнений для функций $\Pi_i(\xi,t)$.

Уравнение для $\Pi_0(\xi,t)$ возьмём в виде

$$\frac{\partial^2\Pi_0}{\partial\xi^2} = h(0,t)\left[\Pi_0^2 + 2\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(0,t)\Pi_0\right], \quad \xi > 0. \tag{2.8}$$

Отметим, что при стандартном алгоритме правая часть уравнения (2.8) не будет содержать второго слагаемого в квадратных скобках, в результате чего функция $\Pi_0(\xi,t)$ будет стремиться к нулю при $\xi\to\infty$ как $O(\frac{1}{\xi^2})$, что не соответствует истинному поведению решения задачи (1.1) - (1.3) в пограничном слое.

Граничные условия для $\Pi_0(\xi,t)$ следуют из (2.7):

$$\Pi_0(0,t) = u^0(t) - \varphi(0,t), \quad \Pi_0(\infty,t) = 0. \tag{2.9}$$

Задача (2.8), (2.9) сводится стандартным способом к уравнению первого порядка

$$\frac{\partial\Pi_0}{\partial\xi} = -\left[2h(0,t)\left(\frac{1}{3}\Pi_0 + \sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(0,t)\right)\right]^{\frac{1}{2}}\Pi_0, \quad \xi > 0 \tag{2.10}$$

с начальным условием

$$\Pi_0(0,t) = u^0(t) - \varphi(0,t) =: \Pi^0(t). \tag{2.11}$$

Решение задачи (2.10), (2.11) находится в явном виде, и так как $\Pi^0(t) > 0$ в силу условия A3, и $\bar{u}_1(0,t) > 0$ (см. (2.5)), то $\Pi_0(\xi,t)$ монотонно стремится к нулю при $\xi\to\infty$.

Запишем решение так:

$$\Pi_0(\xi,t) = \frac{12\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(0,t)\left[1 + O(\varepsilon^{\frac{1}{4}})\right]\exp\left(-\varepsilon^{\frac{1}{4}}k_0(t)\xi\right)}{\left\{1 - \left[1 - (12\bar{u}_1(0,t)(\Pi^0(t))^{-1})^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{4}} + O(\sqrt{\varepsilon})\right]\exp\left(-\varepsilon^{\frac{1}{4}}k_0(t)\xi\right)\right\}^2}, \tag{2.12}$$

где $k_0(t) = [2h(0,t)\bar{u}_1(0,t)]^{\frac{1}{2}} > 0$, а величины $O(\varepsilon^{\frac{1}{4}})$ и $O(\sqrt{\varepsilon})$ имеют указанный порядок малости при $\varepsilon\to 0$ равномерно на полупрямой $\xi\geq 0$.

Отметим, что если $\Pi^0(t) < 0$, то задача (2.8), (2.9) не имеет решения, а если $\Pi^0(t) = 0$, то $\Pi_0(\xi,t) = 0$, и этот случай требует отдельного рассмотрения.

Несложный анализ выражения (2.12) показывает, что убывание функции $\Pi_0(\xi,t)$ с ростом ξ имеет различный характер на разных промежутках изменений ξ. Можно выделить три зоны.

Первой зоной является промежуток $0 \le \xi \le \varepsilon^{-\gamma}$ (т.е. $0 \le x \le \varepsilon^{1-\gamma}$), где в качестве γ можно взять любое число из промежутка $0 \le \gamma < \frac{1}{4}$. В этой зоне $\Pi_0(\xi,t) = O\left(\frac{1}{1+\xi^2}\right)$, т.е. функция $\Pi_0(\xi,t)$ убывает с ростом ξ степенным образом.

Промежуток $\varepsilon^{-\gamma} \le \xi \le \varepsilon^{-\frac{1}{4}}$ (т.е. $\varepsilon^{1-\gamma} \le x \le \varepsilon^{\frac{3}{4}}$) является второй (переходной) зоной. Здесь происходит изменение характера убывания функции $\Pi_0(\xi,t)$ и изменение масштаба погранслойной переменной.

И, наконец, в третьей зоне, где $\xi \ge \varepsilon^{-\frac{1}{4}}$ (т.е. $x \ge \varepsilon^{\frac{3}{4}}$) функция $\Pi_0(\xi,t)$ имеет оценку

$$\Pi_0(\xi,t) = O(\sqrt{\varepsilon})\exp(-k_0\zeta), \quad \text{где} \quad \zeta = \varepsilon^{\frac{1}{4}} = \frac{x}{\varepsilon^{\frac{3}{4}}},$$

т.е. новая погранслойная переменная ζ, возникшая в третьей зоне, имеет иной масштаб по сравнению со старой переменной ξ, а функция Π_0 убывает в третьей зоне экспоненциально при $\zeta \to \infty$. Отметим ещё раз, что принципиальную роль в описанном поведении функции $\Pi_0(\xi,t)$ играет положительность $\bar{u}_1(0,t)$.

Из (2.12) для $\Pi_0(\xi,t)$ следует оценка

$$|\Pi_0(\xi,t)| \le c\Pi_\kappa(\xi), \quad \xi \ge 0, \quad -\infty < t < +\infty, \tag{2.13}$$

где

$$\Pi_\kappa(\xi) = \frac{\sqrt{\varepsilon}\exp\left(-\varepsilon^{\frac{1}{4}}\kappa\xi\right)}{\left[1-(1-\varepsilon^{\frac{1}{4}})\exp\left(-\varepsilon^{\frac{1}{4}}\kappa\xi\right)\right]^2}. \tag{2.14}$$

Функция $\Pi_\kappa(\xi)$ имеет такое же трёхзонное поведение, как и функция $\Pi_0(\xi,t)$. Она играет роль эталонной (оценочной) функции для коэффициентов $\Pi_i(\xi,t)$ ряда (2.3) аналогично тому, как функция $\exp(-\kappa\xi)$ была эталонной функцией для пограничных функций в случае простого корня вырожденного уравнения. Оценку такого же типа, как и оценка $\Pi_0(\xi,t)$, имеет производная $\frac{\partial\Pi_0}{\partial t}(\xi,t)$:

$$\left|\frac{\partial\Pi_0}{\partial t}(\xi,t)\right| \le c\Pi_\kappa(\xi), \quad \xi \ge 0, \quad -\infty < t < +\infty.$$

Её можно получить, продифференцировав по t выражение (2.12) для $\Pi_0(\xi,t)$, либо рассмотрев краевую задачу для $\frac{\partial\Pi_0}{\partial t}$, которая получается из задачи (2.8), (2.9) дифференцированием по t.

Задачи для следующих коэффициентов $\Pi_i(\xi,t)$, $i = 1,2,\dots$ ряда (2.3) имеют вид

$$\frac{\partial^2\Pi_i}{\partial\xi^2} = \alpha(\xi,t,\varepsilon)\Pi_i + \pi_i(\xi,t,\varepsilon), \quad \xi > 0, \tag{2.15}$$

$$\Pi_i(0,t) = \begin{cases} -\bar{u}_{\frac{i}{2}}(0,t), & \text{если } i \text{ – чётное число,} \\ 0, & \text{если } i \text{ – нечётное число,} \end{cases} \qquad \Pi_i(\infty,t) = 0,$$

где $\alpha(\xi,t,\varepsilon) = 2h(0,t)\left[\Pi_0(\xi,t) + \sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(0,t)\right]$, а функции $\pi_i(\xi,t,\varepsilon)$ в (2.15) рекуррентно выражаются через $\Pi_j(\xi,t)$ с номерами $j < i$ и формируются не стандартным способом. Чтобы описать этот способ, перепишем правую часть уравнения (2.6) в следующем виде (учитывая, что $x = \varepsilon^{\frac{3}{4}}\zeta$):

$$\Pi f = h(\varepsilon^{\frac{3}{4}}\zeta, t)\Big[\left(\bar{u}(\varepsilon^{\frac{3}{4}}\zeta, t, \varepsilon) + \Pi(\xi, t, \varepsilon) - \varphi(\varepsilon^{\frac{3}{4}}\zeta, t)\right)^2 -$$

$$- \left(\bar{u}(\varepsilon^{\frac{3}{4}}\zeta, t, \varepsilon) - \varphi(\varepsilon^{\frac{3}{4}}\zeta, t)\right)^2\Big] - \varepsilon \Pi f_1.$$

Разложим правую часть этого равенства в ряд по целым степеням $\varepsilon^{\frac{1}{4}}$ и обозначим коэффициент при $\varepsilon^{\frac{i}{4}}$ через $\beta_i(\zeta, \Pi_0, \ldots, \Pi_{i-1})$. В этот коэффициент мы не включаем слагаемое $2h(0,t)\Pi_0(\xi,t)\Pi_i$, оно вошло в выражение для $\alpha(\xi, t, \varepsilon)\Pi_i$ в уравнении (2.15).

Если какое-то слагаемое (обозначим его $\beta_{ij}(\zeta, \Pi_0, \ldots, \Pi_{i-1})$), входящее в состав $\beta_i(\zeta, \Pi_0, \ldots, \Pi_{i-1})$, имеет оценку по модулю, содержащую не менее двух сомножителей $|\Pi_k(\xi,t)|$ с какими-то номерами $k < i$, т.е. $|\beta_{ij}| \le c|\Pi_k(\xi,t)| \cdot |\Pi_l(\xi,t)|, \quad k < i, \quad l < i$, то это слагаемое, заменив ζ на $\varepsilon^{\frac{1}{4}}\xi$, включаем в $\pi_i(\xi, t, \varepsilon)$; если же оценка по модулю β_{ij} содержит только один сомножитель $|\Pi_k(\xi,t)|, \quad k < i$, то это слагаемое, умноженное на $\sqrt{\varepsilon}$, включаем в $\pi_{i-2}(\xi, t, \varepsilon)$, заменив, как и в первом случае, ζ на $\varepsilon^{\frac{1}{4}}\xi$.

Кроме того, при $i \ge 6$ в состав $\pi_i(\xi, t, \varepsilon)$ включаем слагаемое $\sqrt{\varepsilon}\frac{\partial \Pi_{i-6}}{\partial t}(\xi, t)$, которое появляется как часть слагаемого $-\varepsilon^2\frac{\partial \Pi}{\partial t}$, входящего в левую часть (2.6).

Отметим, что $\pi_1(\xi, t, \varepsilon) = 0$, поэтому

$$\Pi_1(\xi, t) \equiv 0,$$

и выпишем в качестве примера выражение для $\pi_2(\xi, t, \varepsilon)$:

$$\pi_2(\xi, t, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}\left(2h(0,t)\bar{u}_2(0,t)\Pi_0(\xi,t) - \Pi_0 f_1\right),$$

где

$$\Pi_0 f_1 = f_1\left(\varphi(0) + \Pi_0(\xi,t), 0, t, 0\right) - f_1\left(\varphi(0), 0, t, 0\right).$$

Описанная процедура формирования функций $\pi_i(\xi, t, \varepsilon)$ позволяет получить для них последовательно (для $i = 2, 3, \ldots$) оценку типа

$$|\pi_i(\xi, t, \varepsilon)| \le c\left[\Pi_\kappa^2(\xi) + \sqrt{\varepsilon}\Pi_\kappa(\xi)\right], \tag{2.16}$$

где функция $\Pi_\kappa(\xi)$ определена формулой (2.14), а постоянные c и κ будут, вообще говоря, различными для разных i.

Неравенство (2.16) обеспечивает для всех $\Pi_i(\xi,t)$ оценку типа (2.13):

$$|\Pi_i(\xi,t)| \le c\Pi_\kappa(\xi), \quad \xi \ge 0, \quad -\infty < t < +\infty, \quad i = 2, 3, \ldots. \tag{2.17}$$

с различными c и κ для разных i. Из этой оценки следует, что все $\Pi_i(\xi,t)$ имеют такое же трёхзонное поведение, как и $\Pi_0(\xi,t)$. Оценка (2.17) доказывается с использованием явного выражения для $\Pi_i(\xi,t)$:

$$\Pi_i(\xi,t) = \Phi(\xi,t)\Phi^{-1}(0,t)\Pi_i(0,t) + \Phi(\xi,t)\int_0^\xi \Phi^{-2}(s,t)\int_\infty^s \Phi(\sigma,t)\pi_i(\sigma,t,\varepsilon)d\sigma ds,$$

где

$$\Phi(\xi, t) = \frac{\partial \Pi_0}{\partial \xi}(\xi, t).$$

Производные $\frac{\partial \Pi_i}{\partial t}$ имеют оценку такого же типа, как (2.17). Отметим, что все функции $\Pi_i(\xi, t)$ и их производные являются T-периодическими по переменной t.

Коэффициенты ряда (2.4), т.е. пограничные функции $\tilde{\Pi}_i(\tilde{\xi}, t)$, определяются аналогично функциям $\Pi_i(\xi, t)$ и имеют оценки, аналогичные (2.17).

Таким образом, формальная асимптотика решения задачи (1.1) – (1.3) построена в виде суммы рядов (2.2), (2.3) и (2.4).

3. Существование решения с построенной асимптотикой

Обозначим через $U_n(x, t, \varepsilon)$ частичную сумму построенного разложения, состоящего из трёх рядов (2.2), (2.3) и (2.4):

$$U_n(x, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{\frac{i}{2}} \bar{u}_i(x, t) + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{\frac{i}{4}} \left[\Pi_i \left(\frac{x}{\varepsilon}, t \right) + \tilde{\Pi}_i \left(\frac{1-x}{\varepsilon}, t \right) \right]. \qquad (3.1)$$

Очевидно, $U_n(x, t, \varepsilon)$ является T-периодической функцией по переменной t.

Теорема 1. *Если выполнены условия A1 – A3, то для достаточно малых ε задача (1.1) – (1.3) имеет решение $u_T(x, t, \varepsilon)$, для которого функция $U_n(x, t, \varepsilon)$ при любом $n = 0, 1, 2, \ldots$ является равномерным в $\bar{D}$ асимптотическим приближением с точностью порядка $O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right)$, т.е.*

$$u_T(x, t, \varepsilon) = U_n(x, t, \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right), \quad (x, t) \in \bar{D}. \qquad (3.2)$$

Доказательство теоремы проводится с помощью асимптотического метода дифференциальных неравенств, суть которого состоит в том, что верхнее и нижнее решения для задачи (1.1) – (1.3) формируются с помощью частичной суммы $U_n(x, t, \varepsilon)$ построенного ряда, дающего формальную асимптотику решения задачи (1.1) – (1.3) (аналогичная схема развивается авторами, например, в [5], [6], [7]).

4. Устойчивость и область притяжения решения $u_T(x, t, \varepsilon)$

Теорема 2. *Если выполнены условия A1 – A3, то для достаточно малых ε решение $u_T(x, t, \varepsilon)$ задачи (1.1) – (1.3) является асимптотически устойчивым (по Ляпунову) при $t \to +\infty$.*

Доказательство. Чтобы доказать это утверждение, рассмотрим производную по u функции $f(u,x,t,\varepsilon)$, взятую на решение $u_T(x,t,\varepsilon)$ задачи (1.1) – (1.3):

$$f_u(u_T(x,t,\varepsilon),x,t,\varepsilon) = 2h(x,t)\left(u_T(x,t,\varepsilon) - \varphi(x,t)\right) + \varepsilon f_{1u}(u_T(x,t,\varepsilon),x,t,\varepsilon).$$

Используя асимптотику решения $u_T(x,t,\varepsilon)$ (см. (3.2)), получаем:

$$f_u(u_T(x,t,\varepsilon),x,t,\varepsilon) = f_u(U_n(x,t,\varepsilon),x,t,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right).$$

Отсюда при $n \geq 1$ следует неравенство (для достаточно малых ε):

$$f_u(u_T(x,t,\varepsilon),x,t,\varepsilon) > c_0\sqrt{\varepsilon}, \quad (x,t) \in \bar{D}. \tag{4.1}$$

Неравенство (4.1) обеспечивает асимптотическую устойчивость решения $u_T(x,t,\varepsilon)$ для достаточно малых ε (см. [8]).

Рассмотрим теперь вопрос об области притяжения решения $u_T(x,t,\varepsilon)$, т.е. о множестве таких функций $u_0(x,\varepsilon)$, для которых решение $u(x,t,\varepsilon)$ уравнения (1.1) с краевыми условиями (1.2) и начальным условием (t_0 – произвольный момент времени):

$$u(x,t_0,\varepsilon) = u_0(x,\varepsilon), \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{4.2}$$

существует при $t > t_0$ и удовлетворяет предельному равенству

$$\lim_{t\to+\infty}\left[u(x,t,\varepsilon) - u_T(x,t,\varepsilon)\right] = 0, \quad 0 \leq x \leq 1. \tag{4.3}$$

Ответ на этот вопрос даёт следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия A1 – A3 и пусть $u^0(x,\varepsilon)$ – произвольная гладкая функция, удовлетворяющая условию*

$$u_0(x,\varepsilon) \geq u_T(x,t_0,\varepsilon), \quad 0 \leq x \leq 1. \tag{4.4}$$

Тогда для достаточно малых ε задача (1.1), (1.2), (4.2) имеет решение $u(x,t,\varepsilon)$ при $t > t_0$, и это решение удовлетворяет предельному равенству (4.3).

Доказательство. Снова воспользуемся методом дифференциальных неравенств (определение нижнего и верхнего решений, а также теорему существования решения см., например, в [9]) .

Непосредственной подстановкой можно показать, что функция

$$\bar{U}(x,t,\varepsilon) = u_T(x,t,\varepsilon) + A \cdot E(t,\varepsilon), \tag{4.5}$$

где $E(t,\varepsilon) = \exp\left[-\frac{p(t-t_0)}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}\right]$, A и p – положительные числа, не зависящие от ε, для достаточно большого A, достаточно малого p и достаточно малых ε является верхним решением.

Аналогично показывается, что нижним решением этой задачи является функция

$$\underline{U}(x,t,\varepsilon) = u_T(x,t,\varepsilon) - \varepsilon E(t,\varepsilon). \tag{4.6}$$

Существование нижнего и верхнего решений задачи (1.1), (1.2), (4.2) обеспечивает существование решения $u(x,t,\varepsilon)$ этой задачи, удовлетворяющего неравенствам

$$\underline{U}(x,t,\varepsilon) \le u(x,t,\varepsilon) \le \bar{U}(x,t,\varepsilon), \quad 0 \le x \le 1, \quad t \ge t_0.$$

Из этих неравенств, используя выражения (4.5) и (4.6) для $\bar{U}(x,t,\varepsilon)$ и $\underline{U}(x,t,\varepsilon)$, получаем:

$$-\varepsilon E(t,\varepsilon) \le u(x,t,\varepsilon) - u_T(x,t,\varepsilon) \le AE(t,\varepsilon), \;\; 0 \le x \le 1, \;\; t \ge t_0.$$

Так как $E(t,\varepsilon) \to 0$ при $t \to +\infty$, то

$$\lim_{t\to\infty} [u(x,t,\varepsilon) - u_T(x,t,\varepsilon)] = 0, \;\; 0 \le x \le 1,$$

и, следовательно, для решения $u(x,t,\varepsilon)$ задачи (1.1), (1.2), (4.2) выполняется предельное равенство (4.3). Из теоремы 3 следует, что любая гладкая функция $u_0(x,\varepsilon)$, $0 \le x \le 1$, удовлетворяющая неравенству (4.4), принадлежит области притяжения решения $u_T(x,t,\varepsilon)$ задачи (1.1) – (1.3).

Список литературы / References

[1] A. B. Vasil'eva, V. F. Butuzov, *Asymptotic methods in the theory of singular perturbations, in Russian*, Vyss. Shkola, Moscow, 1990.

[2] A. B. Vasil'eva, V. F. Butuzov, N. N. Nefedov, “Contrast structures in singularly perturbed problems (in Russian)”, *Fundamentalnaja i prikladnaja matematika*, **4** (1998), 799–851.

[3] V. F. Butuzov, “On the periodic solutions of singularly perturbed parabolic problems in case of multiple roots of the degenerate equation, in Russian”, *Zh. Vych. Math. Math. Phys.*, **51** (2011), 44–55.

[4] V. F. Butuzov, N. N. Nefedov, L. Recke, K. R. Schneider, “On a singularly perturbed initial value problem in the case of a double root of the degenerate equation”, *Nonlinear Analysis*, 2012, 1–11.

[5] V. F. Butuzov, N. N. Nefedov, L. Recke, K. R. Schneider, “Existence and stability of solutions with periodically moving weak internal layers”, *J. Math. Anal. Appl.*, **348** (2008), 508–517.

[6] V. F. Butuzov, N. N. Nefedov, L. Recke, K. R. Schneider, “Region of attraction of a periodic solution to a singularly perturbed parabolic problem”, *J. Math. Anal. Appl.*, **91** (2012), 1265–1277.

[7] V. F. Butuzov, N. N. Nefedov, L. Recke, K. R. Schneider, “Periodic solutions with a boundary layer of reaction–diffusion equations with singularly perturbed Neumann boundary conditions”, *Int. J. Bif. Chaos*, **24** (2014).

[8] P. Hess, “Periodic-parabolic boundary value problems and positivity”, *Pitman Research Notes in Math. Series*, 1991, 247.

[9] C. V. Pao, *Nonlinear parabolic and elliptic equations*, Plenum Press, New York and London, 2004.

Butuzov V. F., Nefedov N. N., Recke L., Schneider K., "Asymptotics, Stability and Region of Attraction of a Periodic Solution to a Singularly Perturbed Parabolic Problem in Case of a Multiple Root of the Degenerate Equation", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:3 (2016), 248–258.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-3-248-258

Abstract. For a singularly perturbed parabolic problem with Dirichlet conditions we prove the existence of a solution periodic in time and with boundary layers at both ends of the space interval in the case that the degenerate equation has a double root. We construct the corresponding asymptotic expansion in a small parameter. It turns out that the algorithm of the construction of the boundary layer functions and the behavior of the solution in the boundary layers essentially differ from that ones in case of a simple root. We also investigate the stability of this solution and the corresponding region of attraction.

Keywords: singularly perturbed reaction-diffusion equation; asymptotic approximation; periodic solution; boundary layers; Lyapunov stability; region of attraction

On the authors:
Butuzov Valentin Fedorovich, Professor
Lomonosov Moscow State University,
119991, Moscow, Leninskie Gory, MSU, faculty of physics, e-mail: butuzov@phys.msu.ru

Nefedov Nikolay Nikolaevich, Professor
Lomonosov Moscow State University,
119991, Moscow, Leninskie Gory, MSU, faculty of physics, e-mail: nefedov@phys.msu.ru

Recke Lutz, Professor,
HU Berlin, Institut für Mathematik, Rudower Chaussee, Berlin, Germany, e-mail: recke@mathematik.hu-berlin.de

Schneider Klaus, Professor,
Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics, Mohrenstr. 39, 10117 Berlin, Germany,
e-mail: schneider@wias-berlin.de

Acknowledgments:
This work was supported by RFBR and RFBR–DFG projects(pr. 15-01-04619, 14-01-91333).