©Кудряшов Н. А., Синельщиков Д. И., 2016

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-3-309-316

УДК 517.9

Аналитические решения нелинейного уравнения конвекции–диффузии с нелинейными источниками

Кудряшов Н. А., Синельщиков Д. И.

получена 30 мая 2016

Аннотация. Нелинейные уравнения типа конвекции–диффузии с нелинейными источниками встречаются при описании многих процессов и явлений в физике, механике и биологии. В работе рассматривается семейство нелинейных дифференциальных уравнений, являющееся редукцией к переменным бегущей волны для нелинейного уравнения конвекции–диффузии с полиномиальными источниками. Исследуется вопрос о построении общего аналитического решения данного уравнения. Рассмотрены как стационарный, так и не стационарный случаи при учете и без учета конвекции. Для построения аналитических решений используется подход, основанный на применении нелокальных преобразований, обобщающих преобразования Зундмана. Показано, что в стационарном случае без учета конвекции общее аналитическое решение может быть найдено без ограничений на параметры уравнения и выражается через эллиптическую функцию Вейерштрасса. Поскольку в общем случае данное решение имеет громоздкий вид, найдены ограничения на параметры, при которых оно имеет простой вид, и в явном виде построены соответствующие аналитические решения. Показано, что в нестационарном случае, как при учете конвекции, так и в случае её отсутствия, общее решение исследуемого уравнения может быть построено при некоторых ограничениях на параметры. С этой целью использованы недавно полученные критерии интегрируемости для уравнений типа Льева. Соответствующие общие аналитические решения исследуемого уравнения, выраженные через показательные или эллиптические функции, построены в явном виде.

Ключевые слова: аналитические решения, эллиптические функции, нелокальные преобразования, уравнения Льева

Для цитирования: Кудряшов Н. А., Синельщиков Д. И., "Аналитические решения нелинейного уравнения конвекции–диффузии с нелинейными источниками", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:3 (2016), 309–316.

Об авторах:

Кудряшов Николай Алексеевич, orcid.org/0000-0001-5926-9715, доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой, Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Каширское шоссе, 31, г. Москва, 115409 Россия, e-mail: nakudr@gmail.com

Синельщиков Дмитрий Игоревич, orcid.org/0000-0003-0993-219X, кандидат физ.-мат. наук, доцент Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Каширское шоссе, 31, г. Москва, 115409 Россия, e-mail: disinelshchikov@mephi.ru

Благодарности:

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-11-00258).

Введение

В работе рассматривается семейство нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$y_{zz} + \frac{m}{y} y_z^2 + (a_1 y^{n-m} + C_0 y^{-m}) y_z - a_2 y^{k-m} + a_3 y^{l-m} = 0, \quad (1)$$

где y и z – зависимая и независимые переменные соответственно, m, n, k, l – целые числа, $a_i, i = 1, 2, 3$ и C_0 – произвольные действительные параметры, при этом предполагается, что $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + C_0^2 \neq 0$.

Исследование уравнения (1) представляет интерес, поскольку оно возникает как редукция к переменным бегущей волны следующего семейства нелинейных уравнений в частных производных:

$$u_t = (u^m u_x)_x + a_1 u^n u_x - a_2 u^p + a_3 u^l, \quad (2)$$

где $u = u(x, t)$ – неизвестная функция. Уравнение (2) имеет приложения в биологии, теории нелинейной диффузии и теплопроводности. В частности, при $a_1 = 0$ уравнение (2) сводится к обобщенному уравнению Фишера (см. [1, 2]). При $a_1 \neq 0$ уравнение (2) можно рассматривать как нелинейное уравнение фильтрации с нелинейным источником и нелинейной конвекцией [3].

Уравнение (1) принадлежит к семейству обобщенных уравнений Льенара. Вопрос о построении аналитических решений для подобных уравнений рассматривался в ряде работ (см. [4–6]). Недавно в работах [7–10] был предложен новый подход к исследованию уравнений данного типа, основанный на использовании нелокальных преобразований, обобщающих преобразования Зундмана (см. [11, 12]):

$$w = F(y), \quad d\zeta = G(y)dz, \quad F_y G \neq 0. \quad (3)$$

Здесь w и ζ – новые зависимая и независимая переменные.

В соответствии с данным подходом исследуется связь, задаваемая преобразованиями (3), между уравнениями типа Льенара и уравнениями, для которых возможно построение общего аналитического решения в замкнутом виде. В качестве класса уравнений, для которых возможно построение общего аналитического решения, используются уравнения из классификации Пенлеве–Гамбье (см., например, [13, 14]). С помощью данного подхода в работах [7, 8] были найдены новые критерии интегрируемости для уравнений типа Льенара.

Целью данной работы является применение указанных выше критериев для построения общих аналитических решений уравнений из семейства (1). При этом представляется удобным рассмотреть два различных варианта уравнения (1): первый вариант соответствует отсутствию в (1) слагаемого, пропорционального первой производной (т.е. $a_1 = C_0 = 0$, что отвечает стационарному случаю без учета конвекции), второй вариант соответствует ненулевому коэффициенту при первой производной в уравнении (1) ($a_1^2 + C_0^2 \neq 0$). Будет показано, что в стационарном случае без учета конвекции (т.е. $a_1 = C_0 = 0$) общее решение уравнения (1) может быть получено без ограничений на его параметры. В случае $a_1^2 + C_0^2 \neq 0$ будет показано, что общее решение (1) может быть найдено при некоторых ограничениях на его параметры и будут найдены соответствующие формулы для решений.

1. Стационарный случай без учета конвекции

Рассмотрим стационарный случай уравнения (1) без учета конвекции. Полагая $a_1 = C_0 = 0$ в (1) имеем

$$y_{zz} + \frac{m}{y}y_z^2 - a_2y^{k-m} + a_3y^{l-m} = 0. \quad (4)$$

Отметим, что с помощью преобразований растяжения $z \rightarrow Az'$, $y \rightarrow By'$ коэффициенты при последних двух слагаемых в уравнении (4) могут быть выбраны произвольными, отличными от нуля числами. В дальнейшем в данном разделе без ограничения общности будем полагать, что $a_2 = a_3 = 1$.

Уравнение (4) принадлежит к классу уравнений Льева с квадратичной нелинейностью $y_{zz} + g(y)y_z^2 + h(y) = 0$. В работе [8] было показано, что любое уравнение данного класса может быть сведено к уравнению для эллиптических функций. Однако, применяя теорему 1 из работы [8], получим, что общее решение (1) для произвольных значений параметров имеет громоздкий вид. Поэтому представляет интерес применить теорему 2 из работы [8] и рассмотреть случай, когда преобразования (3) задаются степенными функциями. Это возможно при следующих ограничениях на параметры: $k = 2(m + l + 1)$ и $m = 2k - 3l - 1$.

Остановимся на случае $k = 2m + 2l + 2$. Тогда с помощью преобразований

$$w = y^{m+l+1}, \quad d\zeta = y^l dz, \quad (5)$$

уравнение (4) сводится к

$$w_{\zeta\zeta} + (m + l + 1)(1 - w^2) = 0. \quad (6)$$

Общее решение уравнения (6) имеет вид

$$w = \frac{6}{m + l + 1} \wp \left\{ \zeta - \zeta_0, \frac{(m + l + 1)^2}{3}, g_3 \right\}, \quad (7)$$

где $\wp$ — эллиптическая функция Вейерштрасса, ζ_0 , g_3 — произвольные постоянные.

Используя преобразования (5), приходим к общему решению уравнения (4) при $k = 2m + 2l + 2$

$$y = \left[\frac{6}{m + l + 1} \wp \left\{ \zeta - \zeta_0, \frac{(m + l + 1)^2}{3}, g_3 \right\} \right]^{\frac{1}{m+l+1}}, \quad z = \int y^{-l} d\zeta. \quad (8)$$

Рассмотрим случай $m = 2k - 3l - 1$. Тогда преобразования (3) принимают вид

$$w = y^{k-l}, \quad d\zeta = y^{2l-k} dz, \quad (9)$$

и (4) переходит в следующее уравнение:

$$w_{\zeta\zeta} + (k - l)w(a_3 - a_2w) = 0. \quad (10)$$

Общее решение уравнения (10) имеет вид

$$w = \frac{1}{2} + \frac{6}{k - l} \wp \left\{ \zeta - \zeta_0, \frac{(k - l)^2}{12}, g_3 \right\} \quad (11)$$

Тогда приходим к общему решению (4) при $m = 2k - 3l - 1$

$$y = \left[\frac{1}{2} + \frac{6}{k-l} \wp \left\{ \zeta - \zeta_0, \frac{(k-l)^2}{12}, g_3 \right\} \right]^{\frac{1}{k-l}}, \quad z = \int y^{k-2l} d\zeta, \quad (12)$$

где ζ_0, g_3 — произвольные постоянные.

В данном разделе показано, что общее решение уравнения (1) при $C_1 = a_1 = 0$ может быть получено без ограничений на его параметры, однако в общем случае данное решение имеет громоздкий вид. Найдены ограничения на параметры уравнения (1), при которых общее решение (1) для $C_1 = a_1 = 0$ имеет простой вид. Отметим, что из (8), (12) видно, что случаи $m + l + 1 = 0$ и $k - l = 0$ необходимо рассмотреть отдельно, что можно сделать аналогично выше рассмотренным примерам.

2. Общий случай уравнения (1)

В данном разделе будем предполагать, что хотя бы один из коэффициентов при первой производной в уравнении (1) не равен нулю, т.е. $a_1^2 + C_0^2 \neq 0$. Дальнейшие вычисления удобно разбить на три этапа: $a_1 = 0, C_0 \neq 0$, $a_1 \neq 0, C_0 = 0$ и $a_1 \neq 0, C_0 \neq 0$. Во всех случаях будем использовать критерии интегрируемости для уравнения типа Льенара, предложенные в работе [7]. Первый из них основан на исследовании связи между уравнениями типа Льенара и уравнением, общее решение которого выражается через одну из эллиптических функций Якоби. Вторым критерий, рассмотренный в работе [7], основан на линеаризации уравнения Льенара с помощью преобразований (3). Случай линеаризуемых уравнений рассмотрен также в работе [11].

Исследуем вопрос о линеаризации уравнения (1) с помощью преобразований (3). Сначала остановимся на случае $a_1 = 0$. Используя теорему 2 из работы [7], получим, что уравнение (1) может быть линеаризовано с помощью преобразований (3) при $k = 1 - m, l = -m$. Действительно, принимая во внимание данные ограничения и используя преобразования

$$F = -y + \frac{a_3}{a_2}, \quad d\zeta = C_0 y^{-m} dz, \quad (13)$$

из (1) получим

$$w_{\zeta\zeta} + w_{\zeta} - \frac{a_2}{C_0^2} w = 0. \quad (14)$$

Используя общее решение уравнения (14) и преобразования (13), находим общее решение уравнения (1) при $a_1 = 0, k = 1 - m$ и $l = -m$:

$$y = \frac{a_3}{a_2} - e^{-\zeta/2} \left[C_1 \exp \left\{ \frac{\sqrt{C_0^2 + 4a_2}}{2C_0} \zeta \right\} + C_2 \exp \left\{ -\frac{\sqrt{C_0^2 + 4a_2}}{2C_0} \zeta \right\} \right], \quad (15)$$

$$z = C_0 \int y^m d\zeta,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Отметим, что при $a_2 < -C_0^2/4$ для того, чтобы получить действительное решение, в формуле (15) необходимо взять линейную

комбинацию действительной и мнимой части от выражения, стоящего в квадратных скобках.

Рассмотрим случай $a_1 \neq 0$, $C_0 = 0$. Используя теорему 2 из работы [7], получим, что уравнение (1) может быть линеаризовано с помощью преобразований (3) при $k = 2(n - m) + 1$, $l = n - 2m$. Действительно, принимая во внимание данные ограничения и используя преобразования

$$F = \frac{1}{n+1} \left(y^{n+1} - \frac{a_3}{a_2} \right), \quad d\zeta = y^{n-m} dz, \quad (16)$$

из (1) получим

$$w_{\zeta\zeta} + a_1 w_{\zeta} - a_2(n+1)w = 0. \quad (17)$$

Используя общее решение уравнения (17) и преобразования (16), находим общее решение уравнения (1) при $C_0 = 0$, $k = 2(n - m) + 1$, $l = n - 2m$:

$$y = \left[(n+1)e^{-\frac{a_1}{2}\zeta} \left(C_3 \exp \left\{ \frac{\sqrt{a_1^2 + 4a_2(n+1)}}{2} \zeta \right\} + C_4 \exp \left\{ -\frac{\sqrt{a_1^2 + 4a_2(n+1)}}{2} \zeta \right\} \right) \right],$$

$$z = \int y^{m-n} d\zeta, \quad (18)$$

где C_3, C_4 — произвольные постоянные. Отметим, что при $a_2 < -a_1^2/(4(n+1))$ действительное решение выделяется аналогично случаю решения (15).

Рассмотрим случай $a_1 \neq 0$ и $C_0 \neq 0$. Тогда линеаризация с помощью преобразований (3) возможна только при $n = 0$ и $n = -2$. Случай $n = 0$ сводится к уже рассмотренному случаю $a_1 = 0$. Следовательно, необходимо рассмотреть случай $n = -2$. Тогда с помощью преобразований

$$F = -C_0 y + \frac{a_1}{y}, \quad d\zeta = y^{-m}(a_1 y^{-2} + C_0) dz \quad (19)$$

уравнение (1) при $n = -2$, $k = -m - 3$, $l = -m + 1$, $a_3 = C_0^2 a_2 / a_1^2$ сводится к

$$w_{\zeta\zeta} + w_{\zeta} + \frac{a_2}{a_1^2} w = 0. \quad (20)$$

Принимая во внимание общее решение (20), находим общее решение уравнения (1) при $n = -2$, $k = -m - 3$, $l = -m + 1$, $a_3 = C_0^2 a_2 / a_1^2$:

$$y = -\frac{w \pm \sqrt{w^2 + 4C_0 a_1}}{2C_0}, \quad w = e^{-\frac{\zeta}{2}} \left[C_5 \exp \left\{ \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2a_1} \zeta \right\} + C_6 \exp \left\{ -\frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2a_1} \zeta \right\} \right],$$

$$dz = \frac{y^{m+2}}{a_1 + C_0 y^2} d\zeta, \quad (21)$$

где C_5, C_6 — произвольные постоянные. Действительное решение при $a_2 > a_1^2/4$ выделяется аналогично предыдущим двум случаям. График решения (21) для некоторых значений параметров представлен на рис. 1.

Теперь воспользуемся другим критерием интегрируемости, найденным в работе [7]. Можно показать, что уравнение (1) удовлетворяет этому критерию лишь в

Рис. 1. Точное решение (21) уравнения (1), соответствующее следующим значениям параметров: а) $a_1 = a_2 = 1$, $C_0 = 2$, $C_5 = -3$, $C_6 = -1$, $m = 2$; б) $a_1 = 1$, $a_2 = 10$, $C_0 = 5$, $C_5 = C_6 = 1$, $m = 2$; в) $a_1 = 0.1$, $a_2 = 1$, $C_0 = 3$, $C_5 = 1$, $C_6 = -4$, $m = 2$

случаях $a_1 = 0, C_1 \neq 0$ и $a_1 \neq 0, C_1 = 0$. Рассмотрим первый из этих случаев, при этом без ограничения общности в обоих случаях заменим a_2 на $-a_2$ в (1). Тогда можно показать, что уравнение (1) при $k = 3 - m$, $l = 1 - m$ и $a_3 = 2C_0^2/9$ с помощью преобразований

$$w = \frac{3\sqrt{a_2}}{C_0}y, \quad d\zeta = \frac{C_0}{3}y^{-m}dz, \quad (22)$$

сводится к уравнению

$$w\zeta\zeta + 3w\zeta + w^3 + 2w = 0. \quad (23)$$

Используя (22) и общее решение уравнения (23) (см. [7]), приходим к общему решению уравнения (1) при $k = 3 - m$, $l = 1 - m$ и $a_3 = 2C_0^2/9$:

$$y = \frac{C_0}{3\sqrt{a_2}}e^{-(\zeta+\zeta_0)}\text{cn}\{e^{-(\zeta+\zeta_0)} - C_7, 1/\sqrt{2}\}, \quad z = \frac{3}{C_0} \int y^m d\zeta, \quad (24)$$

где cn — эллиптический синус, ζ_0 , C_7 — произвольные постоянные.

Рассмотрим случай $C_0 = 0$. Тогда при $k = 4n - m + 3$, $l = 2n - m + 1$ и $a_3 = 2a_1^2/(9(n+1))$ уравнение (1) с помощью преобразований

$$w = \frac{3\sqrt{a_1(n+1)}}{a_1}y^{n+1}, \quad d\zeta = \frac{a_1}{3}y^{n-m}dz, \quad (25)$$

можно преобразовать к уравнению (23). Используя общее решение уравнения (23) и преобразования (25), находим общее решение (1) при $k = 4n - m + 3$, $l = 2n - m + 1$ и $a_3 = 2a_1^2/(9(n+1))$

$$y = \left[\frac{a_1}{3\sqrt{a_2(n+1)}}e^{-(\zeta+\zeta_0)}\text{cn}\{e^{-(\zeta+\zeta_0)} - C_8, 1/\sqrt{2}\} \right]^{\frac{1}{n+1}}, \quad z = \frac{3}{a_1} \int y^{m-n} d\zeta, \quad (26)$$

где ζ_0 , C_8 — произвольные постоянные.

В данном разделе показано, что общее решение уравнения (1) при $a_1^2 + C_0^2 \neq 0$ может быть найдено при некоторых ограничениях на его параметры. Рассмотрено пять различных случаев, и для каждого из них найдено общее решение (1), выраженное либо через показательные, либо через эллиптические функции.

3. Заключение

В работе рассмотрено семейство нелинейных дифференциальных уравнений, являющееся редукцией к переменным бегущей волны для нелинейного уравнения конвекции–диффузии с полиномиальными источниками. Показано, что в стационарном случае без учета конвекции для данного уравнения общее решение можно построить без ограничений на его параметры. В общем случае найдены ограничения на параметры уравнения (1), при котором возможно построить его общее решение. Во всех случаях найдены соответствующие формулы для решений, выраженные через показательные и эллиптические функции.

Список литературы / References

- [1] J.D. Murray, *Mathematical Biology. I. An Introduction*, Springer-Verlag, Berlin, 2001, 556 pp.
- [2] N.A. Kudryashov, A.S. Zakharchenko, “A note on solutions of the generalized Fisher equation”, *Appl. Math. Lett.*, **32** (2014), 43–56
- [3] A.D. Polyanin, V.F. Zaitsev, *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton-London-New York, 2011, 112 pp.
- [4] M. Sabatini, “On the period function of $x'' + f(x)x'^2 + g(x) = 0$ ”, *J. Differ. Equ.*, **196** (2004), 151–168
- [5] V.K. Chandrasekar, M. Senthilvelan, M. Lakshmanan, “On the complete integrability and linearization of certain second-order nonlinear ordinary differential equations”, *Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci.*, **461** (2005), 2451–2476
- [6] A.K. Tiwari, S.N. Pandey, M. Senthilvelan, M. Lakshmanan, “Classification of Lie point symmetries for quadratic Lienard type equation $\ddot{x} + f(x)\dot{x}^2 + g(x) = 0$ ”, *J. Math. Phys.*, **54** (2013), 053506
- [7] N.A. Kudryashov, D.I. Sinelshchikov, “On the criteria for integrability of the Lienard equation”, *Appl. Math. Lett.*, **57** (2016), 114–120
- [8] N.A. Kudryashov, D.I. Sinelshchikov, “On the connection of the quadratic Lienard equation with an equation for the elliptic functions”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **20** (2015), 486–496
- [9] N.A. Kudryashov, D.I. Sinelshchikov, “Analytical solutions for problems of bubble dynamics”, *Phys. Lett. A*, **379** (2015), 798–802
- [10] N.A. Kudryashov, D.I. Sinelshchikov, “Analytical solutions of the Rayleigh equation for empty and gas-filled bubble”, *J. Phys. A Math. Theor.*, **47** (2014), 405202
- [11] W. Nakpim, S.V. Meleshko, “Linearization of Second-Order Ordinary Differential Equations by Generalized Sundman Transformations”, *Symmetry, Integr. Geom. Methods Appl.*, **6** (2010), 1–11
a
- [12] S. Moyo, S.V. Meleshko, “Application of the generalised Sundman transformation to the linearisation of two second-order ordinary differential equations”, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **12** (2011), 213–236
- [13] E.L. Ince, *Ordinary differential equations*, Dover, New York, 1956
- [14] E. Hille, *Ordinary Differential Equations in the Complex Domain*, Dover Publications, Mineola, 1997
- [15] E.T. Whittaker, G.N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1927

Kudryashov N. A., Sinelshchikov D. I., "Analytical Solutions of a Nonlinear Convection-Diffusion Equation With Polynomial Sources", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23:3** (2016), 309–316.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-3-309-316

Abstract. Nonlinear convection–diffusion equations are widely used for the description of various processes and phenomena in physics, mechanics and biology. In this work we consider a family of nonlinear ordinary differential equations which is a traveling wave reduction of a nonlinear convection–diffusion equation with a polynomial source. We study a question about integrability of this family of nonlinear ordinary differential equations. We consider both stationary and non–stationary cases of this equation with and without convection. In order to construct general analytical solutions of equations from this family we use an approach based on nonlocal transformations which generalize the Sundman transformations. We show that in the stationary case without convection the general analytical solution of the considered family of equations can be constructed without any constraints on its parameters and can be expressed via the Weierstrass elliptic function. Since in the general case this solution has a cumbersome form we find some correlations on the parameters which allow us to construct the general solution in the explicit form. We show that in the non–stationary case both with and without convection we can find a general analytical solution of the considered equation only imposing some correlation on the parameters. To this aim we use criteria for the integrability of the Liénard equation which have recently been obtained. We find explicit expressions in terms of exponential and elliptic functions for the corresponding analytical solutions.

Keywords: analytical solutions, elliptic function, nonlocal transformations, Liénard equations

On the authors:

Kudryashov Nikolay Alexeevich, orcid.org/0000-0001-5926-9715, Sci. Dr, Professor, Head of Department
National Research Nuclear University MEPhI, Kashirskoe shosse, 31, Moscow, 115409, Russia, e-mail: nakudr@gmail.com

Sinelshchikov Dmitry Igorevich, orcid.org/0000-0003-0993-219X, PhD, Associate Professor,
National Research Nuclear University MEPhI, Kashirskoe shosse, 31, Moscow, 115409, Russia,
e-mail: disinelshchikov@mephi.ru

Acknowledgments:

This research was supported by Russian Science Foundation grant No. 14–11–00258.