

©Литвинов К. В., 2016

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-3-326-333

УДК 517.9

Моделирование неізотермического течения аномально вязкой жидкости в каналах с различной геометрией границ

Литвинов К. В.

получена 22 марта 2016

Аннотация. В данной работе проведен анализ плоского неізотермического стационарного течения аномально вязкой жидкости в каналах с несимметричными граничными условиями и неизвестной границей выхода. Геометрия каналов, в которых рассматривается задача, – это такие области, которые при переходе в биполярную систему координат отображаются в прямоугольники. Это существенно упрощает граничные условия, т.к. появляется возможность использовать ортогональную сетку и граничные условия задаются в ее узлах. Области такого типа часто встречаются в прикладных задачах. Граничные условия задаются следующим образом: жидкость прилипает к границам каналов, которые вращаются с разной скоростью и имеют разный радиус и температуру; кроме того, известна температура при входе в область деформации, а на границе с поверхностью материал имеет температуру поверхности; давление на входе и выходе из области обращается в нуль. Реологическая модель учитывает только аномалию вязкости. Материал несжимаемый.

Данный процесс описывается системой, состоящей из уравнений неразрывности, уравнения сохранения импульса и уравнения энергии: $\nabla_i v^i = 0$, $\rho v^i \nabla_i v^i = -g^{ij} \nabla_i P + \nabla_i \tau^{ij}$, $\lambda \nabla^i \nabla_i T - \rho c_v v^i \nabla_i T + \tau^{ij} e_{ij} = 0$, свойства жидкости описываются реологическим уравнением: $P^{ij} = -g^{ij} P + \tau^{ij}$, $\tau^{ij} = \mu' e^{ij}$, где u, v – координаты скоростей движения среды, P – гидростатическое давление, T – температура, c_v – удельная теплоемкость, ρ – плотность, λ – теплопроводность, τ^{ij} – тензор вязких напряжений, P^{ij} – тензор напряжения, e^{ij} – тензор скоростей деформации, g^{ij} – метрический тензор.

В данной работе предложен алгоритм расчета неізотермического течения для произвольной непрерывной функции, описывающей кривую течения.

Ключевые слова: неізотермическое, аномально вязкая жидкость, уравнение неразрывности, уравнения сохранения импульса, уравнения энергии, реология

Для цитирования: Литвинов К. В., "Моделирование неізотермического течения аномально вязкой жидкости в каналах с различной геометрией границ", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23:3** (2016), 326–333.

Об авторе:

Литвинов Кирилл Владимирович, orcid.org/0000-0002-6475-8377, аспирант,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000 Россия, e-mail: k.v.litvinov@gmail.com

Введение

Рассматривается плоское неизотермическое стационарное течение anomalно вязкой жидкости в каналах. Геометрия каналов, в которых рассматривается задача, – это такие области, которые при переходе в биполярную систему координат отображаются в прямоугольники. Это существенно упрощает граничные условия, т.к. появляется возможность использовать ортогональную сетку и граничные условия задаются в ее узлах. Области такого типа часто встречаются в прикладных задачах.

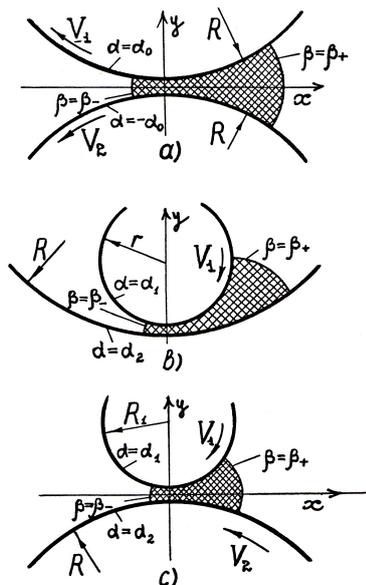


Рис. 1: Схемы областей деформации

Fig. 1: Deformation areas schemes

Граничные условия для областей, изображенных на рис. 1, задаются следующим образом: жидкость прилипает к границам каналов, которые вращаются с разной скоростью и имеют разный радиус и температуру; кроме того, известна температура при входе в область деформации, а на границе с поверхностью материал имеет температуру поверхности; давление на входе и выходе из области обращается в нуль.

Данный процесс описывается системой, состоящей из уравнений неразрывности, уравнения сохранения импульса и уравнения энергии [1]:

$$\nabla_i v^i = 0, \quad \rho v^i \nabla_i v^i = -g^{ij} \nabla_i P + \nabla_i \tau^{ij}, \quad (1)$$

$$\lambda \nabla^i \nabla_i T - \rho c_v v^i \nabla_i T + \tau^{ij} e_{ij} = 0, \quad (2)$$

свойства жидкости описываются реологическим уравнением:

$$P^{ij} = -g^{ij} P + \tau^{ij}, \quad \tau^{ij} = \mu' e^{ij}, \quad (3)$$

где u, v – координаты скоростей движения среды, P – гидростатическое давление, T – температура, c_v – удельная теплоемкость, ρ – плотность, λ – теплопроводность,

τ^{ij} – тензор вязких напряжений, P^{ij} – тензор напряжения, e^{ij} – тензор скоростей деформации, g^{ij} – метрический тензор.

В общем случае коэффициент μ' – функция трех первых инвариантов тензора скоростей деформации e^{ij} и параметров термодинамического состояния материала. Так как рассматривается плоская задача для несжимаемой жидкости, то первый и третий инварианты обращаются в нуль и коэффициент μ' является производной функцией только второго инварианта e^{ij} и температуры.

Существует много реологических моделей, учитывающих аномально вязкие свойства полимеров. В качестве примера использована наиболее употребляемая модель Освальда–де Виля, которая описывает поведение некоторых вязких материалов в довольно широком диапазоне скоростей сдвига [6], [7]:

$$\tau^{ij} = \mu(T) \frac{1}{2} I_2 |^{(\frac{1}{2}(n(T)-1))} e^{ij}. \quad (4)$$

В данной работе предложен алгоритм расчета неизотермического течения для произвольной непрерывной функции, описывающей кривую течения.

Основные результаты

Исходную систему запишем в биполярной системе координат. При этом координаты x и y декартовой системы связаны с α и β биполярной следующим образом:

$$x = \frac{a \sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, \quad y = \frac{a \operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}. \quad (5)$$

Составляющие метрического тензора имеют вид:

$$g_{\alpha\alpha} = g_{\beta\beta} = \frac{a^2}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^2} = h^2, \quad g_{\beta\alpha} = g_{\alpha\beta} = 0, \quad (6)$$

т.е. система ортогональна, h – коэффициент Ляме.

Величина a выражается через геометрические параметры процесса R_1 , R_2 и h_1 , h_2 ,

$$a = \sqrt{\frac{h_1(h_1+2R_1)+h_2(h_2+2R_2)}{2}}.$$

Пусть u и v – физические компоненты скорости, ортогональные соответственно α и β . Вычисляем символы Кристоффеля [8] биполярной системы координат, тогда уравнения (1), (2) имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(hv) + \frac{\partial}{\partial \beta}(hu) = 0, \quad (7)$$

$$\rho \left\{ (uh) \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{h} \right) + (vh) \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u}{h} \right) + h \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\left(\frac{u}{h} \right)^2 - \left(\frac{v}{h} \right)^2 \right] + 2h \frac{\partial h}{\partial \alpha} \frac{uv}{h^2} \right\} =$$

$$-\frac{\partial P}{\partial \beta} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \tau_\beta^\alpha + \frac{\partial}{\partial \beta} \tau_\beta^\beta + 2\tau_\beta^\alpha \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial \alpha} + (\tau_\beta^\beta - \tau_\alpha^\alpha) \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial \beta} \quad (8)$$

$$\frac{\lambda}{h^2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \beta^2} \right) - \frac{\rho c_v}{h} \left(v \frac{\partial T}{\partial \alpha} + u \frac{\partial T}{\partial \beta} \right) + \tau^{mn} e_{mn} = 0 \quad (9)$$

$$e_\alpha^\alpha = 2 \left(\frac{1}{h} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{u}{h^2} \frac{\partial h}{\partial \beta} \right), \quad e_\beta^\beta = 2 \left(\frac{1}{h} \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{v}{h^2} \frac{\partial h}{\partial \alpha} \right), \quad e_\beta^\alpha = e_\alpha^\beta = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{v}{h} \right) \quad (10)$$

Решение уравнений рассматривается в приближении, где расстояние между поверхностями много меньше области деформации. Далее введем малый параметр ε , равный отношению ширины области деформации к ее длине $\varepsilon = \frac{\alpha_1}{\beta}$.

Введем новые переменные $\xi = \frac{\beta}{\beta'}$, $\eta = \frac{\alpha}{\alpha'}$ и разложим обе компоненты скорости по степеням малого параметра ε .

$$u = V(u_0(\xi, \eta) + \varepsilon u_1(\xi, \eta) + \dots), \quad v = V(\varepsilon v_1(\xi, \eta) + \dots). \quad (11)$$

Параметр h удобно разложить по степеням отношения $\frac{(\text{ch } \alpha - 1)}{(1 - \cos \beta)}$, имеющего порядок ε^2

$$h = \frac{a}{1 - \cos \beta} \left(1 - \frac{\text{ch } \alpha - 1}{1 - \cos \beta} + \dots \right).$$

Подставляя (11) в (7) – (9) и пренебрегая членами порядка выше ε , получим

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (hv) + \frac{\partial}{\partial \beta} (hu) = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\mu_e \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u}{h} \right) \right]; \quad \frac{\partial P}{\partial \alpha} = 0 \quad (13)$$

$$0 = \frac{1}{h^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \alpha} \right) - \frac{\rho c_v}{h} \left(v \frac{\partial T}{\partial \alpha} + u \frac{\partial T}{\partial \beta} \right) + \left[\mu_e \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u}{h} \right) \right]^2 \quad (14)$$

$$\mu_e = \mu(I_2), \quad \mu_e = \mu_0(T) \left| \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u}{h} \right) \right|^{n(T)-1} \quad (15)$$

μ_0 , n , λ , c_v – функции температуры, следовательно, координаты α .

Решение системы (12) – (15) с симметричными граничными условиями и различными реологическими моделями известно [1], [2]. В данной работе рассматривается существенно несимметричный случай граничных условий, которые записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} T = T_1, \quad u = V_1, \quad v = 0 \quad (\alpha = \alpha_1), \quad T = T_2, \quad u = V_2 \quad (\alpha = \alpha_2); \\ P = 0, \quad T = T_0 \quad (\beta = \beta_+, \alpha_2 \leq \alpha \leq \alpha_1), \quad P = 0 \quad (\beta = \beta_-), \end{aligned} \quad (16)$$

где α_1 , α_2 – границы области по α (поверхность); β_+ , β_- – координаты входа и выхода из области деформации.

Система (12) – (15) с условиями (16) оказывается незамкнутой: не хватает условия для определения координаты выхода материала из области деформации, или, что то же самое, не хватает условия определения величины расхода, т.е. решается задача с неизвестной свободной границей выхода. Очевидно, что математическая

модель должна определять β_- или величину расхода материала независимым образом в ходе решения. Условие, позволяющее замкнуть систему (12) – (15), можно задать в виде

$$P = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial \beta} = 0. \quad (17)$$

На выходе из области деформации $\beta = \beta_-$. Это условие подразумевалось в ряде других исследований, в частности в [2], поскольку, при учете только аномалии вязкости, условие обращения в нуль градиента давления на выходе из области деформации равносильно предположению о существовании плоского фронта при условии, что отсутствует проскальзывание материала на поверхности. Таким образом, величина расхода определяется в виде $\int_{\alpha_2}^{\alpha_1} (hu) d\alpha = Q = h_*(\alpha_1 - \alpha_2)(V_1 + V_2)$, где h_* – значение h при $\beta = \beta_-$.

Получим еще одно уравнение $\int_{\beta_+}^{\beta_-} \frac{\partial P}{\partial \beta} d\beta = 0$, замыкающее исходную систему. В качестве первого приближения β_- берем из аналитического решения симметричной задачи [2]. Система (12) – (15) с граничными условиями (16) решается численными методами. Поскольку известно распределение температуры при входе в область деформации, проинтегрируем уравнение движения по α :

$$\alpha \frac{\partial P}{\partial \beta} = \mu_e \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u}{h} \right) + C(\beta), \quad (18)$$

где $C(\beta)$ – постоянная интегрирования, имеющая смысл напряжения сдвига при $\alpha = 0$.

Проинтегрировав (18) еще раз по α и определив вторую постоянную из граничных условий, получим систему уравнений (19), описывающих динамику течения, эквивалентную исходной системе уравнений (12) – (13):

$$\int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \int_{\alpha_2}^{\alpha} \left(t \frac{\partial P}{\partial \beta} - C(\beta) \right) \frac{1}{\mu_e(t)} dt d\alpha = \frac{1}{2h^2} (h_*(V_1 + V_2)(\alpha_1 - \alpha_2) - 2V_2(\alpha_1 - \alpha_2)h) \quad (19)$$

$$V_2 - V_1 = h^2 \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \left(t \frac{\partial P}{\partial \beta} - C(\beta) \right) \frac{1}{\mu_e(t)} dt$$

$$\int_{\beta_+}^{\beta_-} \frac{\partial P}{\partial \beta} d\beta = 0.$$

Уравнение теплопроводности останется без изменения. Алгоритм решения поставленной задачи представляет собой следующую схему. Область деформации разбивается двумерной сеткой с равномерным шагом по каждой из переменных с узлами α_i и β_j . В узлах этой сетки и будем искать решение системы. Уравнения (19) представляют собой систему нелинейных уравнений относительно $\frac{\partial P}{\partial \beta}$ и $C(\beta)$. Решения при каждом фиксированном β ищутся методом Бройдена [3], [4], [5]. Таким образом, послойно доходим до границы выхода β_- , проверяем выполнение условий (17) и возвращаемся в начало области деформации. Из решений вычисляются в узлах сетки обе компоненты скорости:

$$u(\alpha, \beta) = h \int_{\alpha_2}^{\alpha} \left[\left(t \frac{\partial P}{\partial \beta} - C(\beta) \right) \frac{1}{\mu(\alpha, \beta, T)} \right]^{m(T)} dt + V_2, \quad (20)$$

$$v(\alpha, \beta) = \frac{1}{h} \int_{\alpha_2}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} (hu) dt. \quad (21)$$

Тогда уравнение энергии для некоторого фиксированного $\beta (j = const)$ запишется следующим образом:

$$0 = \frac{\lambda}{h^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} + \frac{\rho c_v}{h} \left(v \frac{\partial T^j}{\partial \alpha} + u \frac{\partial T^j}{\partial \beta} \right) + \phi(u), \quad (22)$$

$$\left[\mu_e \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u}{h} \right) \right]^2 = \phi(u)$$

где $\phi(u)$ – функция диссипации. Оно так же решается численно, с помощью разностных схем. Но для точного решения уравнения (22) необходимо знать обе компоненты скорости на том же слое по β , где ищутся T .

Для решения этой задачи предполагается следующий алгоритм. С учетом распределения температуры при фиксированном $\beta (j = const)$ вычисляются u и v и функция диссипации. Затем по известному полю скоростей рассчитывается распределение температуры на следующем $(j + 1)$ -м слое. Иначе говоря, вместо решения уравнения (22) решается уравнение

$$0 = \frac{\lambda}{h^2} \frac{\partial^2 T^j}{\partial \alpha^2} + \frac{\rho c_v}{h} u^* \frac{T^j - T^{j-1}}{\Delta \beta} + v^* \frac{\partial T^j}{\partial \alpha} + \phi(u^*),$$

где

$$T^j = T(\alpha, \beta_+ + j \Delta \beta), \quad u^* = u(\alpha, \beta_+ + (j - 1) \Delta \beta), \quad v^* = v(\alpha, \beta_+ + (j - 1) \Delta \beta).$$

Уравнение (22) представляет собой обыкновенное линейное дифференциальное уравнение относительно $T^j(\alpha)$, где $\phi(u)$ – функция диссипации. Его можно решить любыми численными методами достаточно точно.

На рисунках 2 и 3 приведены примеры полученных полей температур при $T_1 = T_0 = 40^\circ C$, $T_2 = 60^\circ C$, $R1 = 30$, $R2 = 20$, $V1 = 38$, $V2 = 45$, $\beta_+ = 0.64$. Из них видно, что расстояние между цилиндрами существенно меняет поле температур. Если расстояние мало, то пограничные области, где наблюдаются локальные приросты температур, сближаются и температура среды близка к средней температуре. На рисунке 3 видно, что максимальные локальные приросты температуры наблюдаются вблизи более холодного цилиндра.

Данная модель позволяет рассчитывать поле скоростей, поле температур, давление в области деформации и затрачиваемую мощность, что представляет существенный интерес для приложений.

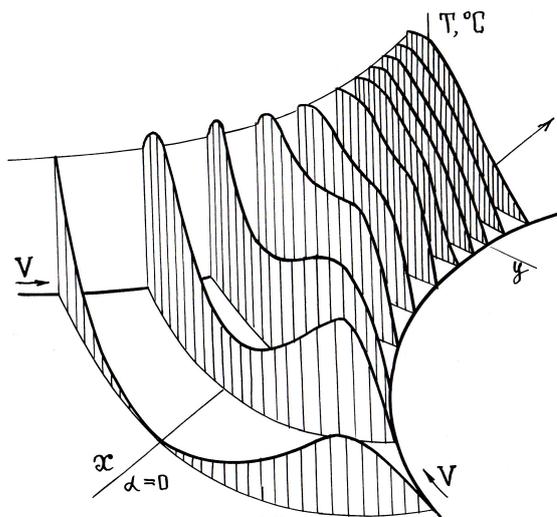


Рис. 2: Распределение температуры в области деформации ($h_1 + h_2 = 0.01$).

Fig. 2: The distribution of a temperature in deformation region ($h_1 + h_2 = 0.01$).

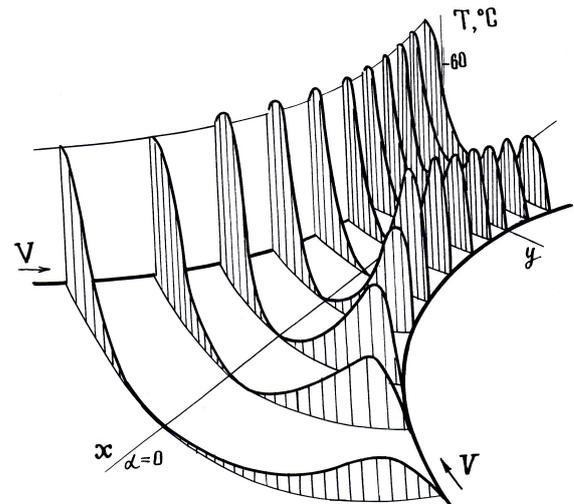


Рис. 3: Распределение температуры в области деформации ($h_1 + h_2 = 0.1$).

Fig. 3: The distribution of a temperature in deformation region ($h_1 + h_2 = 0.1$).

Список литературы / References

- [1] Милдман С., “Течение полимеров”, *Мир*, 1971; [Mildman S., “Techenie polimerov”, *Mir*, 1971, (in Russian).]
- [2] Белкин Н. Г., Литвинов В. В., Петрушанский В. Ю., “Механика жидкости и газа”, *Известия академии наук СССР*, 1976; [Belkin N. G., Litvinov V. V., Petrushanskiy V. Yu., “Mekhanika zhidkosti i gaza”, *Izvestiya akademii nauk SSSR*, 1976, (in Russian).]
- [3] Van de Rotten B., *A limited memory Broyden method to solve high-dimensional systems of nonlinear equations*, University of Leiden, 2003.
- [4] Broyden C. G., “On infinite soluble groups”, *Math. Comp.*, **19** (1965), 577–593.
- [5] Kvaalen, Eric, “A faster Broyden method”, *BIT Numerical Mathematics (SIAM)*, **31** (1991), 369–372.
- [6] Виноградов Г. В., Малкин А. Я., “Реология полимеров”, *Химия*, 1977, 440; [Vinogradov G. V., Malkin A. Ya., “Reologiya polimerov”, *Khimiya*, 1977, 440, (in Russian).]
- [7] Малкин А. Я., Исаев А. И., “Реология. Концепции, методы, приложения”, *Профессия*, 2007, 560; [Malkin A. Ya., Isaev A. I., “Reologiya kontseptsii, metody, prilozheniya”, *Professiya*, 2007, 560, (in Russian).]
- [8] Сокольников И. С., “Тензорный анализ”, *Наука*, 1971, 376; [Sokolnikoff I. S., “Tensor analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua”, 1951]

Litvinov K. V., "Modelling of Non-isothermal Flow Abnormally Viscous Fluid in the Channels with Various Geometry of Boundaries", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23:3** (2016), 326–333.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-3-326-333

Abstract. In this paper, we analyzed the flat non-isothermal stationary flow of abnormally viscous fluid in the channels with asymmetric boundary conditions and an unknown output boundary. The geometry of the channels in which the problem is considered, is such regions, that at the transition to bipolar a system of coordinates map into rectangles. This greatly simplifies the boundary conditions, since it is possible to use an orthogonal grid and boundary conditions are given in its nodes. Fields of this type are often found in applications.

The boundary conditions are set as follows: the liquid sticks to the boundaries of the channels, which rotate at different speeds and have different radius and temperature; moreover, temperature at the entrance to deformation is known, while on the boundary with the surface the material has the surface temperature; the pressure on the enter and exit of the region becomes zero. The rheological model only takes into account the anomaly of viscosity. The material is not compressible.

This process can be described by a system consisting of continuity equations, the equations of conservation of momentum and an energy equation: $\nabla_i v^i = 0$, $\rho v^i \nabla_i v^i = -g^{ij} \nabla_i P + \nabla_i \tau^{ij} + \lambda \nabla^i \nabla_i T - \rho c_v v^i \nabla_i T + \tau^{ij} e_{ij} = 0$, rheological properties of the liquid are described by the equation: $P^{ij} = -g^{ij} P + \tau^{ij}$, $\tau^{ij} = \mu' e^{ij}$ where u, v - coordinates of environmental speeds, P - the hydrostatic pressure, T - temperature, c_v - specific heat, ρ - density, λ - thermal conductivity, τ^{ij} - a viscous stress tensor, P^{ij} - a stress tensor, e^{ij} - a rate of the deformation tensor, g^{ij} - the metric tensor.

In this paper, we propose an algorithm for calculating a non-isothermal flow for an arbitrary continuous function that describes the flow curve.

Keywords: non-isothermal, abnormally viscous fluid, continuity equation, momentum equation, energy equation, rheology

On the author:

Litvinov Kirill Vladimirovich, orcid.org/0000-0002-6475-8377, graduate student, P.G. Demidov Yaroslavl State University, Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia, e-mail: k.v.litvinov@gmail.com