

УДК 519.6

Об одной нестационарной задаче маршрутизации с ограничениями

Ченцов А.Г., Ченцов П.А.¹

Институт математики и механики УрО РАН

e-mail: chentsov@imm.uran.ru, chentsov.p@mail.ru

получена 4 марта 2012

Ключевые слова: маршрут, трасса, динамическое программирование, условия предшествования

Исследуется экстремальная задача маршрутизации перемещений при ограничениях в виде условий предшествования. Предполагается, что исполнитель покидает начальный пункт (базу), после чего посещает систему мегаполисов (конечных целевых множеств), на каждом из которых выполняет некоторую работу. Функции стоимости внешних перемещений и (внутренних) работ зависят от "момента посещения", который может отвечать фактическому времени, а может соответствовать естественной очередности (первое посещение, второе, третье и т. д.). Построены экономичный вариант широко понимаемого метода динамического программирования (МДП) и, на его основе, оптимальный алгоритм, реализованный на ПЭВМ. Предложен вариант жадного алгоритма.

1. Содержательная постановка задачи

Рассмотрим систему мегаполисов $M_1, \dots, M_N$, где N – натуральное число, $N \geq 2$; каждый мегаполис M_j есть непустое конечное подмножество (п/м) заданного множества X . Задана база $x^o \in X$, для которой $x^o \notin M_1, \dots, x^o \notin M_N$. Полагаем также, что $M_i \cap M_j = \emptyset$ при $i \neq j$ (итак, дана система "островов" и точка, не лежащая на "островах"). Требуется организовать перемещения

$$x^o \rightarrow (x_1^{(1)} \in M_{\alpha(1)} \rightsquigarrow x_2^{(1)} \in M_{\alpha(1)}) \rightarrow \dots \rightarrow (x_1^{(N)} \in M_{\alpha(N)} \rightsquigarrow x_2^{(N)} \in M_{\alpha(N)}), \quad (1)$$

где α – перестановка индексов $1, \dots, N$. В (1) прямые стрелки отвечают внешним перемещениям, а волнистые – внутренним работам, выполняемым в пределах мегаполисов. Требуется выбрать $\alpha, (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}), \dots, (x_1^{(N)}, x_2^{(N)})$ из соображений минимизации аддитивного критерия качества (сумма стоимостей). На выбор α накладываются дополнительные ограничения. В этой связи допустим сейчас (позднее будет выбрана несколько более общая форма), что заданы два набора индексов из

¹Работа поддержана грантами РФФИ №10-01-96020, №10-08-00484, №11-01-90432-укр_ф_а

$\overline{1, N} : (p_1, \dots, p_n)$ и $(q_1, \dots, q_n)$, где n – натуральное число; упорядоченные пары (УП) $(p_1, q_1), \dots, (p_n, q_n)$ называем адресными. Первый элемент адресной УП называем отправителем (груза, сообщения), а второй – получателем. Перестановка α , именуемая далее маршрутом, полагается допустимой, если мегаполисы с индексами в виде компонент адресных УП посещаются всякий раз в направлении от отправителя к получателю:

$$M_{p_1} \rightarrow M_{q_1}, \dots, M_{p_n} \rightarrow M_{q_n}, \quad (2)$$

при этом для каждого перемещения в (2) допускается возможность посещения каких-то других мегаполисов "по пути"; например $M_{p_1} \rightarrow M_j \rightarrow M_{q_1}$, где j – какой-то индекс, $j \neq p_1, j \neq q_1$. Посещение M_j (см. последнюю цепочку) может быть связано с экономической целесообразностью. Итак, нам требуется реализовать (1) при ограничениях на выбор α , формируемых на основе (2) и называемых условиями предшествования. Добавляя к допустимому маршруту α кортеж УП $((x_1^{(1)}, x_2^{(1)}), \dots, (x_1^{(N)}, x_2^{(N)}))$, мы получаем решение в виде пары маршрут-трасса. Каждое такое решение будет оцениваться числовым значением, в результате чего реализуется критерий, полагемый далее аддитивным. Мы исследуем далее задачу минимизации данного критерия; вопросы такого рода рассматривались в [1]–[6] (и в ряде других работ). Базой упомянутых исследований являются конструкции [7].

В настоящей работе имеется, однако, особенность, восходящая к [8]: мы рассматриваем постановку, в которой функции стоимости могут изменяться в процессе развития дискретного процесса, отвечающего (1). Здесь можно полагать условно, что посещение $M_{\alpha(1)}$ и работы на $M_{\alpha(1)}$ "привязаны" к моменту $t = 1$, посещение $M_{\alpha(2)}$ и работы на $M_{\alpha(2)}$ "привязаны" к моменту $t = 2$ и т. д. Мы допускаем, что стоимости (одних и тех же) перемещений и внутренних работ изменяются с изменением t . В этом смысле рассматриваемую далее задачу можно считать нестационарной, что отличает её от [1] – [6]. Впрочем, интерпретация t как времени может быть весьма условной, хотя в каких-то случаях можно связывать с параметром t те или иные временные промежутки, отводимые на выполнение соответствующего задания (при $t = 1$ – задания на посещение и обслуживание $M_{\alpha(1)}$, при $t = 2$ – аналогичного задания, связанного с $M_{\alpha(2)}$, и т. д.; сами значения $\alpha(1), \alpha(2), \dots, \alpha(N)$ являются при этом объектами нашего выбора, а вот условия выполнения этих заданий зависят от $t, t = 1, t = 2, \dots, t = N$).

Возможна и другая интерпретация, которую можно связать со следующей гипотетической схемой. Этапы, составляющие процесс (1), можно связать с обслуживанием "клиентов" $K_1, K_2, \dots, K_N$ в очередности α : $K_{\alpha(1)}$ обслуживается первым, $K_{\alpha(2)}$ – вторым и т. д. У "клиентов", однако, могут быть какие-то предпочтения в части выбора "номера в очереди" (простейший вариант – все "клиенты" хотят быть первыми). Тогда "клиент" $K_{\alpha(l)}$ сопоставляет $\alpha(l)$ и "момент" $t = l$, имея некоторые свои приоритеты. В ситуации, когда взаимное "расположение" $\alpha(l)$ и t устраивает этого "клиента", он компенсирует часть затрат исполнителя на перемещение к мегаполису $M_{\alpha(l)}$ и выполнение внутренних работ в пределах этого мегаполиса. В противном случае "клиент" может налагать некоторый "штраф", что невыгодно исполнителю. Всё это, в частности, может осуществляться подобно [8] посредством соответствующих коэффициентов дисконтирования. Исполнитель,

будучи обязанным соблюдать ограничения (условия предшествования), не может зачастую в полной мере удовлетворять пожелания "клиентов" ; он, попадая в противоречивую ситуацию, минимизирует сумму потерь, допуская, возможно, на каких-то этапах появление "штрафов".

2. Математическая постановка задачи

Прежде всего введём сводку обозначений общего характера, используя кванторы и пропозициональные связки; через $\triangleq$ обозначаем равенство по определению, $\emptyset$ – пустое множество. Семейством называем множество, все элементы которого – множества. Каждое множество является объектом.

Если x и y – объекты, то $\{x; y\}$ – множество, содержащее x , y и не содержащее никаких других элементов. В качестве x и y могут использоваться множества. Если a и b – объекты, то $(a, b) \triangleq \{\{a\}; \{a; b\}\}$ [9, с. 67] есть УП с первым элементом a и вторым элементом b . Тогда для всякого объекта z в виде $\{z\} \triangleq \{z; z\}$ имеем одноэлементное множество, содержащее z . Если h есть УП, то через $\text{pr}_1(h)$ и $\text{pr}_2(h)$ обозначаем первый и второй элементы h ; при этом $h = (\text{pr}_1(h), \text{pr}_2(h))$. Данный приём "расщепления" УП на элементы широко используется в дальнейшем. Очевидным образом триплеты определяются в терминах УП: если a, b и c – объекты, то $(a, b, c) \triangleq ((a, b), c)$. Соответственно для любых множеств X, Y и Z имеем $X \times Y \times Z \triangleq (X \times Y) \times Z$; см. [10, с. 17].

Если S – множество, то через $\text{Fin}(S)$ обозначаем семейство всех непустых конечных подмножеств (п/м) S .

Если A и B – множества, $h : A \rightarrow B$ и C – непустое п/м A , то через $(h|C)$ обозначаем сужение h на множество C :

$$(h|C) : C \rightarrow B$$

и при этом $(h|C)(x) \triangleq h(x) \quad \forall x \in C$. В дальнейшем $\mathbb{R}$ – вещественная прямая, $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \dots\}$, $\mathbb{N}_o \triangleq \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0\} \cup \{1; 2; \dots\}$ и

$$\overline{k, l} \triangleq \{i \in \mathbb{N}_o \mid (k \leq i) \& (i \leq l)\} \quad \forall k \in \mathbb{N}_o \quad \forall l \in \mathbb{N}_o. \quad (3)$$

В (3) допускается реализация $\emptyset$; так, например, $\overline{1, 0} = \emptyset$. Условимся о соглашении: для всякого множества S через $\mathcal{R}_+[S]$ обозначаем множество всех функций из S в полупрямую $[0, \infty[\triangleq \{\xi \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \xi\}$.

Если K – непустое конечное множество, то через $|K|$ обозначаем количество элементов K ; $|K| \in \mathbb{N}$. Кроме того, через $(\text{bi})[K]$ обозначаем множество всех биекций [11, с. 20] "отрезка" $1, |K|$ на K (элементы $(\text{bi})[K]$ суть всевозможные способы нумерации элементов K числами $1, \dots, |K|$; имеются в виду нумерации без повторов). Напомним здесь же, что перестановкой непустого множества A называется [11, с. 87] всякая биекция A на себя; для наших целей достаточны перестановки множеств $\overline{1, m} \in \text{Fin}(\mathbb{N})$, $m \in \mathbb{N}$, исполняющие роль маршрутов.

Напомним, что X – множество, $N \in \mathbb{N}$, $2 \leq N$, $M_1 \in \text{Fin}(X), \dots, M_N \in \text{Fin}(X)$ и $x^o \in X$; при этом

$$\left(x^o \notin \bigcup_{i=1}^N M_i\right) \& (M_p \cap M_q = \emptyset \quad \forall p \in \overline{1, N} \quad \forall q \in \overline{1, N} \setminus \{p\}).$$

Удобно ввести достаточное для всех наших целей конечное п/м X в виде

$$\mathbf{X} \triangleq \{x^o\} \cup \left(\bigcup_{i=1}^N M_i\right) \in \text{Fin}(X). \quad (4)$$

С учётом (4) можно полагать, что каждая система перемещений (1) развёртывается в $\mathbf{X}$. Мы уточним ниже возможные варианты перемещений (1). Сейчас полагаем $\mathbb{P} \triangleq (\text{bi})[\overline{1, N}]$, получая множество всех маршрутов; при $\alpha \in \mathbb{P}$ через α^{-1} обозначаем перестановку в $\mathbb{P}$, обратную к α :

$$\alpha^{-1} \in \mathbb{P} : \alpha^{-1}(\alpha(k)) = \alpha(\alpha^{-1}(k)) = k \quad \forall k \in \overline{1, N}.$$

Условия предшествования. Фиксируем множество $\mathbf{K}$, для которого $\mathbf{K} \subset \overline{1, N} \times \overline{1, N}$. Элементы $\mathbf{K}$ (а это УП) называем адресными парами. Если $z \in \mathbf{K}$, то индекс $\text{pr}_1(z)$ именуем отправителем, а индекс $\text{pr}_2(z)$ – получателем (груза, сообщения, ...). В терминах адресных пар определяется допустимость маршрутов из $\mathbb{P}$ по предшествованию: отправитель каждой адресной пары должен "посещаться" раньше получателя (имеется в виду посещение мегаполисов с индексами отправителя и получателя соответственно). Тогда [7, часть 2]

$$\mathbb{A} \triangleq \{\alpha \in \mathbb{P} \mid \alpha^{-1}(\text{pr}_1(z)) < \alpha^{-1}(\text{pr}_2(z)) \quad \forall z \in \mathbf{K}\} \quad (5)$$

есть множество всех маршрутов, допустимых по предшествованию. Мы полагаем в дальнейшем выполненным следующее

Условие 1. Для всякого непустого множества $\mathbf{K}_o$, $\mathbf{K}_o \subset \mathbf{K}$, непременно $\exists z^o \in \mathbf{K}_o : \text{pr}_1(z^o) \neq \text{pr}_2(z) \quad \forall z \in \mathbf{K}_o$.

Из условия 1 вытекает, что для всякой адресной пары её отправитель и получатель различны. Кроме того (и это особенно важно), в [7, часть 2] установлено, что $\mathbb{A} \neq \emptyset$ (см. [7, (2.2.53)]): допустимые по предшествованию маршруты существуют.

Функции стоимости. Фиксируем три типа функций стоимости: стоимости внешних перемещений, внутренних работ и терминального (финального) состояния. Стоимости внешних перемещений задаются в виде

$$\mathbf{c}_1 \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X} \times M_1 \times \overline{1, N}], \dots, \mathbf{c}_N \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X} \times M_N \times \overline{1, N}]. \quad (6)$$

Содержательный смысл (6) состоит в следующем: если $j \in \overline{1, N}$, $x \in \mathbf{X}$, $y \in M_j$ и $t \in \overline{1, N}$, то число $\mathbf{c}_j(x, y, t) \in [0, \infty[$ определяет стоимость перемещения из x в y , завершаемого "в момент" t (мы не исключаем здесь случай $x \in M_j$; однако при использовании (6) для оценивания траекторий в (1) этот случай исключается естественным образом).

Стоимости внутренних работ, выполняемых в пределах мегаполисов, суть функции

$$c_1 \in \mathcal{R}_+[M_1 \times M_1 \times \overline{1, N}], \dots, c_N \in \mathcal{R}_+[M_N \times M_N \times \overline{1, N}]. \quad (7)$$

Если $j \in \overline{1, N}$, $x \in M_j$, $y \in M_j$ и $t \in \overline{1, N}$, то $c_j(x, y, t) \in [0, \infty[$ есть стоимость работ, выполняемых исполнителем в мегаполисе M_j при его посещении "в момент" t , где x есть пункт прибытия в мегаполис M_j , а y – пункт отправления. Разумеется, выполнение работ в один "момент" следует рассматривать как идеализацию; в действительности же момент t "расползается" на (нижнем) уровне внутренних работ в тот или иной промежуток реального времени, на котором, однако, можно применять значение $c_j(x, y, t)$ для целей оценивания упомянутых работ. Упомянутая идеализация важна для постановки задачи верхнего уровня (иерархической схемы), связанной с осуществлением внешних перемещений. В этой связи полезно отметить, учитывая аддитивность способа агрегирования затрат, то, что рассматриваемая ниже модель пригодна для задач с весьма различными внутренними работами, поскольку без потери качества на этапах внутренних работ можно ограничиться оптимальными режимами их выполнения при соответствующей фиксации пунктов прибытия и отправления (точки x и y), а это соображение позволяет в качестве $c_j(x, y, t)$ использовать всякий раз экстремум задачи на минимум внутренних работ, что вполне достаточно для задачи верхнего уровня, целью решения которой является (см. (1)), наряду с определением экстремума и оптимального маршрута, построение трассы, т. е. системы пунктов прибытия и отправления. После построения трассы на каждом этапе уже нетрудно "соединить" пункт прибытия и пункт отправления "местной" траекторией, отвечающей оптимальному выполнению внутренних работ.

Отметим, что функции (6), (7) могут рассматриваться как объёмные матрицы (см. (4)). Наконец, мы полагаем заданным отображение $f \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X} \setminus \{x^o\}]$ (см. (4)), значения которого оценивают терминальное состояние процесса (элемент $x_2^{(N)}$ в (1)). Такое оценивание может быть полезным, например, в случае, когда в исходной содержательной задаче требуется после посещения всех мегаполисов прибыть в некоторый фиксированный пункт (в частности, на базу), что также сопровождается затратами. Последние могут быть легко учтены посредством f .

Трассы перемещений. Множество всех кортежей $(z_i)_{i \in \overline{0, N}} : \overline{0, N} \rightarrow \mathbf{X} \times \mathbf{X}$ обозначаем далее через $\mathbf{Z}$. Если же $\alpha \in \mathbb{A}$, то через $\mathcal{Z}_\alpha$ обозначаем множество всех $(z_i)_{i \in \overline{0, N}} \in \mathbf{Z}$, для которых

$$(z_o = (x^o, x^o)) \ \& \ (z_j \in M_{\alpha(j)} \times M_{\alpha(j)} \ \forall j \in \overline{1, N}). \quad (8)$$

В (8) формализуются возможные процессы (1) в случае, когда фиксирован допустимый маршрут (несущественная особенность касается только начального состояния: в (8) оно определяется в виде УП). Ясно, что $\mathcal{Z}_\alpha \in \text{Fin}(\mathbf{Z}) \ \forall \alpha \in \mathbb{A}$. Мы рассматриваем в качестве допустимых решений всевозможные пары

$$(\alpha, (z_i)_{i \in \overline{0, N}}), \alpha \in \mathbb{A}, (z_i)_{i \in \overline{0, N}} \in \mathcal{Z}_\alpha.$$

Каждое такое решение оценивается суммой затрат на внешние перемещения и внут-

рение работы; с этой целью определяем

$$\Pi(\alpha, (z_i)_{i \in \overline{0, N}}) \triangleq \sum_{t=1}^N c_{\alpha(t)}(\text{pr}_2(z_{t-1}), \text{pr}_1(z_t), t) + \sum_{t=1}^N c_{\alpha(t)}(z_t, t) + f(\text{pr}_2(z_N)) \in [0, \infty[\quad \forall \alpha \in \mathbb{A} \quad \forall (z_i)_{i \in \overline{0, N}} \in \mathbf{Z}. \quad (9)$$

Разумеется, в (9) можно использовать трассы, определяемые в (8), в результате чего приходим к следующей основной задаче маршрутизации (ОЗМ)

$$\Pi(\alpha, (z_i)_{i \in \overline{0, N}}) \longrightarrow \min, \quad \alpha \in \mathbb{A}, \quad (z_i)_{i \in \overline{0, N}} \in \mathcal{Z}_{\alpha}. \quad (10)$$

Ограничения ОЗМ (10) совместны; определено значение ОЗМ (экстремум)

$$V \triangleq \min_{\alpha \in \mathbb{A}} \min_{(z_i)_{i \in \overline{0, N}} \in \mathcal{Z}_{\alpha}} \Pi(\alpha, (z_i)_{i \in \overline{0, N}}) \in [0, \infty[\quad (11)$$

и непустое множество (оптимальных) решений $(\alpha^o, (z_i^o)_{i \in \overline{0, N}})$, $\alpha^o \in \mathbb{A}$, $(z_i^o)_{i \in \overline{0, N}} \in \mathcal{Z}_{\alpha^o}$, для которых $\Pi(\alpha^o, (z_i^o)_{i \in \overline{0, N}}) = V$. Наша цель – найти V и какое-либо из оптимальных решений ОЗМ. Эту цель может реализовать точный алгоритм. Если же говорить об эвристических алгоритмах, то наша цель скромнее: построить какое-либо решение $(\alpha^*, (z_i^*)_{i \in \overline{0, N}})$, $\alpha^* \in \mathbb{A}$, $(z_i^*)_{i \in \overline{0, N}} \in \mathcal{Z}_{\alpha^*}$, реализующее в некотором смысле идею локальной оптимизации критерия. Итак, постулируя принцип соблюдения ограничений, мы добавляем в каком-то виде соображения, связанные с оптимизацией (например, можно говорить о построении жадного алгоритма).

3. Расширение основной задачи

В настоящем разделе мы рассматриваем вопрос о конструировании "частичных" или укороченных (в сравнении с (10)) задач маршрутизации, ориентируясь в конце концов на построение требуемого варианта МДП. Для этого, следуя [1] – [7], мы введём сначала некоторое преобразование системы ограничений, что позволит, кроме того, указать путь к построению эффективных эвристических алгоритмов, осуществляющих локальную оптимизацию при соблюдении полной системы ограничений.

Через $\mathbf{N}$ (через $\mathfrak{N}$) обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м $\overline{1, N}$. Множества из $\mathfrak{N}$ (т. е. непустые п/м $\overline{1, N}$) условимся называть списками заданий или просто списками. Если фиксирован список $K \in \mathfrak{N}$, то

$$\Xi[K] \triangleq \{z \in \mathbf{K} \mid (\text{pr}_1(z) \in K) \& (\text{pr}_2(z) \in K)\} \quad (12)$$

есть множество всех адресных пар, укладывающихся "полностью" в список K ; для таких адресных пар можно "собрать в множество" всех получателей и удалить их из K . Тем самым задаётся правило вычеркивания [7, часть 2]: отображение $\mathbf{I} : \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{N}$ определяем условием

$$\mathbf{I}(K) \triangleq K \setminus \{\text{pr}_2(z) : z \in \Xi[K]\} \quad \forall K \in \mathfrak{N}. \quad (13)$$

Правило вычеркивания **I** приводит к новому типу допустимости маршрутов, включая маршруты частичные: если $K \in \mathfrak{N}$, то

$$(\mathbf{I} - \text{bi})[K] \triangleq \{\alpha \in (\text{bi})[K] \mid \alpha(m) \in \mathbf{I}(\{\alpha(i) : i \in \overline{m, |K|}\}) \quad \forall m \in \overline{1, |K|}\}; \quad (14)$$

в (14) речь идёт о способах нумерации индексов из K , причём рассматриваются способы, согласованные с **I**. Разумеется, (14) можно использовать при $K = \overline{1, N}$. Тогда [7, часть 2]

$$\mathbb{A} = (\mathbf{I} - \text{bi})[\overline{1, N}] = \{\alpha \in \mathbb{P} \mid \alpha(m) \in \mathbf{I}(\{\alpha(i) : i \in \overline{m, N}\}) \quad \forall m \in \overline{1, N}\}. \quad (15)$$

В связи с (15) отметим очевидное свойство, легко следующее из определения множества $\mathbb{P}$ (см. раздел 2): если $\alpha \in \mathbb{P}$ и $m \in \overline{1, N}$, то

$$\{\alpha(i) : i \in \overline{m, N}\} = \overline{1, N} \setminus \{\alpha(i) : i \in \overline{1, m-1}\}$$

(следствие сюръективности α). Поэтому с учётом (15) получаем равенство

$$\mathbb{A} = \{\alpha \in \mathbb{P} \mid \alpha(m) \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\alpha(i) : i \in \overline{1, m-1}\}) \quad \forall m \in \overline{1, N}\}. \quad (16)$$

Замечание 3.1. Отметим, что $\overline{1, m-1} = \emptyset$ при $m = 1$. Поэтому, если $\alpha \in \mathbb{P}$ построено на основе следующей рекуррентной процедуры

$$(\alpha(1) \in \mathbf{I}(\overline{1, N})) \& (\alpha(m) \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\alpha(i) : i \in \overline{1, m-1}\})) \quad \forall m \in \overline{2, N} \quad (17)$$

(реализуемой правилом вычеркивания), то согласно (16) $\alpha \in \mathbb{A}$, т. е. α – допустимый маршрут. Если в дополнение к (17) мы осуществляем параллельно с "выращиванием" α последовательный выбор УП

$$z_1 \in M_{\alpha(1)} \times M_{\alpha(1)}, \dots, z_N \in M_{\alpha(N)} \times M_{\alpha(N)}, \quad (18)$$

то, полагая $z_0 \triangleq (x^0, x^0)$ мы в виде кортежа $(z_i)_{i \in \overline{0, N}}$ получим также трассу из множества $\mathcal{Z}_\alpha$. Таким образом будет построено какое-то допустимое решение в виде пары $(\alpha, (z_i)_{i \in \overline{0, N}})$. Заметим, что последовательный выбор УП

$$(\alpha(1), z_1), \dots, (\alpha(N), z_N)$$

можно подчинить какому-то принципу, нацеленному на минимизацию критерия ОЗМ (10). В частности, это может отвечать идее построения жадного алгоритма: полагаем $z_0 \triangleq (x^0, x^0)$, $(\alpha(1), z_1)$, $\alpha(1) \in \mathbf{I}(\overline{1, N})$, $z_1 \in M_{\alpha(1)} \times M_{\alpha(1)}$, выбираем из условия

$$\mathbf{c}_{\alpha(1)}(x^0, \text{pr}_1(z_1), 1) + c_{\alpha(1)}(z_1, 1) = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1, N})} \min_{z \in M_j \times M_j} [\mathbf{c}_j(x^0, \text{pr}_1(z), 1) + c_j(z, 1)] \quad (19)$$

и при $m \in \overline{2, N}$, в условиях уже найденных списка $\{\alpha(j) : j \in \overline{1, m-1}\}$ и УП $z_{m-1} \in M_{\alpha(m-1)} \times M_{\alpha(m-1)}$, выбираем $\alpha(m) \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\alpha(i) : i \in \overline{1, m-1}\})$ и $z_m \in M_{\alpha(m)} \times M_{\alpha(m)}$ так, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{c}_{\alpha(m)}(\text{pr}_2(z_{m-1}), \text{pr}_1(z_m), m) + c_{\alpha(m)}(z_m, m) = \\ & = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\alpha(i) : i \in \overline{1, m-1}\})} \min_{z \in M_{\alpha(m)} \times M_{\alpha(m)}} [\mathbf{c}_j(\text{pr}_2(z_{m-1}), \text{pr}_1(z), m) + c_j(z, m)]. \end{aligned} \quad (20)$$

Тем самым реализуется "быстрая" процедура поиска допустимого решения, в которой (19), (20) отвечают за "связь" с ОЗМ. В рамках схемы (19), (20) мы оптимизируем свой "сиюминутный" выбор. Можно использовать некоторые элементы прогноза, а именно: ввести в рассмотрение зависимость

$$\mathfrak{V} : \mathbf{X} \times \mathbf{N} \longrightarrow [0, \infty[, \quad (21)$$

значения которой характеризуют стоимость перспективных затрат. Опуская пока обсуждение вопроса о том, как построить функцию (21), мы (вместо (19), (20)) отметим следующее правило: при $z_o = (x^o, x^o)$ выбираем $(\alpha(1), z_1)$, $\alpha(1) \in \mathbf{I}(\overline{1, N})$, $z_1 \in M_{\alpha(1)} \times M_{\alpha(1)}$, из условия

$$\begin{aligned} & \mathbf{c}_{\alpha(1)}(x^o, \text{pr}_1(z_1), 1) + c_{\alpha(1)}(z_1) + \mathfrak{V}(\text{pr}_2(z_1), \overline{1, N} \setminus \{\alpha(1)\}) = \\ & = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1, N})} \min_{z \in M_j \times M_j} [\mathbf{c}_j(x^o, \text{pr}_1(z), 1) + c_j(z) + \mathfrak{V}(\text{pr}_2(z), \overline{1, N} \setminus \{j\})]; \end{aligned} \quad (22)$$

если $m \in \overline{2, N}$ и уже построены список $\{\alpha(j) : j \in \overline{1, m-1}\}$ и УП $z_{m-1} \in M_{\alpha(m-1)} \times M_{\alpha(m-1)}$, то $\alpha(m) \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\alpha(i) : i \in \overline{1, m-1}\})$ и $z_m \in M_{\alpha(m)} \times M_{\alpha(m)}$ полагаем такими, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{c}_{\alpha(m)}(\text{pr}_2(z_{m-1}), \text{pr}_1(z_m), m) + c_{\alpha(m)}(z_m, m) + \mathfrak{V}(\text{pr}_2(z_m), \overline{1, N} \setminus \{\alpha(i) : i \in \overline{1, m}\}) = \\ & = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\alpha(i) : i \in \overline{1, m-1}\})} \min_{z \in M_j \times M_j} [\mathbf{c}_j(\text{pr}_2(z_{m-1}), \text{pr}_1(z), m) + c_j(z, m) + \\ & + \mathfrak{V}(\text{pr}_2(z), (\overline{1, N} \setminus \{\alpha(i) : i \in \overline{1, m-1}\}) \setminus \{j\})]. \end{aligned} \quad (23)$$

Один из вариантов функции $\mathfrak{V}$ можно получить, реализуя при $\kappa \in [0, \infty[$ некоторую комбинацию (19) – (23). Итак, если $x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$, то полагаем в данном варианте, что

$$\mathfrak{V}(x, K) \triangleq \kappa \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in M_j \times M_j} [\mathbf{c}_j(x, \text{pr}_1(z), N - |K| + 1) + c_j(z, N - |K| + 1)], \quad (24)$$

а также полагаем $\mathfrak{V}(\tilde{x}, \emptyset) \triangleq f(\tilde{x}) \quad \forall \tilde{x} \in \mathbf{X}$. Алгоритм на основе (24) будем называть прогнозным. Мы получили несколько эвристических алгоритмов для решения ОЗМ.

Однако наиболее последовательная реализация (21) – (24) достигается на основе использования МДП, к рассмотрению которого мы сейчас и переходим. $\square$

Всюду в дальнейшем при $K \in \mathfrak{N}$ через $\mathbb{Z}_K$ обозначаем множество всех кортежей

$$(z_i)_{i \in \overline{0, |K|}} : \overline{0, |K|} \longrightarrow \mathbf{X} \times \mathbf{X};$$

если, к тому же, $x \in \mathbf{X}$ и $\alpha \in (\mathbf{I} - \text{bi})[K]$, то

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(x, K, \alpha) \triangleq \{ & (z_i)_{i \in \overline{0, |K|}} \in \mathbb{Z}_K \mid (z_o = (x, x)) \& (z_j \in M_{\alpha(j)} \times M_{\alpha(j)}) \\ & \forall j \in \overline{1, |K|}\} \in \text{Fin}(\mathbb{Z}_K). \end{aligned} \quad (25)$$

Напомним теперь, что (см. (14), [7, часть 2]) $(\mathbf{I} - \text{bi})[K] \in \text{Fin}((\text{bi})[K]) \quad \forall K \in \mathfrak{N}$. Для построения расширения ОЗМ введём в рассмотрение специальные "укороченные"

(вообще говоря) критерии качества: если $x \in \mathbf{X}$, $K \in \mathfrak{N}$, $\alpha \in (\mathbf{I} - \text{bi})[K]$ и $(z_i)_{i \in \overline{0, |K|}} \in \mathcal{Z}(x, K, \alpha)$, то полагаем, что

$$\begin{aligned} \pi[x; K; \alpha; (z_i)_{i \in \overline{0, |K|}}] &\triangleq \sum_{t=1}^{|K|} \mathbf{c}_{\alpha(t)}(\text{pr}_2(z_{t-1}), \text{pr}_1(z_t), N - |K| + t) + \\ &+ \sum_{t=1}^{|K|} c_{\alpha(t)}(z_t, N - |K| + t) + f(\text{pr}_2(z_{|K|})), \end{aligned} \quad (26)$$

получая всякий раз неотрицательное число. Если $x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$, то рассматриваем (частичную) задачу

$$\pi[x; K; \alpha; (z_i)_{i \in \overline{0, |K|}}] \longrightarrow \min, \quad \alpha \in (\mathbf{I} - \text{bi})[K], \quad (z_i)_{i \in \overline{0, |K|}} \in \mathcal{Z}(x, K, \alpha). \quad (27)$$

Каждой задаче (27) сопоставляется значение (экстремум) и непустое множество (оптимальных) решений. С учётом этого определяем функцию

$$v : \mathbf{X} \times \mathbf{N} \longrightarrow [0, \infty[\quad (28)$$

посредством следующих соотношений:

$$\begin{aligned} (v(x, K) &\triangleq \min_{\alpha \in (\mathbf{I} - \text{bi})[K]} \min_{(z_i)_{i \in \overline{0, |K|}} \in \mathcal{Z}(x, K, \alpha)} \pi[x; K; \alpha; (z_i)_{i \in \overline{0, |K|}}] \\ &\forall x \in \mathbf{X} \quad \forall K \in \mathfrak{N}) \& (v(x, \emptyset) \triangleq f(x) \quad \forall x \in \mathbf{X}). \end{aligned} \quad (29)$$

Роль функции (28), (29) в конструкциях на основе МДП является исключительно важной: мы отождествляем (21), (28) и используем при этом следующее положение.

Предложение 1. Если $x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$, то справедливо равенство

$$v(x, K) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in M_j \times M_j} [\mathbf{c}_j(x, \text{pr}_1(z), N - |K| + 1) + c_j(z, N - |K| + 1) + v(\text{pr}_2(z), K \setminus \{j\})].$$

Доказательство получается естественной комбинацией рассуждений [1, теорема 2.1] и [8, теорема 1]. Отметим сейчас очевидную связь (11) и (29):

$$V = v(x^o, \overline{1, N}). \quad (30)$$

4. Клетки и слои пространства позиций

В настоящем разделе напомним некоторые положения [7, § 4.9] (см. также ([1] – [6]), касающиеся вопросов частичного построения массива значений функции Беллмана. Мы будем здесь, однако, рассматривать данный вопрос несколько шире, имея в виду использование схемы (21), (22); в частности, можно свести процедуру к МДП, отождествляя (21) и (28). В этой связи главное внимание будет уделяться слоям пространства позиций, а также клеточной структуре этих слоёв. Прежде всего напомним, что

$$\mathcal{G} \triangleq \{K \in \mathfrak{N} \mid \forall z \in \mathbf{K} \quad (\text{pr}_1(z) \in K) \implies (\text{pr}_2(z) \in K)\} \quad (31)$$

есть семейство всех существенных $[1] - [7]$ списков, которое разбивается в сумму слоёв, составленных из списков фиксированной мощности:

$$\mathcal{G}_s \triangleq \{K \in \mathcal{G} \mid s = |K|\} \quad \forall s \in \overline{1, N}. \quad (32)$$

Согласно (31), (32) имеем, что $\{\mathcal{G}_s : s \in \overline{1, N}\}$ есть разбиение $\mathcal{G}$. Легко видеть, что $\mathcal{G}_N = \{\overline{1, N}\}$ (одноэлементное семейство) и

$$\mathcal{G}_1 = \{\{k\} : k \in \overline{1, N} \setminus \mathbf{K}_1\},$$

где $\mathbf{K}_1 \triangleq \{\text{pr}_1(z) : z \in \mathbf{K}\}$. Наконец, переход от $\mathcal{G}_N$ к $\mathcal{G}_1$ характеризуется [12] следующей рекуррентной процедурой:

$$\mathcal{G}_{s-1} = \{K \setminus \{j\} : K \in \mathcal{G}_s, j \in \mathbf{I}(K)\} \quad \forall s \in \overline{2, N}. \quad (33)$$

Посредством (33) могут быть построены все множества (32). Далее, пусть

$$\mathcal{J}_s(K) \triangleq \{j \in \overline{1, N} \setminus K \mid \{j\} \cup K \in \mathcal{G}_{s+1}\} \quad \forall s \in \overline{1, N-1} \quad \forall K \in \mathcal{G}_s. \quad (34)$$

Отметим, что каждое из множеств (34) непусто. Рассмотрим теперь процедуру построения слоёв $D_o, D_1, \dots, D_N$ в пространстве позиций. С использованием множества

$$\mathbf{M} \triangleq \bigcup_{i \in \overline{1, N} \setminus \mathbf{K}_1} M_i \in \text{Fin}(\mathbf{X})$$

(см. [7, с. 174–175]) конструируется слой

$$D_o \triangleq \mathbf{M} \times \{\emptyset\} = \{(x, \emptyset) : x \in \mathbf{M}\}.$$

Очевидным образом определяется $D_N : D_N \triangleq \{(x^o, \overline{1, N})\}$ (множество, содержащее единственную УП). В целях построения промежуточных слоёв введём

$$\mathcal{M}_s[K] \triangleq \bigcup_{j \in \mathcal{J}_s(K)} M_j \in \text{Fin}(\mathbf{X}) \quad \forall s \in \overline{1, N-1} \quad \forall K \in \mathcal{G}_s. \quad (35)$$

Далее, множества (35) "переделываются" в клетки пространства позиций: полагаем, что

$$\mathbb{D}_s[K] \triangleq \{(x, K) : x \in \mathcal{M}_s[K]\} \quad \forall s \in \overline{1, N-1} \quad \forall K \in \mathcal{G}_s. \quad (36)$$

Наконец, клетки (36) объединяются в слои, образуя в то же время разбиения последних. Итак, полагаем, что

$$D_s \triangleq \bigcup_{K \in \mathcal{G}_s} \mathbb{D}_s[K] \quad \forall s \in \overline{1, N-1}; \quad (37)$$

все множества (37) являются непустыми [7, предложение 4.9.3] п/м $\mathbf{X} \times \mathcal{G}$, где согласно (31) $\mathcal{G} \subset \mathfrak{N} \subset \mathbf{N}$. Последнее означает, что для точек слоёв $D_o, D_1, \dots, D_n$

определены значения функции Беллмана. В связи со свойствами слоёв D_i , $i \in \overline{0, N}$, отметим, что [7, предложение 4.9.4]

$$(y, K \setminus \{j\}) \in D_{s-1} \quad \forall s \in \overline{1, N} \quad \forall (x, K) \in D_s \quad \forall j \in \mathbf{I}(K) \quad \forall y \in M_j. \quad (38)$$

Свойство (38) (слабая инвариантность; аналог стабильности мостов в смысле Н.Н. Красовского в теории дифференциальных игр, см. [13, 14]) позволяет взглянуть на процедуры замечания 3.1 несколько иначе; выбирая маршрут α по принципу (17) и дополняя этот пошаговый выбор произвольным правилом подбора УП $z_1, \dots, z_N$, соответствующим (18), мы будем перемещаться (см. (38)) в пределах вышеупомянутых слоёв (учитываем, что в замечании 3.1 предполагалось выполненным равенство $z_o = (x^o, x^o)$). Возвращаясь теперь к функции (21), мы можем ввести систему её сужений на слои $D_o, D_1, \dots, D_N$.

Итак, пусть каким-то образом введена функция (21). Получаем тогда, что (см. раздел 2)

$$\mathfrak{V}_s \triangleq (\mathfrak{V}|D_s) \in \mathcal{R}_+[D_s] \quad \forall s \in \overline{0, N}. \quad (39)$$

Это означает, что для каждого $s \in \overline{0, N}$ мы в виде $\mathfrak{V}_s$ имеем неотрицательную функцию на слое D_s , причём $\mathfrak{V}_s(x, K) = \mathfrak{V}(x, K) \quad \forall (x, K) \in D_s$. Это позволяет модифицировать правило (22), (23), используя там соответствующие значения функций – сужений $\mathfrak{V}$. Совсем кратко наметим рассуждение, позволяющее ограничиться использованием функций (39) "вместо" $\mathfrak{V}$. Итак, вернёмся к замечанию 3.1 в части, касающейся использования (21). Тогда $z_o = (x^o, x^o)$,

$$(\text{pr}_2(z_o), \overline{1, N}) = (x^o, \overline{1, N}) \in D_N$$

и согласно (38) имеем (см. условия реализации (22)), что

$$(\text{pr}_2(z_1), \overline{1, N} \setminus \{\alpha(1)\}) \in D_{N-1}.$$

Пусть вообще $m \in \overline{1, N}$ и уже построены УП

$$(\alpha(1), z_1) \in \overline{1, N} \times (\mathbf{X} \times \mathbf{X}), \dots, (\alpha(m), z_m) \in \overline{1, N} \times (\mathbf{X} \times \mathbf{X}), \quad (40)$$

для которых $\alpha(1) \in \mathbf{I}(\overline{1, N})$, $\alpha(k) \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\alpha(i) : i \in \overline{1, k-1}\}) \quad \forall k \in \overline{2, m}$, $z_1 \in M_{\alpha(1)} \times M_{\alpha(1)}, \dots, z_m \in M_{\alpha(m)} \times M_{\alpha(m)}$ и выполняются условия, оговоренные перед (23) и, кроме того,

$$(\text{pr}_2(z_k), \overline{1, N} \setminus \{\alpha(i) : i \in \overline{1, k}\}) \in D_{N-k} \quad \forall k \in \overline{1, m}; \quad (41)$$

полагаем также, что (в духе (23)) построение (40) осуществлялось по правилам

$$\begin{aligned} & \mathbf{c}_{\alpha(k)}(\text{pr}_2(z_{k-1}), \text{pr}_1(z_k), k) + c_{\alpha(k)}(z_k, k) + \mathfrak{V}_{N-k}(\text{pr}_2(z_k), \overline{1, N} \setminus \{\alpha(i) : i \in \overline{1, k}\}) = \\ & = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\alpha(i) : i \in \overline{1, k-1}\})} \min_{z \in M_j \times M_j} \left[\mathbf{c}_j(\text{pr}_2(z_{k-1}), \text{pr}_1(z), k) + c_j(z, k) + \right. \\ & \left. + \mathfrak{V}_{N-k}(\text{pr}_2(z), (\overline{1, N} \setminus \{\alpha(i) : i \in \overline{1, k-1}\}) \setminus \{j\}) \right] \quad \forall k \in \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Если $m = N$, то наше построение завершено и согласно (41) мы имеем "движение" в пределах слоёв $D_N, D_{N-1}, \dots, D_o$ (мы учитываем здесь определение z_o). Пусть $m \neq N$, т. е. $m \in \overline{1, N-1}$. При этом согласно (41)

$$(\text{pr}_2(z_m), \overline{1, N} \setminus \{\alpha_i : i \in \overline{1, m}\}) \in D_{N-m}, \quad (42)$$

где $N - m \in \overline{1, N-1}$. С учётом (36), (37) получаем, что $\overline{1, N} \setminus \{\alpha(i) : i \in \overline{1, m}\} \in \mathcal{G}_{N-m}$, а тогда, в частности, $\overline{1, N} \setminus \{\alpha(i) : i \in \overline{1, m}\} \in \mathfrak{N}$ и определено множество

$$\mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\alpha(i) : i \in \overline{1, m}\}) \in \mathfrak{N};$$

в частности, это множество непусто (см. определение отображения $\mathbf{I}$). Далее, возвращаясь к (42), мы получаем из (38) свойство

$$(y, (\overline{1, N} \setminus \{\alpha(i) : i \in \overline{1, m}\}) \setminus \{j\}) \in D_{N-(m+1)} \quad \forall j \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\alpha(i) : i \in \overline{1, m}\}) \quad \forall y \in M_j.$$

Это свойство позволяет рассматривать, в частности, следующую задачу:

$$\begin{aligned} & \mathbf{c}_j(\text{pr}_2(z_m), \text{pr}_1(z), m+1) + c_j(z, m+1) + \mathfrak{V}_{N-(m+1)}(\text{pr}_2(z), (\overline{1, N} \setminus \{\alpha(i) : \\ & i \in \overline{1, m}\}) \setminus \{j\}) \longrightarrow \min, \quad j \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\alpha(i) : i \in \overline{1, m}\}), \quad z \in M_j \times M_j. \end{aligned} \quad (43)$$

Ограничения задачи (43) совместны, а потому ей соответствует непустое множество допустимых элементов; задача (43), следовательно, разрешима. С учётом этого мы выбираем $\alpha(m+1) \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\alpha(i) : i \in \overline{1, m}\})$ и $z_{m+1} \in M_{\alpha(m+1)} \times M_{\alpha(m+1)}$ так, что при этом

$$\begin{aligned} & \mathbf{c}_{\alpha(m+1)}(\text{pr}_2(z_m), \text{pr}_1(z_{m+1}), m+1) + c_{\alpha(m+1)}(z_{m+1}, m+1) + \\ & + \mathfrak{V}_{N-(m+1)}(\text{pr}_2(z_{m+1}), \overline{1, N} \setminus \{\alpha(i) : i \in \overline{1, m+1}\}) = \\ & = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\alpha(i) : i \in \overline{1, m}\})} \min_{z \in M_j \times M_j} \left[\mathbf{c}_j(\text{pr}_2(z_m), \text{pr}_1(z), m+1) + \right. \\ & \left. + c_j(z, m+1) + \mathfrak{V}_{N-(m+1)}(\text{pr}_2(z), (\overline{1, N} \setminus \{\alpha(i) : i \in \overline{1, m}\}) \setminus \{j\}) \right]. \end{aligned} \quad (44)$$

Теперь мы располагаем "продолженным" набором УП

$$\begin{aligned} & (\alpha(1), z_1) \in \overline{1, N} \times (\mathbf{X} \times \mathbf{X}), \dots, (\alpha(m), z_m) \in \overline{1, N} \times (\mathbf{X} \times \mathbf{X}), \\ & (\alpha(m+1), z_{m+1}) \in \overline{1, N} \times (\mathbf{X} \times \mathbf{X}) \end{aligned} \quad (45)$$

и при этом $z_1 \in M_{\alpha(1)} \times M_{\alpha(1)}, \dots, z_m \in M_{\alpha(m)} \times M_{\alpha(m)}, z_{m+1} \in M_{\alpha(m+1)} \times M_{\alpha(m+1)}$. С учётом (44) получаем также, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{c}_{\alpha(k)}(\text{pr}_2(z_{k-1}), \text{pr}_1(z_k), k) + c_{\alpha(k)}(z_k, k) + \\ & + \mathfrak{V}_{N-k}(\text{pr}_2(z_k), \overline{1, N} \setminus \{\alpha(i) : i \in \overline{1, k}\}) = \\ & = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\alpha(i) : i \in \overline{1, k-1}\})} \min_{z \in M_j \times M_j} \left[\mathbf{c}_j(\text{pr}_2(z_{k-1}), \text{pr}_1(z), k) + \right. \\ & \left. + c_j(z, k) + \mathfrak{V}_{N-k}(\text{pr}_2(z), (\overline{1, N} \setminus \{\alpha(i) : i \in \overline{1, k-1}\}) \setminus \{j\}) \right] \quad \forall k \in \overline{1, m+1}. \end{aligned} \quad (46)$$

Таким образом, нам удалось "нарастить" набор (40), превратив его в набор (45); при этом кортеж индексов $(\alpha(i))_{i \in \overline{1, m}} : \overline{1, m} \rightarrow \overline{1, N}$ преобразуется в кортеж

$$(\alpha(i))_{i \in \overline{1, m+1}} : \overline{1, m+1} \rightarrow \overline{1, N}, \quad (47)$$

а кортеж УП $(z_i)_{i \in \overline{1, m}} : \overline{1, m} \rightarrow \mathbf{X} \times \mathbf{X}$ преобразуется в кортеж

$$(z_i)_{i \in \overline{1, m+1}} : \overline{1, m+1} \rightarrow \mathbf{X} \times \mathbf{X}. \quad (48)$$

Система (41) преобразуется в новую расширенную систему включений (учитывается свойство (40))

$$(\text{pr}_2(z_k), \overline{1, N} \setminus \{\alpha(i) : i \in \overline{1, k}\}) \in D_{N-k} \quad \forall k \in \overline{1, m+1}. \quad (49)$$

Имеем при этом расширенную систему условий (46). Заметим также, что кортеж (47) обладает свойствами

$$\alpha(k) \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\alpha(i) : i \in \overline{1, k-1}\}) \quad \forall k \in \overline{1, m+1}.$$

Заметим наконец, что согласно (49) мы продвинулись в системе слоёв на один шаг. Повторяя регулярный шаг процедуры (см. выбор $\alpha(m+1)$ и z_{m+1} с соблюдением (44)), мы в конце концов получим ситуацию, когда "движение" будет реализовано в слоях $D_N, D_{N-1}, \dots, D_o$ и при этом будут обеспечены равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{\alpha(k)}(\text{pr}_2(z_{k-1}), \text{pr}_1(z_k), k) + c_{\alpha(k)}(z_k, k) + \mathfrak{V}_{N-k}(\text{pr}_2(z_k), \overline{1, N} \setminus \{\alpha(i) : \\ i \in \overline{1, k}\}) = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\alpha(i) : i \in \overline{1, k-1}\})} \min_{z \in M_j \times M_j} [\mathbf{c}_j(\text{pr}_2(z_{k-1}), \text{pr}_1(z), k) + c_j(z, k) + \\ + \mathfrak{V}_{N-k}(\text{pr}_2(z), (\overline{1, N} \setminus \{\alpha(i) : i \in \overline{1, k-1}\}) \setminus \{j\})] \quad \forall k \in \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (50)$$

Кроме того, будут обеспечены свойства (напомним, что в связи с использованием (23) было оговорено требование $z_o = (x^o, x^o)$) :

$$\begin{aligned} \alpha(1) \in \mathbf{I}(\overline{1, N}), \quad (\alpha(k) \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\alpha(i) : i \in \overline{1, k-1}\}) \quad \forall k \in \overline{2, N}), \\ z_1 \in M_{\alpha(1)} \times M_{\alpha(1)}, \dots, z_N \in M_{\alpha(N)} \times M_{\alpha(N)}, \\ ((\text{pr}_2(z_k), \overline{1, N} \setminus \{\alpha(i) : i \in \overline{1, k}\}) \in D_{N-k} \quad \forall k \in \overline{1, N}). \end{aligned} \quad (51)$$

Из (51) легко следует биективность α , т.е. $\alpha \in \mathbb{P}$; более того, в силу (16) и (51) следует, что $\alpha \in \mathbb{A}$ (процедура гарантирует соблюдение условий предшествования). Свойства (50) характеризуют идею локальной оптимизации в духе (19), (20). Эта идея находит своё логическое завершение в случае, когда $\mathfrak{V}$ (21) отождествляется с v (28), т.е. в случае применения МДП, что потребует, конечно, серьёзных вычислительных затрат. Рассмотрим этот случай подробнее. Сейчас мы заметим, что при использовании в качестве $\mathfrak{V}$ функции (28) УП $(\alpha, (z_i)_{i \in \overline{0, N}})$, построенная в соответствии с правилами, приводящими к (50) и реализующими "движение" в слоях (см. (41) при $m = N$), будет оптимальным решением исходной задачи. Это обстоятельство следует из предложения 1 и (40), поскольку (см. (41)) $\forall s \in \overline{1, N} \quad \forall (x, K) \in D_s$

$$\begin{aligned} \mathfrak{V}_s(x, K) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in M_j \times M_j} [\mathbf{c}_j(x, \text{pr}_1(z), N - |K| + 1) + \\ + c_j(z, N - |K| + 1) + \mathfrak{V}_{s-1}(\text{pr}_2(z), K \setminus \{j\})]. \end{aligned} \quad (52)$$

Кроме того, отметим, что согласно (30) и (39) справедливы равенства

$$(V = \mathfrak{V}_N(x^o, \overline{1, N})) \& (\mathfrak{V}_o(x, \emptyset) = f(x) \quad \forall x \in \mathbf{M}). \quad (53)$$

Будем использовать (41) при $m = N$, получая таким образом для построенного решения

$$(\alpha, (z_i)_{i \in \overline{0, N}}) \in \mathbb{A} \times \mathbf{Z}, \quad (z_i)_{i \in \overline{0, N}} \in \mathcal{Z}_\alpha,$$

следующую систему включений:

$$(\text{pr}_2(z_k), \overline{1, N} \setminus \{\alpha(i) : i \in \overline{1, k}\}) \in D_{N-k} \quad \forall k \in \overline{1, N}. \quad (54)$$

Свойство (54) позволяет использовать (50), (51) в естественном сочетании. Так, в частности, из (50), (51) имеем (см. (54)), что $(\text{pr}_2(z_N), \emptyset) = (\text{pr}_2(z_N), \overline{1, N} \setminus \{\alpha(i) : i \in \overline{1, N}\}) \in D_o$, а потому

$$\begin{aligned} & \mathbf{c}_{\alpha(N)}(\text{pr}_2(z_{N-1}), \text{pr}_1(z_N), N) + c_{\alpha(N)}(z_N, N) + f(\text{pr}_2(z_N)) = \\ & = \mathfrak{V}_1(\text{pr}_2(z_{N-1}), \overline{1, N} \setminus \{\alpha(i) : i \in \overline{1, N-1}\}) = \mathfrak{V}_1(\text{pr}_2(z_{N-1}), \{\alpha(N)\}). \end{aligned}$$

На самом же деле справедливо следующее

Предложение 2. Имеет место система равенств

$$\begin{aligned} & \mathbf{c}_{\alpha(k)}(\text{pr}_2(z_{k-1}), \text{pr}_1(z_k), k) + c_{\alpha(k)}(z_k, k) + \mathfrak{V}_{N-k}(\text{pr}_2(z_k), \overline{1, N} \setminus \{\alpha(i) : i \in \overline{1, k}\}) = \\ & = \mathfrak{V}_{N-k+1}(\text{pr}_2(z_{k-1}), \overline{1, N} \setminus \{\alpha(i) : i \in \overline{1, k-1}\}) \quad \forall k \in \overline{1, N}. \end{aligned}$$

Доказательство. Используем комбинацию (52) и (54). Тогда при $s \in \overline{0, N-1}$ имеем $N-s \in \overline{1, N}$, а потому согласно (52)

$$\begin{aligned} \mathfrak{V}_{N-s}(x, K) &= \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in M_j \times M_j} [\mathbf{c}_j(x, \text{pr}_1(z), N - |K| + 1) + c_j(z, N - |K| + 1) + \\ & + \mathfrak{V}_{N-(s+1)}(\text{pr}_2(z), K \setminus \{j\})] \quad \forall (x, K) \in D_{N-s}. \end{aligned}$$

С учётом (54) получаем теперь при $s \in \overline{0, N-1}$ следующее равенство

$$\begin{aligned} \mathfrak{V}_{N-s}(\text{pr}_2(z_s), \overline{1, N} \setminus \{\alpha(i) : i \in \overline{1, s}\}) &= \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\alpha(i) : i \in \overline{1, s}\})} \min_{z \in M_j \times M_j} [\mathbf{c}_j(\text{pr}_2(z_s), \\ & \text{pr}_1(z), s+1) + c_j(z, s+1) + \mathfrak{V}_{N-(s+1)}(\text{pr}_2(z), (\overline{1, N} \setminus \{\alpha(i) : i \in \overline{1, s}\}) \setminus \{j\})] \end{aligned}$$

(особым является случай $s = 0$, но

$$(\text{pr}_2(z_o), \overline{1, N} \setminus \{\alpha(i) : i \in \overline{1, 0}\}) = (x^o, \overline{1, N}) \in D_N,$$

а потому мы и в этом случае можем использовать (52)). Если $k \in \overline{1, N}$, то $k-1 \in \overline{0, N-1}$, а потому последнее равенство преобразуется к виду

$$\mathfrak{V}_{N-k+1}(\text{pr}_2(z_{k-1}), \overline{1, N} \setminus \{\alpha(i) : i \in \overline{1, k-1}\}) = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\alpha(i) : i \in \overline{1, k-1}\})} \min_{z \in M_j \times M_j} [\mathbf{c}_j(\text{pr}_2(z_{k-1}),$$

$$\text{pr}_1(z), k) + c_j(z, k) + \mathfrak{V}_{N-k}(\text{pr}_2(z), (\overline{1, N} \setminus \{\alpha(i) : i \in \overline{1, k-1}\}) \setminus \{j\}),$$

откуда с учётом (50) получаем требуемое равенство. $\square$

Следствие. Справедливо равенство $\Pi(\alpha, (z_i)_{i \in \overline{0, N}}) = V$.

Доказательство. Согласно предложению 2 имеем, что (см. (54))

$$V = \mathfrak{V}_N(x^o, \overline{1, N}) = \mathbf{c}_{\alpha(1)}(\text{pr}_2(z_o), \text{pr}_1(z_1), 1) + c_{\alpha(1)}(z_1, 1) + \mathfrak{V}_{N-1}(\text{pr}_2(z_1), \overline{1, N} \setminus \{\alpha(1)\}) \quad (55)$$

(мы учли, что $\text{pr}_2(z_o) = x^o$). Пусть индекс $q \in \overline{1, N}$ обладает тем свойством, что

$$V = \sum_{t=1}^q \mathbf{c}_{\alpha(t)}(\text{pr}_2(z_{t-1}), \text{pr}_1(z_t), t) + \sum_{t=1}^q c_{\alpha(t)}(z_t, t) + \mathfrak{V}_{N-q}(\text{pr}_2(z_q), \overline{1, N} \setminus \{\alpha(t) : t \in \overline{1, q}\}) \quad (56)$$

(при $q = 1$ (56) следует из (55) непосредственно). Возможен один из следующих двух случаев: а) $q = N$; б) $q < N$. Рассмотрим эти случаи отдельно.

а) Пусть $q = N$. Тогда в силу биективности α $\{\alpha(t) : t \in \overline{1, q}\} = \{\alpha(t) : t \in \overline{1, N}\} = \overline{1, N}$ и согласно (54)

$$\mathfrak{V}_{N-q}(\text{pr}_2(z_q), \overline{1, N} \setminus \{\alpha(t) : t \in \overline{1, q}\}) = \mathfrak{V}_{N-q}(\text{pr}_2(z_q), \emptyset) = f(\text{pr}_2(z_N)),$$

откуда из (9), (56) следует равенство

$$V = \sum_{t=1}^N \mathbf{c}_{\alpha(t)}(\text{pr}_2(z_{t-1}), \text{pr}_1(z_t), t) + \sum_{t=1}^N c_{\alpha(t)}(z_t, t) + f(\text{pr}_2(z_N)) = \Pi(\alpha, (z_t)_{t \in \overline{1, N}}),$$

означающее оптимальность построенного решения $(\alpha, (z_i)_{i \in \overline{0, N}})$.

б) Пусть $q < N$, т. е. $q \leq N - 1$ и $q + 1 \in \overline{1, N}$. В этом случае согласно предложению 2

$$\mathfrak{V}_{N-q}(\text{pr}_2(z_q), \overline{1, N} \setminus \{\alpha(i) : i \in \overline{1, q}\}) = \mathbf{c}_{\alpha(q+1)}(\text{pr}_2(z_q), \text{pr}_1(z_{q+1}), q + 1) + c_{\alpha(q+1)}(z_{q+1}, q + 1) + \mathfrak{V}_{N-(q+1)}(\text{pr}_2(z_{q+1}), \overline{1, N} \setminus \{\alpha(i) : i \in \overline{1, q+1}\}).$$

Поэтому из (56) получаем в рассматриваемом сейчас случае, что

$$V = \sum_{t=1}^{q+1} \mathbf{c}_{\alpha(t)}(\text{pr}_2(z_{t-1}), \text{pr}_1(z_t), t) + \sum_{t=1}^{q+1} c_{\alpha(t)}(z_t, t) + \mathfrak{V}_{N-(q+1)}(\text{pr}_2(z_{q+1}), \overline{1, N} \setminus \{\alpha(i) : i \in \overline{1, q+1}\}). \quad (57)$$

Итак, в случае б) мы распространили свойство, используемое в (56), со случая, характеризуемого индексом q , на случай, отвечающий индексу $q + 1$; иными словами, при $q < N$

$$\begin{aligned} & \left(V = \sum_{t=1}^q \mathbf{c}_{\alpha(t)}(\text{pr}_2(z_{t-1}), \text{pr}_1(z_t), t) + \sum_{t=1}^q c_{\alpha(t)}(z_t, t) + \mathfrak{V}_{N-q}(\text{pr}_2(z_q), \right. \\ & \left. \overline{1, N} \setminus \{\alpha(t) : t \in \overline{1, q}\}) \right) \implies \left(V = \sum_{t=1}^{q+1} \mathbf{c}_{\alpha(t)}(\text{pr}_2(z_{t-1}), \text{pr}_1(z_t), t) + \right. \\ & \left. + \sum_{t=1}^{q+1} c_{\alpha(t)}(z_t, t) + \mathfrak{V}_{N-(q+1)}(\text{pr}_2(z_{q+1}), \overline{1, N} \setminus \{\alpha(i) : i \in \overline{1, q+1}\}) \right). \end{aligned} \quad (58)$$

После выполнения конечного числа регулярных этапов типа b) мы придём к ситуации, характеризуемой случаем а), т.е. к свойству оптимальности решения. Таковым (см. случай а)) оказывается $(\alpha(z_i)_{i \in \overline{0, N}})$. $\square$

5. Вычислительный эксперимент

Для решения задачи (10) были построены и реализованы на ПЭВМ эвристические алгоритмы, использующие различные варианты функций (21), а также оптимальный алгоритм на основе МДП; в последнем случае речь идет о конструкции, использующей в качестве $\mathfrak{V}$ (21) функцию Беллмана (28), (29). Программа написана в среде разработки Microsoft Visual C++ 2005. Вычисления производились на ПЭВМ с процессором Intel i7-2630QM и 8ГБ оперативной памяти.

Рассматривалось решение задач маршрутизации на плоскости $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ при условии, что $x^0 = (0, 0)$. В связи с определением функции стоимости условимся, что всюду в дальнейшем ρ есть евклидово расстояние на плоскости X : при $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$ число $\rho(x_1, x_2)$ есть евклидово расстояние между векторами x_1 и x_2 . Предполагалось, что функции $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n, c_1, \dots, c_N$ получаются умножением соответствующих значений ρ на время. Так, при $s \in \overline{1, N}$, $x_1 \in \mathbf{X}$, $x_2 \in M_s$ и $t \in \overline{1, N}$

$$\mathbf{c}_s(x_1, x_2, t) \triangleq t\rho(x_1, x_2).$$

Аналогичным образом, при $s \in \overline{1, N}$, $x_1 \in M_s$, $x_2 \in M_s$ и $t \in \overline{1, N}$

$$c_s(x_1, x_2, t) \triangleq t(\rho(x_1, a_s) + \rho(a_s, x_2)).$$

Здесь a_s — точка, определяющая внутренние работы на мегаполисе. Всюду в расчетах, кроме одного эксперимента, предполагалось, что $|M_j| = 25 \quad \forall j \in \overline{1, N}$. Наконец, значение функции f отождествлялось с евклидовой нормой: тогда при $x \in \mathbf{X} \setminus \{x^0\}$ $f(x) = \rho(x, x^0)$. Прочие параметры варьировались. Эвристические алгоритмы применялись при решении задач большой размерности. Жадный алгоритм (см. (19), (20)) использовался при решении задачи в условиях $N = 2500$ и $|\mathbf{K}| = 1000$. Время счета 2 мин. 53 сек. 176 мс. В данном примере предполагалось, что $|M_j| = 50 \quad \forall j \in \overline{1, N}$.

При использовании алгоритма на основе (22) – (24) исследовалось влияние коэффициента κ (см. (24)), характеризующего степень учета "быстрого" прогноза. Результаты, полученные с использованием данного алгоритма, сравнивались с аналогичными результатами для жадного (см. (19), (20)) и оптимального (см. (28), (29), предложение 1) алгоритмов.

В следующих трех примерах предполагалось, что $N = 25$, $|\mathbf{K}| = 15$, $|M_j| \equiv 25$.

1) Оптимальный алгоритм: время счета 23 мин. 50 сек. 650 мс., полученный результат (экстремум) 8673.565.

Жадный алгоритм: время счета меньше миллисекунды, результат 19395.012.

Прогнозный алгоритм (см. (23), (24)) при $\kappa = 0.7$: время счета 16 сек. 503 мс; результат 17779.121 (значение $\kappa = 0.7$ оптимально в пределах от 0 до 1 с точностью до дискретизации с шагом 0.1).

Далее приводятся рисунки для данного примера. Тонкие стрелки обозначают маршрут, толстые — адресные пары.

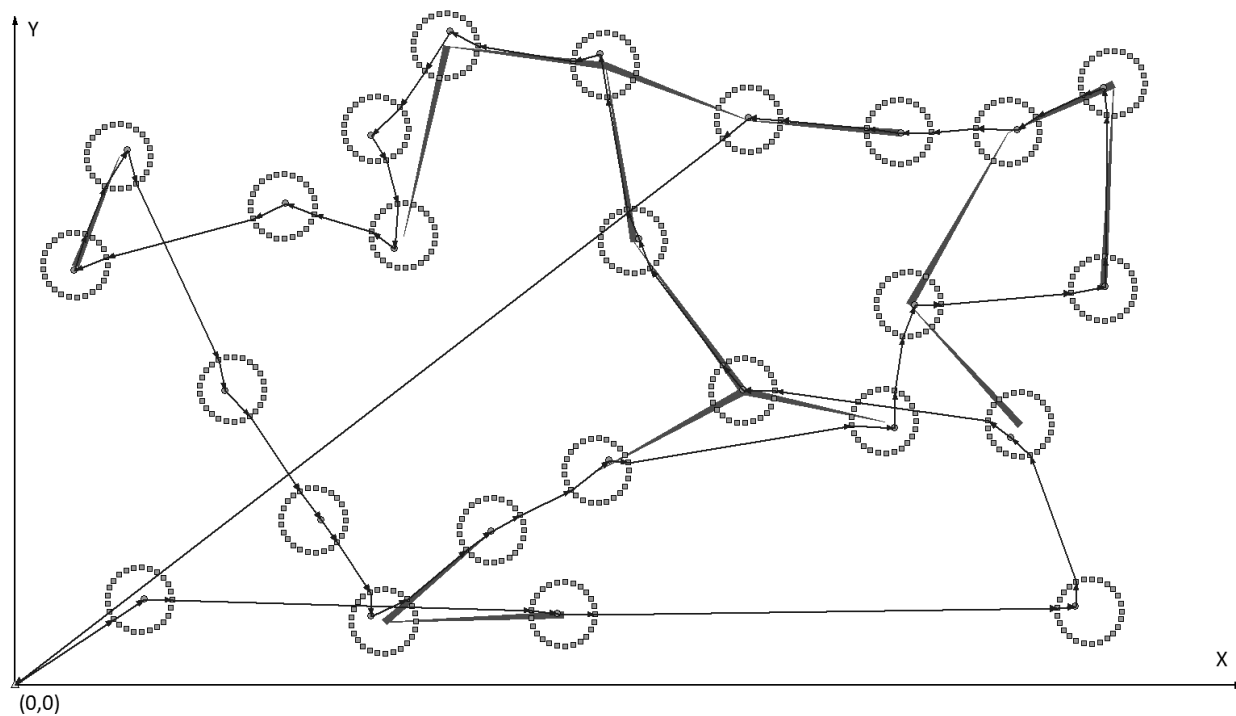


Рис. 1. Результат работы оптимального алгоритма

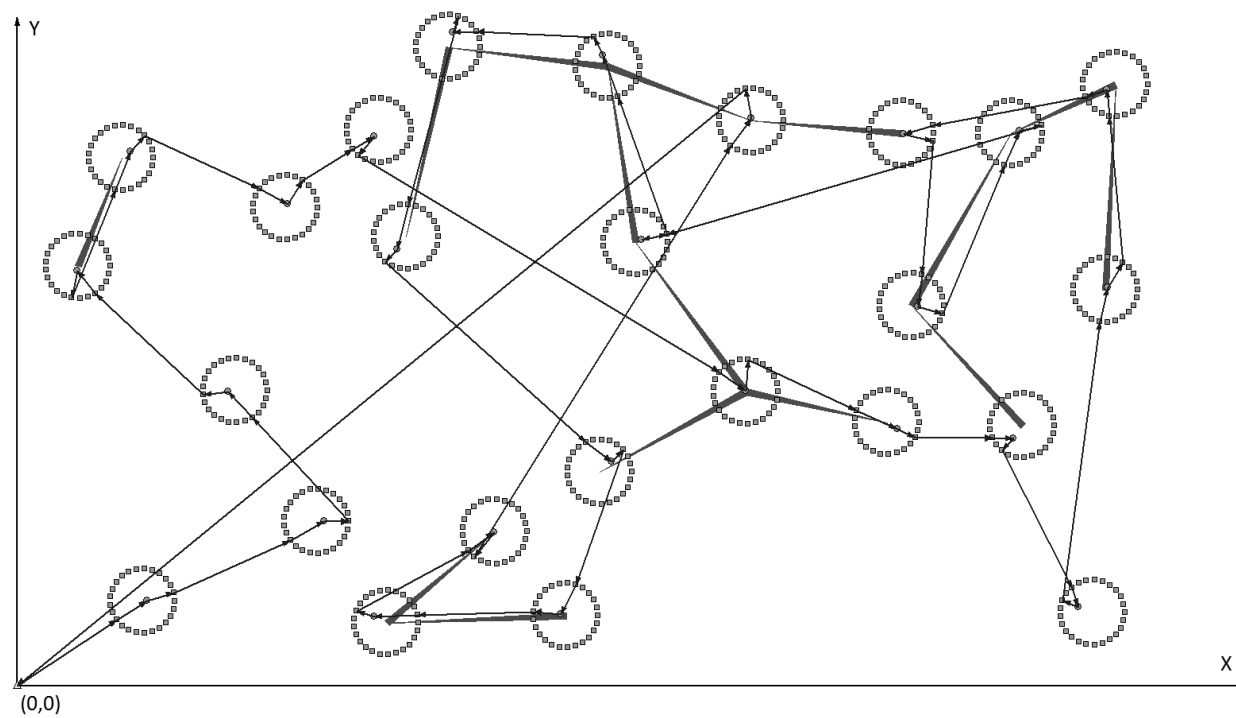


Рис. 2. Результат работы жадного алгоритма

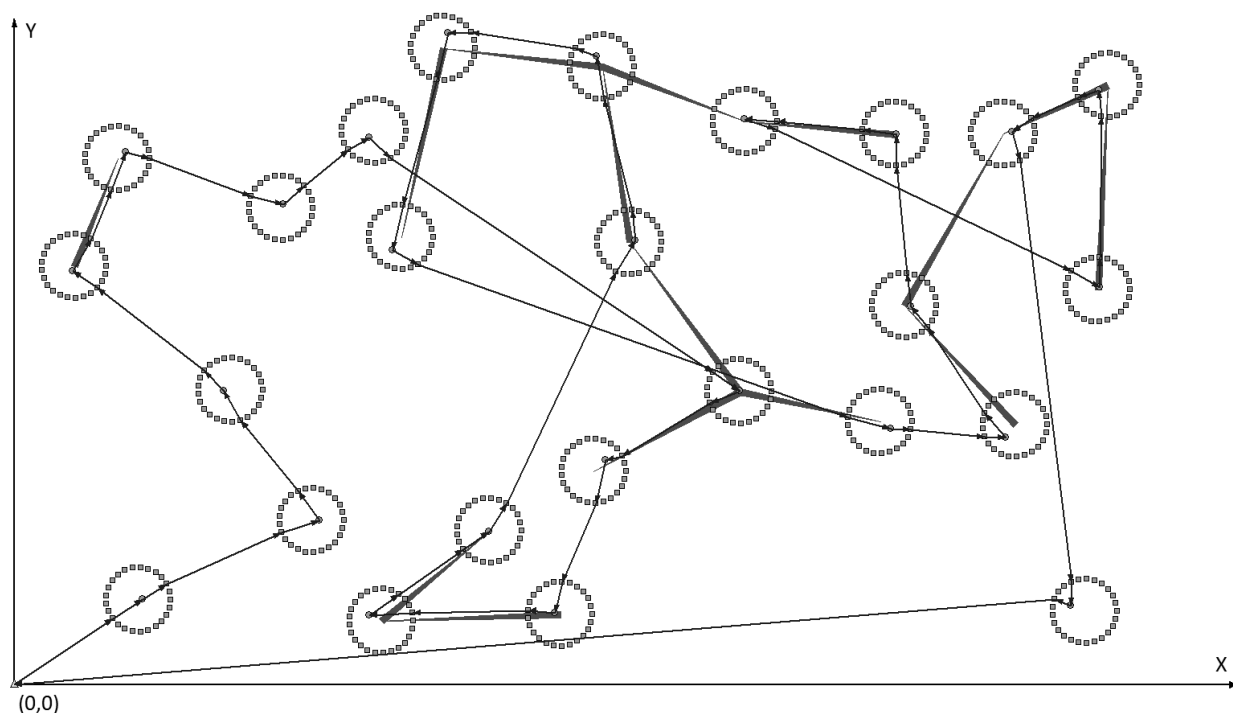


Рис. 3. Результат работы прогнозного алгоритма

2) Оптимальный алгоритм: время счета 31 мин. 26 сек. 904 мс., результат (экстремум) 9161.328.

Жадный алгоритм: время счета 15 мс., результат 17745.445.

Прогнозный алгоритм при $\kappa = 0.4$: время счета 21 сек. 464 мс. Результат 16650.551 (значение $\kappa = 0.4$ оптимально в пределах от 0 до 1 с точностью до дискретизации с шагом 0.1).

3) Оптимальный алгоритм: время счета 14 мин. 50 сек. 89 мс. Результат (экстремум) 9301.859.

Жадный алгоритм: время счета 14 мс., результат 17695.193.

Прогнозный алгоритм при $\kappa = 0.6$: время счета 22 сек. 58 мс., результат 15570.68 (значение $\kappa = 0.6$ оптимально в пределах от 0 до 1 с точностью до дискретизации с шагом 0.1).

Напомним, что во всех примерах обеспечено безусловное соблюдение условий предшествования. Конкретные данные при расчетах выбирались случайно. Из результатов видно, что жадный алгоритм обладает очень хорошим быстродействием и годится для решения задач большой размерности. Использование алгоритма с прогнозом (см. (23), (24)) и оптимизацией параметра κ приводит к некоторому выигрышу по результату при существенном проигрыше во времени (последнее, впрочем, остается приемлемым для многих задач такого типа). Оптимальный алгоритм на основе МДП доставляет ощутимый выигрыш по результату ценой существенных временных затрат.

Список литературы

1. Ченцов А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Экстремальная задача маршрутизации с внутренними потерями // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14. № 3. С. 183–201.
2. Ченцов А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Экстремальная задача маршрутизации перемещений с ограничениями и внутренними потерями // Известия вузов. Математика. 2010. № 6. С. 64–81.
3. Ченцов А.Г. Об оптимальной маршрутизации в условиях ограничений // Доклады РАН. 2008. Т. 423. № 3. С. 303–307.
4. Ченцов А.Г. Метод динамического программирования в экстремальных задачах маршрутизации с ограничениями // Изв.РАН. Теория и системы управления. 2010. № 3. С. 52–66.
5. Ченцов А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Метод итераций в задаче маршрутизации с внутренними потерями // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15. № 4. С. 270–289.
6. Ченцов А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Условия предшествования в одной задаче экстремальной маршрутизации с внутренними работами // Сб. научных трудов "Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений". Екатеринбург: Ин-т математики и механики УрО РАН. 2010. Вып. 10. С. 60–76.
7. Ченцов А.Г. Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. Москва; Ижевск: РХД. 2008. 238 с.
8. Тонков Л.В., Ченцов А.Г. К вопросу оптимального выбора маршрута в условиях временного дисконтирования // Кибернетика и систем. анализ. 1999. №1. С. 95–106.
9. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
10. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. М.: Мир, 1964. 430 с.
11. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: Построение и анализ. М.: МЦНМО. 2002. 960 с.
12. Григорьев А.М., Иванко Е.Е., Ченцов А.Г. Динамическое программирование в обобщенной задаче курьера с внутренними работами: элементы параллельной структуры // Моделирование и анализ информационных систем. 2011. Т. 18. №3. С. 101–124.
13. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
14. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1985. 518 с.

On a Nonstationary Route Problem with Constraints

Chentsov A.G., Chentsov P.A.

Keywords: route, trace, dynamic programming, preceding conditions

The extremal route problem of permutations under constraints in the form of preceding conditions is investigated. It is supposed that an executor leaves the initial point (the base) after which he visits a system of megalopolises (finite goal sets) and performs some work on each megalopolis. The cost functions for executor permutations and interior works depend on the “visiting moment” that can correspond to the real time or can also correspond to the natural regular succession (the first visiting, the second visiting, and so on). An economic variant of the widely interpreted dynamic programming method (DPM) is constructed. On this basis an optimal computer realized algorithm is constructed. A variant of a greed algorithm is proposed.

Сведения об авторах:

Ченцов Александр Георгиевич,

Институт математики и механики УрО РАН,
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН, зав. отделом,

Ченцов Павел Александрович,

Институт математики и механики УрО РАН,
канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник