Моделирование и анализ информационных систем. Т. 23, №4 (2016), с. 466–478
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 23, No 4 (2016), pp. 466–478

©Смирнов А. В., 2016

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-4-466-478

УДК 519.179.2, 519.854.3

Сетевая модель для задачи целочисленного сбалансирования четырехмерной матрицы

Смирнов А. В.

получена 18 апреля 2016

Аннотация.

Рассматривается задача целочисленного сбалансирования четырехмерной матрицы. В исходной вещественной матрице элементы внутренней части (все четыре индекса больше нуля) просуммированы по каждому направлению и каждому плоскому и трехмерному сечению матрицы, а также найдена общая сумма. Данные суммы размещаются в элементах матрицы, у которых один или несколько индексов равны нулю (в соответствии с направлениями суммирования). Ищется целочисленная матрица той же структуры, получаемая из исходной заменой элементов на округления до целого сверху или целого снизу. При этом элемент с четырьмя нулевыми индексами получается по обычным правилам округления.

В статье рассматривается также задача о наибольшем кратном потоке в сети произвольной натуральной кратности k. Определяется три типа дуг в сети: обычная дуга, кратная дуга, мультидуга. Каждая кратная и мультидуга представляет собой объединение k связанных дуг, согласованных между собой. Задаются правила построения сети. Вводится понятие делимой сети и ряд связанных определений.

Определяются общие принципы сведения задачи целочисленного сбалансирования l-мерной матрицы ($l \geq 3$) к задаче о максимальном потоке в делимой кратной сети кратности k.

Задаются правила сведения четырехмерной задачи сбалансирования к задаче о наибольшем потоке в сети кратности 5. Для этой сети формулируется алгоритм нахождения максимального потока, удовлетворяющего условиям разрешимости задачи сбалансирования.

Ключевые слова: целочисленное сбалансирование, кратные сети, кратные потоки, делимые сети, NP-полнота, обобщенный алгоритм пометок, четырехмерные матрицы

Для цитирования: Смирнов А. В., "Сетевая модель для задачи целочисленного сбалансирования четырехмерной матрицы", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:4 (2016), 466–478.

Об авторах:
Смирнов Александр Валерьевич, orcid.org/0000-0002-0980-2507, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры теоретической информатики,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000 Россия, e-mail: alexander_sm@mail.ru

Введение

Различные задачи целочисленного сбалансирования возникают в сфере управления, экономики, финансов. В частности, подобная задача ставится при планировании железнодорожных грузоперевозок. Имеется матричный план по отправке вагонов, который группируется по некоторым показателям (например, направление, тип вагона, владелец вагона и т.п.). Данный план составляется на месяц и естественно является целочисленным. Однако вагоны необходимо отправлять ежедневно. При делении на количество дней в месяце план перестает быть целочисленным. Поэтому возникает проблема такого округления основных параметров, чтобы суммирующие показатели не выходили за определенные рамки. Данный план может быть представлен в виде l-мерной матрицы, где l – это число показателей, по которым ведется суммирование. Соответствующая проблема округления основных параметров называется *задачей целочисленного сбалансирования l-мерной матрицы*.

Очевидно, что задача целочисленного сбалансирования l-мерной матрицы является частным случаем многоиндексных задач линейного программирования (см. [1] – [2]). Часто такие задачи являются NP-полными (например, рассмотренные в работе [3] аксиальная и планарная трехиндексная задача), однако существуют и полиномиально разрешимые многоиндексные задачи (например, трехиндексные задачи линейного программирования с вложенной структурой, см. [4]).

В работах [5] – [6] предложено сведение двухиндексной задачи целочисленного сбалансирования матрицы ($l = 2$) к классической задаче о наибольшем потоке в транспортной сети (см. [7]). Соответственно, задача целочисленного сбалансирования двумерной матрицы является полиномиально разрешимой. В случае же трех и более индексов такое сведение невозможно. Более того, задача целочисленного сбалансирования трехмерной матрицы является NP-полной (см. [8]). При доказательстве соответствующего утверждения строится полиномиальное сведение классической NP-полной задачи о трехмерном сочетании (см. [9] – [10]) к трехиндексной задаче сбалансирования.

Цель данной работы – обобщение для случая четырехмерной задачи сбалансирования результатов, полученных ранее для трехмерной задачи (см. [8], [11] – [13]), а также получение модели кратной сети для решения четырехмерной задачи.

1. Постановка задачи

Имеется четырехмерная вещественная матрица A с элементами $a_{ijpq} \geq 0$ ($i \in \overline{0,n}$, $j \in \overline{0,m}$, $p \in \overline{0,t}$, $q \in \overline{0,s}$), для которых выполнены *условия баланса*:

$$a_{0000} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{t}\sum_{q=1}^{s} a_{ijpq};$$

$$a_{i000} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{t}\sum_{q=1}^{s} a_{ijpq} \quad (i \in \overline{1,n}); \quad a_{0j00} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{p=1}^{t}\sum_{q=1}^{s} a_{ijpq} \quad (j \in \overline{1,m});$$

$$a_{00p0} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{q=1}^{s} a_{ijpq} \quad (p \in \overline{1,t}); \quad a_{000q} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{t} a_{ijpq} \quad (q \in \overline{1,s});$$

$$a_{ij00} = \sum_{p=1}^{t}\sum_{q=1}^{s} a_{ijpq} \quad (i \in \overline{1,n},\ j \in \overline{1,m}); \quad a_{i0p0} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{q=1}^{s} a_{ijpq} \quad (i \in \overline{1,n},\ p \in \overline{1,t});$$

$$a_{i00q} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{t} a_{ijpq} \quad (i \in \overline{1,n},\ q \in \overline{1,s}); \quad a_{0jp0} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{q=1}^{s} a_{ijpq} \quad (j \in \overline{1,m},\ p \in \overline{1,t});$$

$$a_{0j0q} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{p=1}^{t} a_{ijpq} \quad (j \in \overline{1,m},\ q \in \overline{1,s}); \quad a_{00pq} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ijpq} \quad (p \in \overline{1,t},\ q \in \overline{1,s});$$

$$a_{ijp0} = \sum_{q=1}^{s} a_{ijpq}\ (i \in \overline{1,n},\ j \in \overline{1,m},\ p \in \overline{1,t}); \ a_{ij0q} = \sum_{p=1}^{t} a_{ijpq}\ (i \in \overline{1,n},\ j \in \overline{1,m},\ q \in \overline{1,s});$$

$$a_{i0pq} = \sum_{j=1}^{m} a_{ijpq}\ (i \in \overline{1,n},\ p \in \overline{1,t},\ q \in \overline{1,s}); \ a_{0jpq} = \sum_{i=1}^{n} a_{ijpq}\ (j \in \overline{1,m},\ p \in \overline{1,t},\ q \in \overline{1,s}).$$

Задача 1. *Требуется найти целочисленную матрицу D той же размерности, для которой сохраняются условия баланса и выполняются условия:*

$$d_{ijpq} \in \{\lfloor a_{ijpq} \rfloor, \lceil a_{ijpq} \rceil\} \quad (i \in \overline{0,n},\ j \in \overline{0,m},\ p \in \overline{0,t},\ q \in \overline{0,s}); \quad d_{0000} = \lfloor a_{0000} + 0.5 \rfloor.$$

Как и в трехмерном случае (см. [11]), будем считать, что элементы a_{ijpq} ($i > 0$, $j > 0$, $p > 0$, $q > 0$) исходной матрицы A находятся в интервале $[0, 1)$.

Отметим, что ранее мы рассматривали трехмерные задачи сбалансирования с ограничениями первого (см. [11]) и второго (см. [12] – [13]) рода. В первом случае суммирующие элементы итоговой целочисленной матрицы могут отклоняться от исходных менее чем на 1, а во втором – менее чем на 2 (кроме элемента со всеми нулевыми индексами). Таким образом, задача 1 является *задачей целочисленного сбалансирования четырехмерной матрицы с ограничениями первого рода.*

Теорема 1. *Если исходная матрица A содержит только рациональные элементы, то задача 1 является NP-полной.*

При $s = 1$ задача 1 становится трехмерной и утверждение теоремы 1 следует из NP-полноты трехмерной задачи целочисленного сбалансирования (см. [8]).

2. Кратные сети и потоки. Необходимые определения

Для решения трехмерной задачи в работах [11] – [13] предложено их сведение к задаче поиска максимального потока в кратной сети целочисленного сбалансирования трехмерной матрицы (частный случай делимой кратной сети, см. [14] – [15]). Поскольку мы будем строить модель кратной сети и для задачи 1, необходимо напомнить несколько определений, касающихся кратных сетей и потоков.

Определение 1. Кратной (транспортной) сетью натуральной кратности $k > 1$ *назовем ориентированный мультиграф* $G(X, U)$, *между вершинами которого могут быть дуги одного из* 3 *видов:*

1) обычная дуга u^o *с пропускной способностью* $c(u^o)$, *поток по которой не связан с потоком по другим дугам; множество обычных дуг обозначим через* U^o;

2) кратная дуга u^k *между двумя вершинами, которая состоит из* k *дуг одной ориентации с одинаковой пропускной способностью* $c(u^k)$ *и одинаковым потоком по каждой из них; множество кратных дуг обозначим через* U^k;

3) связанная дуга u *между двумя вершинами, имеющая один общий конец с другими* $k-1$ *связанными дугами; множество связанных дуг, выходящих из одной вершины или входящих в одну вершину, будем называть* мультидугой u^m; *пропускная способность всех связанных дуг одной мультидуги одинакова; поток по каждой связанной дуге одной мультидуги одинаков; множество мультидуг обозначим через* U^m.

Множество выходящих из вершины дуг может быть либо только кратными дугами, либо только одной мультидугой (k *связанных дуг), либо только обычными дугами. Из источника* x_0 *сети выходят только кратные дуги, а в сток* z *сети входит только одна мультидуга. Если из вершины выходят связанные дуги мультидуги, то в нее обязательно входит кратная дуга. Если в вершину входит мультидуга, то из нее может выходить только кратная дуга. Все пропускные способности дуг целочисленны.*

Определение 2. Кратным потоком *по сети называется целочисленная функция, определенная на множестве дуг* $U = U^o \cup U^k \cup U^m$, *для которой выполнены условия неотрицательности, ограниченности (пропускными способностями дуг) и неразрывности потока (в каждой вершине).*

Определение 3. Величиной кратного потока *называется сумма* φ_z *входящего потока для стока* z, *равная сумме выходящего из источника потока. В силу того, что поток по каждой обычной дуге и по каждой связанной дуге каждой кратной и мультидуги должен быть целочислен, величина* φ_z *должна быть кратна* k.

Обозначим через $c(u)$ *пропускную способность* дуги u, а через $f(u)$ – *поток* на ней.

Определение 4. *Пусть имеется кратная сеть произвольной кратности* k. *Пусть при удалении всех мультидуг сеть распадается на* $k+2$ *слабо связных компоненты, при этом одна компонента состоит только из вершины* z, *компонента, содержащая вершину* x_0, *содержит только кратные дуги, а остальные* k *компонент содержат только обычные дуги. Если при этом каждая мультидуга имеет ровно один конец в каждой из* k *компонент, содержащих обычные дуги, то такую сеть мы будем называть* делимой.

Обозначим через P_0 компоненту делимой сети, содержащую кратные дуги, через $P_1, \ldots, P_k$ обозначим компоненты, содержащие обычные дуги.

Определение 5. Частью G_i *делимой сети (*$i \in \overline{1,k}$*) назовем объединение соответствующей компоненты* P_i *с инцидентными ей связанными дугами всех мультидуг, кроме мультидуги с концом в* z, *а также с* i*-й связанной дугой каждой кратной дуги компоненты* P_0.

Обозначим начальные вершины мультидуги с концом в z через $z_1, \ldots, z_k$. Вершины, являющиеся началом остальных мультидуг, будем обозначать через y_j.

Определение 6. *Объединение мультидуги u_z^m, идущей из вершин $z_1, \ldots, z_k$ в z и k путей μ_r ($r \in \overline{1,k}$), каждый из которых является ориентированным путем в соответствующей части G_r из вершины x_0 в вершину z_r, назовем* обобщенным путем, *если каждый из путей μ_r проходит через одну и ту же вершину y_j.*

Определение 7. *Кратный поток назовем* полным, *если любой обобщенный путь из x_0 в z содержит дугу u (обычную, кратную или мультидугу), поток по которой равен ее пропускной способности $f(u) = c(u)$.*

Определение 8. Проекция C_i *($i \in \overline{1,k}$) подграфа C на часть сети G_i – это часть подграфа C, образованная его вершинами и дугами, принадлежащими G_i.*

Определение 9. *Так как части G_i ($i \in \overline{1,k}$) сети G представляют собой обычные транспортные сети с источником x_0 и стоком z_i, то будем называть некоторый путь из x_0 в z_i* путем прорыва *в части G_i, если $f(u) < c(u)$ на прямых дугах и $f(u) > 0$ на обратных дугах этого пути.*

Пусть в делимой сети определен некоторый поток φ величины $\varphi_z \geq 0$.

Определение 10. Кратным циклом *в делимой сети $G(X,U)$, где X – множество вершин, U – множество дуг (обычных, кратных или мультидуг), назовем такой подграф $C(X',U')$, $X' \subseteq X$, $U' \subseteq U$, для которого:*

1) проекции $C_1, \ldots, C_k$ на части $G_1, \ldots, G_k$ соответственно есть объединение некоторых циклов, причем дуги, поток по которым ненулевой, могут проходиться в обратном направлении;

2) проекции $C_1, \ldots, C_k$ согласованы (одинаковы) на общей части подграфов $G_1, \ldots, G_k$;

3) C_1 можно представить в виде $C_1 = \cup\{C_1^j\}$, где C_1^j – некоторые циклы и $C_1^j \not\subseteq C_1^k$ $\forall j \neq k$; при этом для любой дуги u из G_1 выполняется неравенство

$$0 \leq f(u) + a^+(u) - a^-(u) \leq c(u),$$

где $a^+(u)$ – это число циклов C_1^j, в которых дуга u проходится в прямом направлении, а $a^-(u)$ – это число циклов C_1^j, в которых дуга u проходится в обратном направлении. Такое же условие должно выполняться и для $C_2, \ldots, C_k$.

Определение 11. Обобщенным путем прорыва *в делимой сети $G(X,U)$ для некоторого кратного потока φ назовем такой подграф $S(X',U')$, $X' \subseteq X$, $U' \subseteq U$, для которого:*

1) каждая из проекций $S_1, \ldots, S_k$ на части $G_1, \ldots, G_k$ соответственно есть объединение ровно одного пути прорыва из x_0 в z_i и некоторых циклов, причем дуги, поток по которым ненулевой, могут проходиться в обратном направлении;

2) проекции $S_1, \ldots, S_k$ согласованы (одинаковы) на общей части подграфов $G_1, \ldots, G_k$;

3) S_1 можно представить в виде $S_1 = \mu_1 \cup \{C_1^j\}$, где μ_1 – путь прорыва, C_1^j – некоторые циклы и $C_1^j \not\subseteq C_1^k$ $\forall j \neq k$; при этом для любой дуги u из G_1 выполняется неравенство

$$0 \leq f(u) + a^+(u) - a^-(u) \leq c(u),$$

где $a^+(u)$ *– это число элементов множества* $\mu_1 \cup \{C_1^j\}$, *в которых дуга* u *проходится в прямом направлении, а* $a^-(u)$ *– это число элементов множества* $\mu_1 \cup \{C_1^j\}$, *в которых дуга* u *проходится в обратном направлении. Такое же условие должно выполняться и для* $S_2, \ldots, S_k$*;*

4) Дуга $(\{z_1, \ldots, z_k\}, z) \in U'$ *и* $f(\{z_1, \ldots, z_k\}, z) < c(\{z_1, \ldots, z_k\}, z)$.

5) S *не содержит кратного цикла.*

Обозначим $G_\varphi = G(X, U_\varphi)$; $U_\varphi = \{u \mid f(u) \geq 0\}$.

Теорема 2 (см. [14]). *Пусть* $\varphi^1(U)$, $\varphi^2(U)$ *– два полных потока в делимой сети* $G(X, U)$, *причем* $\varphi_z^1 \leq \varphi_z^2$. *Пусть* $\varphi^0(U) = \varphi^2(U) - \varphi^1(U)$. *Тогда граф* $G_{\varphi^0} = \{S_i\} \cup \{C_j\}$, *где* $\{S_i\}$ *– множество всех обобщенных путей прорыва из* x_0 *в* z, *а* $\{C_j\}$ *– множество всех кратных циклов. В случае, когда* $\varphi_z^1 = \varphi_z^2 = \varphi_z^{\max}$, $\{S_i\} = \varnothing$.

3. Общие принципы сведения задачи сбалансирования к задаче о наибольшем кратном потоке

Прежде чем перейти к описанию сетевой модели для задачи 1, определим общие принципы сведения задачи целочисленного сбалансирования к задаче о наибольшем кратном потоке.

В трехмерном случае делимая кратная сеть целочисленного сбалансирования строилась так, чтобы любой обобщенный путь из x_{000} в z, согласованный на общей части сети, фактически соответствовал обходу элементов a_{000}, a_{i00}, a_{0j0}, a_{00p}, a_{ij0}, a_{i0p}, a_{0jp}, a_{ijp} исходной трехмерной матрицы для некоторых $i > 0$, $j > 0$, $p > 0$ (см. [11] – [12]). Этот обход начинается с элемента a_{000}, завершается в нем же, а все остальные элементы посещаются ровно один раз. Данные элементы формируют куб в исходной матрице A, и увеличение потока на таком пути приводит к увеличению значения a_{ijp} и согласованному увеличению всех связанных с ним суммирующих элементов. Такой обход осуществляется в последовательности

$$a_{000} \to a_{i00} \to a_{ij0} \to a_{ijp} \to \left\{ \begin{array}{c} a_{0jp} \to a_{0j0} \\ a_{i0p} \to a_{00p} \end{array} \right\} \to a_{000}.$$

Используя мультидуги, мы можем осуществить указанные в последовательности два ветвления. Важным моментом при этом является то, что для каждого конкретного a_{ijp} пара элементов $\{a_{0jp}, a_{i0p}\}$ определяется единственным образом (в кратной сети вершина может быть концом только одной мультидуги).

Для произвольного $l > 3$ логично потребовать, чтобы сведение l-мерной задачи сбалансирования к поиску максимального потока в кратной сети осуществлялось похожим образом. В этом случае мы сможем обобщить многие результаты для трехмерной задачи на случай $l > 3$. Формально можно поставить следующую задачу.

Задача 2. *Для задачи целочисленного сбалансирования* l*-мерной матрицы* A *(*$l \geq 3$*) требуется осуществить такое ее сведение к задаче нахождения максимального кратного потока в сети* $G(X, U)$ *кратности* k, *чтобы выполнялись условия:*

1) каждому элементу матрицы A соответствует хотя бы одна вершина сети $G(X,U)$; каждая вершина сети $G(X,U)$ соответствует ровно одному элементу матрицы A;

2) источник и сток сети соответствуют корневому элементу матрицы (все индексы равны 0);

3) любой обобщенный путь из источника в сток проходит ровно через одну вершину, соответствующую элементу x из внутренней части матрицы A (все индексы положительны). Этот путь реализует обход гиперкуба, состоящего из элемента x и всех связанных с ним суммирующих элементов, причем каждый суммирующий элемент (кроме корневого) учитывается только один раз;

4) сеть $G(X,U)$ является делимой;

5) лучшим считается такое сведение, для которого параметр k меньше;

6) сведение полиномиально.

Обсудим, каким образом задача 2 может быть решена в случае $l = 4$.

В четырехмерном случае кратная сеть должна строиться таким образом, чтобы любой обобщенный путь из x_{0000} в z, согласованный на общей части сети, соответствовал обходу 16 вершин гиперкуба. При попытке свести задачу 1 к сетевой задаче кратности 3 с использованием подхода, аналогичного трехмерному случаю, мы получим следующий вариант обхода (или подобный ему):

$$a_{0000} \to a_{i000} \to a_{ij00} \to a_{ijp0} \to a_{ijpq} \to \left\{ \begin{array}{l} a_{0jpq} \to a_{0jp0} \to a_{0j00} \\ a_{i0pq} \to a_{00pq} \to a_{00p0} \\ a_{ij0q} \to a_{0j0q} \to a_{000q} \end{array} \right\} \to a_{0000}.$$

Нетрудно убедиться, что при подобном подходе всегда остаются неучтенными два суммирующих элемента (в данном случае это элементы a_{i00q} и a_{i0p0}), то есть задача 2 не может быть решена таким образом.

Исправить ситуацию можно двумя способами.

Первый способ состоит в том, чтобы использовать 4 ветвления вместо 2:

$$a_{0000} \to a_{i000} \to \left\{ \begin{array}{l} a_{ij00} \to a_{ijp0} \\ a_{i0p0} \to a_{i0pq} \\ a_{i00q} \to a_{ij0q} \end{array} \right\} \to a_{ijpq} \to a_{0jpq} \to \left\{ \begin{array}{l} a_{0jp0} \to a_{0j00} \\ a_{00pq} \to a_{00p0} \\ a_{0j0q} \to a_{000q} \end{array} \right\} \to a_{0000}.$$

Данный способ является не самым удачным, поскольку для a_{i000} существует несколько вариантов ветвлений, соответствующих разным значениям j, p, q, следовательно, в кратной сети требуется допустить возможность связывания с одной вершиной более одной мультидуги, что существенно усложняет модель в целом. Естественно, такая сеть не будет делимой, следовательно, такой способ также не подходит для задачи 2.

Второй способ состоит в сведении задачи 1 к поиску максимального потока в

сети кратности 5. Для этого необходимо обойти вершины в последовательности

$$a_{0000} \to a_{i000} \to a_{ij00} \to a_{ijp0} \to a_{ijpq} \to \left\{ \begin{array}{lll} a_{0jpq} \to a_{0jp0} & \to a_{0j00} \\ a_{i0pq} \to a_{00pq} & \to a_{00p0} \\ a_{ij0q} \to a_{0j0q} & \to a_{000q} \\ \quad a_{i00q} & \\ \quad a_{i0p0} & \end{array} \right\} \to a_{0000}.$$

Данный способ удовлетворяет условиям задачи 2, однако этого нам удается добиться только за счет увеличения значения параметра k до 5. Тем не менее, этот способ сведения выглядит наиболее предпочтительным, поэтому в следующем разделе мы рассмотрим именно его.

4. Сетевая модель для четырехмерной задачи сбалансирования

Формально сведение задачи 1 к задаче о наибольшем потоке в сети кратности 5 выполняется по следующим правилам.

Каждому элементу a_{ijpq} матрицы A соответствует вершина сети x_{ijpq}. Каждой вершине x_{ijpq}, где более чем 1 индекс имеет нулевые значения, соответствует дополнительная вершина x'_{ijpq}; вершинам z_r ($r \in \overline{1,5}$) соответствуют дополнительные вершины z'_r. Источником сети является вершина x_{0000}, стоком – вершина z.

Пропускные способности дуг определяются по следующим правилам ($i \in \overline{1,n}$, $j \in \overline{1,m}$, $p \in \overline{1,t}$, $q \in \overline{1,s}$).

Пропускные способности кратных дуг:

$$c(x_{0000}, x_{i000}) = 5\lfloor a_{i000} \rfloor; \quad c(x_{0000}, x'_{0000}) = 5\left(\lfloor a_{0000} + 0.5 \rfloor - \sum_{i=1}^{n} \lfloor a_{i000} \rfloor\right);$$

$$c(x'_{0000}, x_{i000}) = 5(\lceil a_{i000} \rceil - \lfloor a_{i000} \rfloor); \quad c(x_{i000}, x_{ij00}) = 5\lfloor a_{ij00} \rfloor;$$

$$c(x_{i000}, x'_{i000}) = 5\left(\lceil a_{i000} \rceil - \sum_{j=1}^{m} \lfloor a_{ij00} \rfloor\right); \quad c(x'_{i000}, x_{ij00}) = 5(\lceil a_{ij00} \rceil - \lfloor a_{ij00} \rfloor);$$

$$c(x_{ij00}, x_{ijp0}) = 5\lfloor a_{ijp0} \rfloor; \quad c(x_{ij00}, x'_{ij00}) = 5\left(\lceil a_{ij00} \rceil - \sum_{p=1}^{t} \lfloor a_{ijp0} \rfloor\right);$$

$$c(x'_{ij00}, x_{ijp0}) = 5(\lceil a_{ijp0} \rceil - \lfloor a_{ijp0} \rfloor); \quad c(x_{ijp0}, x_{ijpq}) = 5\lceil a_{ijpq} \rceil.$$

Пропускные способности мультидуг:

$$c(x_{ijpq}, \{x_{0jpq}, x_{i0pq}, x_{ij0q}, x_{i00q}, x_{i0p0}\}) = 5\lceil a_{ijpq} \rceil; \; c(\{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}, z) = 5\lfloor a_{0000} + 0.5 \rfloor.$$

Пропускные способности обычных дуг в части G_1:

$$c(x_{0jpq}, x_{0jp0}) = \lfloor a_{0jpq} \rfloor; \quad c(x_{0jpq}, x'_{0jp0}) = \lceil a_{0jpq} \rceil - \lfloor a_{0jpq} \rfloor;$$

$$c(x'_{0jp0}, x_{0jp0}) = \lceil a_{0jp0} \rceil - \sum_{q=1}^{s} \lfloor a_{0jpq} \rfloor; \quad c(x_{0jp0}, x_{0j00}) = \lfloor a_{0jp0} \rfloor;$$

$$c(x_{0jp0}, x'_{0j00}) = \lceil a_{0jp0} \rceil - \lfloor a_{0jp0} \rfloor; \quad c(x'_{0j00}, x_{0j00}) = \lceil a_{0j00} \rceil - \sum_{p=1}^{t} \lfloor a_{0jp0} \rfloor;$$

$$c(x_{0j00}, z_1) = \lfloor a_{0j00} \rfloor;\ c(x_{0j00}, z'_1) = \lceil a_{0j00} \rceil - \lfloor a_{0j00} \rfloor;\ c(z'_1, z_1) = \lfloor a_{0000} + 0.5 \rfloor - \sum_{j=1}^{m} \lfloor a_{0j00} \rfloor.$$

Пропускные способности обычных дуг в части G_2:

$$c(x_{i0pq}, x_{00pq}) = \lfloor a_{i0pq} \rfloor; \quad c(x_{i0pq}, x'_{00pq}) = \lceil a_{i0pq} \rceil - \lfloor a_{i0pq} \rfloor;$$

$$c(x'_{00pq}, x_{00pq}) = \lceil a_{00pq} \rceil - \sum_{i=1}^{n} \lfloor a_{i0pq} \rfloor; \quad c(x_{00pq}, x_{00p0}) = \lfloor a_{00pq} \rfloor;$$

$$c(x_{00pq}, x'_{00p0}) = \lceil a_{00pq} \rceil - \lfloor a_{00pq} \rfloor; \quad c(x'_{00p0}, x_{00p0}) = \lceil a_{00p0} \rceil - \sum_{q=1}^{s} \lfloor a_{00pq} \rfloor;$$

$$c(x_{00p0}, z_2) = \lfloor a_{00p0} \rfloor;\ c(x_{00p0}, z'_2) = \lceil a_{00p0} \rceil - \lfloor a_{00p0} \rfloor;\ c(z'_2, z_2) = \lfloor a_{0000} + 0.5 \rfloor - \sum_{p=1}^{t} \lfloor a_{00p0} \rfloor.$$

Пропускные способности обычных дуг в части G_3:

$$c(x_{ij0q}, x_{0j0q}) = \lfloor a_{ij0q} \rfloor; \quad c(x_{ij0q}, x'_{0j0q}) = \lceil a_{ij0q} \rceil - \lfloor a_{ij0q} \rfloor;$$

$$c(x'_{0j0q}, x_{0j0q}) = \lceil a_{0j0q} \rceil - \sum_{i=1}^{n} \lfloor a_{ij0q} \rfloor; \quad c(x_{0j0q}, x_{000q}) = \lfloor a_{0j0q} \rfloor;$$

$$c(x_{0j0q}, x'_{000q}) = \lceil a_{0j0q} \rceil - \lfloor a_{0j0q} \rfloor; \quad c(x'_{000q}, x_{000q}) = \lceil a_{000q} \rceil - \sum_{j=1}^{m} \lfloor a_{0j0q} \rfloor;$$

$$c(x_{000q}, z_3) = \lfloor a_{000q} \rfloor;\ c(x_{000q}, z'_3) = \lceil a_{000q} \rceil - \lfloor a_{000q} \rfloor;\ c(z'_3, z_3) = \lfloor a_{0000} + 0.5 \rfloor - \sum_{q=1}^{s} \lfloor a_{000q} \rfloor.$$

Пропускные способности обычных дуг в части G_4:

$$c(x_{i00q}, z_4) = \lfloor a_{i00q} \rfloor;\ c(x_{i00q}, z'_4) = \lceil a_{i00q} \rceil - \lfloor a_{i00q} \rfloor;\ c(z'_4, z_4) = \lfloor a_{0000} + 0.5 \rfloor - \sum_{i=1}^{n} \sum_{q=1}^{s} \lfloor a_{i00q} \rfloor.$$

Пропускные способности обычных дуг в части G_5:

$$c(x_{i0p0}, z_5) = \lfloor a_{i0p0} \rfloor;\ c(x_{i0p0}, z'_5) = \lceil a_{i0p0} \rceil - \lfloor a_{i0p0} \rfloor;\ c(z'_5, z_5) = \lfloor a_{0000} + 0.5 \rfloor - \sum_{i=1}^{n} \sum_{p=1}^{t} \lfloor a_{i0p0} \rfloor.$$

Введем для полученной кратной сети целочисленного сбалансирования *условия разрешимости* ($i \in \overline{1,n}$, $j \in \overline{1,m}$, $p \in \overline{1,t}$, $q \in \overline{1,s}$):

$$f(x_{i000}, x_{ij00}) + f(x'_{i000}, x_{ij00}) \geq c(x_{i000}, x_{ij00});$$

$$f(x_{ij00}, x_{ijp0}) + f(x'_{ij00}, x_{ijp0}) \geq c(x_{ij00}, x_{ijp0});$$
$$f(x_{0jpq}, x_{0jp0}) + f(x_{0jpq}, x'_{0jp0}) \geq c(x_{0jpq}, x_{0jp0});$$
$$f(x_{0jp0}, x_{0j00}) + f(x_{0jp0}, x'_{0j00}) \geq c(x_{0jp0}, x_{0j00});$$
$$f(x_{i0pq}, x_{00pq}) + f(x_{i0pq}, x'_{00pq}) \geq c(x_{i0pq}, x_{00pq});$$
$$f(x_{00pq}, x_{00p0}) + f(x_{00pq}, x'_{00p0}) \geq c(x_{00pq}, x_{00p0});$$
$$f(x_{ij0q}, x_{0j0q}) + f(x_{ij0q}, x'_{0j0q}) \geq c(x_{ij0q}, x_{0j0q});$$
$$f(x_{0j0q}, x_{000q}) + f(x_{0j0q}, x'_{000q}) \geq c(x_{0j0q}, x_{000q}).$$

Теорема 3. *Для того, чтобы задача 1 имела решение, необходимо и достаточно, чтобы в соответствующей ей кратной сети существовал максимальный кратный поток φ величины $\varphi_z = 5\lfloor a_{0000} + 0.5\rfloor$, для которого выполняются условия разрешимости.*

Справедливость теоремы 3 следует непосредственно из правил построения сети и условия неразрывности потока в каждой вершине. Отметим также, что решение задачи о максимальном кратном потоке указанного вида будет индуцировать решение задачи 1. При этом d_{ijpq} полагается равным одной пятой величины потока, проходящего через вершину x_{ijpq}, если она является концом кратной дуги; величине потока, проходящего через вершину x_{ijpq}, если она является концом обычной дуги.

Примечательно, что условия разрешимости необходимо формулировать только для кратных дуг, а также для обычных дуг частей G_1, G_2 и G_3. Если задача 1 разрешима, то соблюдение ограничений, связанных с минимально допустимым потоком на дугах в частях G_4, G_5, обеспечивается автоматически за счет того, что сумма пропускных способностей дуг, входящих в z_4 и z_5, равна $\lfloor a_{0000} + 0.5\rfloor$.

Алгоритм решения задачи 1 получается в результате простого обобщения алгоритма решения трехмерной задачи.

Алгоритм 1. Алгоритм выполняется в три этапа.

1. *Этап получения полного потока.* На данном этапе увеличения потока можно добиваться, находя все возможные обобщенные пути прорыва из x_{0000} в z через вершины x_{ijpq} ($i \in \overline{1,n}$, $j \in \overline{1,m}$, $p \in \overline{1,t}$, $q \in \overline{1,s}$) без обратных дуг и увеличивая поток по ним. В итоге будет получен полный поток.

2. *Этап увеличения потока.* Если полученный полный поток не является максимальным, то увеличиваем поток при помощи обобщенного алгоритма пометок (см. [15]) до тех пор, пока поток не станет максимальным. Напомним, что идея обобщенного алгоритма пометок состоит в следующем: в проекциях $G_1, \ldots, G_5$ поочередно строятся пути прорыва $\mu_1, \ldots, \mu_5$ (возможно, в объединении с некоторыми циклами) до тех пор, пока пути во всех пяти проекциях не станут согласованными, либо же не останется вариантов для продолжения построения пути. В первом случае объединение $\mu_1, \ldots, \mu_5$ с мультидугой с концом в z даст обобщенный путь прорыва, во втором случае производится откат до «точки ветвления», после чего выполнение алгоритма возобновляется. Если точкой ветвления оказывается x_{0000} и при этом x_{0000} не помечена, то задача целочисленного сбалансирования не имеет решения.

3. *Этап коррекции потока.* Если максимальный поток имеет величину $5\lfloor a_{0000} + 0.5\rfloor$, но не удовлетворяет условиям разрешимости, то выполняем коррекцию потока

при помощи модификации обобщенного алгоритма пометок, пока не будут выполнены все условия разрешимости или не будет установлена невозможность такой коррекции.

На шаге 3 модификация обобщенного алгоритма пометок для сети кратности 5 получается таким же образом, как и для сети кратности 2 (см. [11]), с точностью до количества частей G_r.

Теорема 4. *Задача 1 может быть решена с помощью алгоритма 1.*

Доказательство. Из теоремы 4 из статьи [15] следует, что если в сети $G(X, U)$ существует максимальный поток величины $5\lfloor a_{0000} + 0.5\rfloor$, то он может быть найден с помощью шагов 1–2 алгоритма 1.

Для доказательства того, что шаг 3 выполнит требуемую коррекцию потока всегда, когда это возможно, достаточно повторить рассуждения из части II доказательства теоремы 5 из статьи [11]. При этом все выводы, сделанные в статье [11] для частей G_1 и G_2 кратной сети целочисленного сбалансирования трехмерной матрицы, дословно сохраняются для частей G_r $(r \in \overline{1, 5})$ рассматриваемой сети $G(X, U)$.

Теорема 4 доказана.

Отметим, что по аналогии с трехмерной задачей целочисленного сбалансирования с ограничениями второго рода (см. [12]) можно поставить также *задачу целочисленного сбалансирования четырехмерной матрицы с ограничениями второго рода*. Сетевая модель при этом будет отличаться только пропускными способностями дуг, а теоремы 3 и 4 будут по-прежнему справедливы.

Заключение

Данная работа является продолжением исследований, начатых в [8], [11] – [15].

Основным результатом статьи является постановка задачи целочисленного сбалансирования с ограничениями первого рода в четырехмерном случае и сведение данной задачи к поиску максимального кратного потока в сети кратности 5. Сведение осуществляется таким образом, что результаты, полученные ранее для трехмерной задачи сбалансирования, легко обобщаются для четырехмерного случая.

Список литературы / References

[1] Корбут А. А., Финкельштейн Ю. Ю., *Дискретное программирование*, Наука, Москва, 1969; [Korbut A. A., Finkelstein J. J., *Diskretnoe programmirovanie*, Nauka, Moskva, 1969, (in Russian).]

[2] Раскин Л. Г., Кириченко И. О., *Многоиндексные задачи линейного программирования*, Радио и связь, Москва, 1982; [Raskin L. G., Kirichenko I. O., *Mnogoindeksnye zadachi lineynogo programmirovaniya*, Radio i svyaz, Moskva, 1982, (in Russian).]

[3] Spieksma F. C. R., "Multi index assignment problems: complexity, approximation, applications", *Nonlinear Assignment Problems. Algorithms and Applications*, eds. P. M. Pardalos, L. S. Pitsoulis, Kluwer Academic Publishers, 2000, 1–11.

[4] Афраймович Л. Г., "Трехиндексные задачи линейного программирования с вложенной структурой", *Автоматика и телемеханика*, 2011, № 8, 109–120; English transl.: Afraimovich L. G., "Three-index linear programs with nested structure", *Automation and Remote Control*, **72**:8 (2011), 1679–1689.

[5] Кондаков А. С., Рублев В. С., "Задача сбалансирования матрицы плана", *Доклады Одесского семинара по дискретной математике*, Астропринт, Одесса, 2005, 24–26; [Kondakov A. S., Roublev V. S., "Zadacha sbalansirovaniya matritsy plana", *Doklady Odesskogo seminara po diskretnoy matematike*, Astroprint, Odessa, 2005, 24–26, (in Russian).]

[6] Коршунова Н. М., Рублев В. С., "Задача целочисленного сбалансирования матрицы", *Современные проблемы математики и информатики*, ЯрГУ, Ярославль, 2000, 145–150; [Korshunova N. M., Roublev V. S., "Zadacha tselochislennogo sbalansirovaniya matritsy", *Sovremennye problemy matematiki i informatiki*, Yaroslavl State University, Yaroslavl, 2000, 145–150, (in Russian).]

[7] Ford L. R., Fulkerson D. R., *Flows in Networks*, Princeton University Press, 1962.

[8] Рублев В. С., Смирнов А. В., "NP-полнота задачи целочисленного сбалансирования трехмерной матрицы", *Доклады Академии Наук*, **435**:3 (2010), 314–316; English transl.: Roublev V. S., Smirnov A. V., "NP-Completeness of the Integer Balancing Problem for a Three-Dimensional Matrix", *Doklady Mathematics*, **82**:3 (2010), 912–914.

[9] Garey M. R., Johnson D. S., *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W. H. Freeman, 1979.

[10] Karp R., "Reducibility among combinatorial problems", *R. E. Miller, J. W. Thatcher (Eds.). Complexity of Computer Computations*, Plenum, 1972, 85–103.

[11] Рублев В. С., Смирнов А. В., "Задача целочисленного сбалансирования трехмерной матрицы и алгоритмы ее решения", *Моделирование и анализ информационных систем*, **17**:2 (2010), 72–98; [Roublev V. S., Smirnov A. V., "The Problem of Integer-Valued Balancing of a Three-Dimensional Matrix and Algorithms of Its Solution", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **17**:2 (2010), 72–98, (in Russian).]

[12] Smirnov A. V., "Some Solvability Classes for the Problem of Integer Balancing of a Three-Dimensional Matrix with Constraints of the Second Type", *Automatic Control and Computer Sciences*, **48**:7 (2014), 543–553.

[13] Smirnov A. V., "Heuristic Algorithms for the Problem of Integer Balancing of a Three-Dimensional Matrix with Constraints of the Second Type", *Automatic Control and Computer Sciences*, **49**:7 (2015), 473–483.

[14] Смирнов А. В., "Задача о наибольшем кратном потоке в делимой сети и ее частные случаи", *Моделирование и анализ информационных систем*, **22**:4 (2015), 533–545; [Smirnov A. V., "The Problem of Finding the Maximal Multiple Flow in the Divisible Network and its Special Cases", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **22**:4 (2015), 533–545, (in Russian).]

[15] Рублев В. С., Смирнов А. В., "Потоки в кратных сетях", *Ярославский педагогический вестник*, **3**:2 (2011), 60–68; [Rublev V. S., Smirnov A. V., "Flows in Multiple Networks", *Yaroslavsky Pedagogichesky Vestnik*, **3**:2 (2011), 60–68, (in Russian).]

Smirnov A. V., "Network Model for The Problem of Integer Balancing of a Four-dimensional Matrix", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:4 (2016), 466–478.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-4-466-478

Abstract. The problem of integer balancing of a four-dimensional matrix is studied. The elements of the inner part (all four indices are greater than zero) of the given real matrix are summed in each direction and each two- and three-dimensional section of the matrix; the total sum is also found. These sums are placed into the elements where one or more indices are equal to zero (according to the summing directions). The problem is to find an integer matrix of the same structure, which can be produced from the initial one by replacing the elements with the largest previous or the smallest following integer. At the same time, the element with four zero indices should be produced with standard rules of rounding-off. In the article the problem of finding the maximum multiple flow in the network of any natural multiplicity k is also studied. There are arcs of three types: ordinary arcs, multiple arcs and multi-arcs. Each multiple and multi-arc is a union of k linked arcs, which are adjusted with each other. The network constructing rules are described. The definitions of a divisible network and some associated subjects are stated. There are defined the basic principles for reducing the integer balancing problem of an l-dimensional matrix ($l \geq 3$) to the problem of finding the maximum flow in a divisible multiple network of multiplicity k. There are stated the rules for reducing the four-dimensional balancing problem to the maximum flow problem in the network of multiplicity 5. The algorithm of finding the maximum flow, which meets the solvability conditions for the integer balancing problem, is formulated for such a network.

Keywords: integer balancing, multiple networks, multiple flows, divisible networks, NP-completeness, generalized labeling algorithm, four-dimensional matrices

On the authors:
Smirnov Alexander Valeryevich, orcid.org/0000-0002-0980-2507, PhD, Associate Professor
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia, e-mail: alexander_sm@mail.ru