Моделирование и анализ информационных систем. Т. 23, №4 (2016), с. 492–507
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 23, No 4 (2016), pp. 492–507

©Цирлин А. М., Ахременков Ал. А., 2016

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-4-492-507

УДК 519.8

Вероятностный анализ систем организации турниров

Цирлин А. М., Ахременков Ал. А.

получена 4 февраля 2016

Аннотация.

В работе предложен критерий для сравнения структуры организации турниров в спортивных соревнованиях по вероятности победы в турнире объективно сильнейшего участника. Проанализированы две вероятностные модели результатов парной игры. Получены расчетные формулы для оценки такой вероятности и для плотности распределения вероятности числа очков, набранных в турнире тем или иным игроком. С использованием метода стохастического моделирования проанализированы некоторые реально использующиеся структуры турниров. Полученные результаты определяют и порядок предъявления экспертам объектов при организации экспертизы посредством серии парных сравнений. Получена аналитическая оценка вероятности результатов турнира или серии парных сравнений, позволяющая во многих случаях избежать трудоемкую процедуру перебора допустимых вариантов.

Ключевые слова: органиция турниров, вероятность, парные сравнения

Для цитирования: Цирлин А. М., Ахременков Ал. А., "Вероятностный анализ систем организации турниров", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:4 (2016), 492–507.

Об авторах:
Цирлин Анатолий Михайлович, orcid.org/0000-0002-3637-6160, д-р техн. наук., профессор,
Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН
ул. Петра Первого, 4а, с. Веськово, Переславский р-он, Ярославская обл. 152020 Россия, e-mail: tsirlin@sarc.botik.ru

Ахременков Александр Александрович, orcid.org/0000-0002-5090-6041, канд. физ.-мат. наук,
Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН
ул. Петра Первого, 4а, с. Веськово, Переславский р-он, Ярославская обл. 152020 Россия, e-mail: alex@eco.botik.ru

Введение

Возникновение и развитие теории вероятностей во многом связано с потребностью анализа игр (см. [1]). Методы теории вероятностей позволяют при некоторых условиях, наложенных на случайный элемент игры, предсказать средние величины, характеризующие ее результаты, при многократном повторении.

Вероятностным методам оценки решения комбинаторных задач посвящена обширная литература (см. [2] – [13]). Ниже рассматривается постановка и анализ решения подобной задачи как экстремальной, критерий которой определен на множестве возможных систем обработки результатов парных сравнений.

Для многих видов игр целью является выявление относительной силы игроков, при этом организация турниров может быть разной для разных соревнований, различных видов спорта и пр. В одних случаях турнир проводят по круговой системе, в других — по кубковой или по «швейцарской». В некоторых случаях игроков предварительно разбивают на группы с последующим розыгрышем первенства между победителями групп и пр. При этом в основе вывода о победителе при любой организации турнира лежат результаты парных сравнений [14] – [19].

В связи с этим возникают вопросы:

–Как оценить организацию турнира?

–Каково должно быть минимальное число игр, чтобы при заданном числе игроков выявить сильнейшего с заданной вероятностью?

–Какова вероятность того, что в результате турнира порядок занятых игроками мест совпадает с их фактической «силой»?

–Как сказывается на этой вероятности правило начисления очков по результатам игры?

Заданными будем считать число игроков и суммарное число игр. Так как целью турнира является выявление сильнейшего игрока, интуитивно ясно, что турнир должен быть организован так, чтобы число встреч между близкими по силе игроками было больше, а число встреч, в которых результат может быть предсказан с вероятностью близкой к единице, меньше.

Для анализа схемы турнира используем вероятностную модель результата встречи двух игроков, причем вероятность того или иного результата встречи должна зависеть от их „силы“. Этот показатель может быть введен по-разному: как вероятность нахождения игрока в том или ином из его возможных состояний, как среднее значение некоторого случайного показателя, сравнение которого для двух участников определяет результат встречи, и пр.

Ниже сделана попытка провести аналитический и численный анализ различных систем розыгрыша. При этом мы первоначально используем наиболее простые вероятностную модель игрока и правило начисления очков. Затем обобщим рассмотрение на модель, более близкую к реальности.

Структура турнира тем лучше, чем больше при заданном общем числе игр N вероятность того, что игрок с наибольшей „силой“ окажется победителем (наберет по результатам турнира не меньшее число очков, чем любой другой его участник).

1. Дискретное распределение состояния игроков и плотность распределения вероятности числа набранных очков

Пусть состояние ξ_j j-го игрока — случайная дискретная величина, принимающая значение 1 с вероятностью s_j и ноль с вероятностью $1 - s_j$. Величину s_j будем называть силой j-го игрока. Состояния игроков независимы друг от друга. Общее число игроков обозначим через M.

Турнир представляет собой последовательность парных сравнений (игр), в которой сравниваются состояния игроков. Если у j-го игрока оно оказалось больше,

чем у k-го, он получает два очка, а его соперник ноль, если состояния одинаковы, то каждый получает по очку. Игроки упорядочены так, что $s_1 > s_2 > ...s_M$. Результат игры, а значит, набранное в ней каждым участником число очков r – случайная величина, характеризующаяся плотностью распределения вероятностей $P(r)$, определенной на множестве значений $r = 0, 1, 2$ очка.

Вероятностный характер результатов каждой игры приводит к появлению случайных ошибок. Турнир можно рассматривать как фильтр, отделяющий полезный сигнал (априорное распределение сил) от помехи. Этот фильтр тем лучше, чем ближе финальная расстановка игроков к априорной расстановке их сил.

Упорядочим игроков по величине s_j так, что $s_1 > s_2 > s_3 > ....$ Результат розыгрыша назовем *идеальным*, если занятые игроками места (набранные числа очков) $r_1 \geq r_2 \geq r_3...$, т.е. если порядок мест, определяющийся набранным числом очков и системой розыгрыша, соответствует распределению сил. Результат розыгрыша назовем *правильным*, если игрок, имеющий силу s_1, оказался на первом месте или поделил его с другими игроками, т.е. $r_1 \geq r_j$, $j = 2, ..., M$.

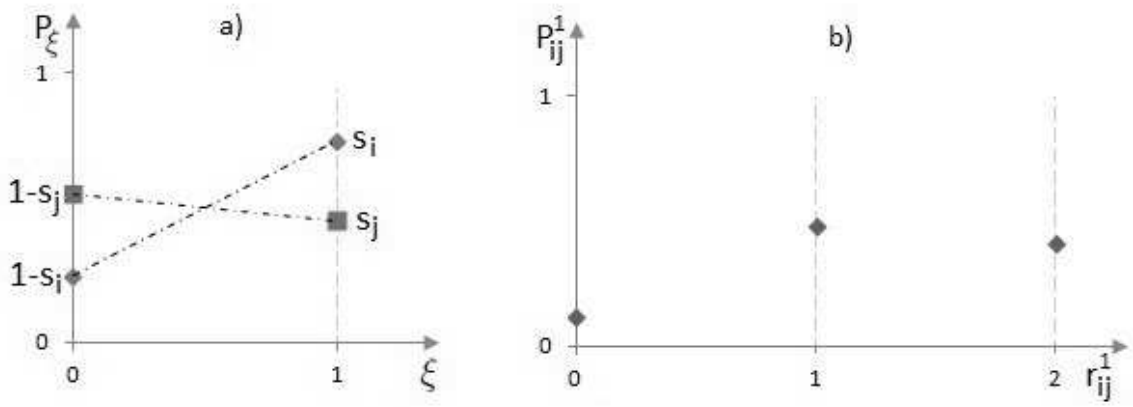

Рис. 1. Плотность распределения состояний i-го и j-го игроков (a) и числа очков, набранных i-м игроком по итогам их встречи (b) для $i < j$

Т.к. число очков, набранное игроком по итогам турнира, случайно, то идеальный или правильный результаты можно ожидать с некоторой вероятностью $P_I(M, N)$ и $P_p(M, N)$, где N — общее количество игр, проведенных в турнире. Далее сосредоточимся на определении вероятности правильности турнира.

Будем полагать, что система розыгрыша A является лучшей, чем система B, если

$$P_p^A(M, N) > P_p^B(M, N). \tag{1}$$

В данной работе проведено сравнение систем розыгрыша: круговой, круговой с предварительным разбиением на группы и выбыванием, кубковой с выбыванием после каждой игры, и пр.

1.1. Плотность распределения числа очков, набранных по итогам турнира

Единичная игра. Состояние j-го игрока — случайная величина, ее математическое ожидание

$$E_{\xi_j} = s_j, \tag{2}$$

а дисперсия

$$D_{\xi_j} = s_j(1 - s_j). \tag{3}$$

Математическое ожидание числа очков, набранных j-м игроком в игре с k-м игроком:

$$E_{r_{jk}} = 2P_{jk}(2) + 1P_{jk}(1) + 0P_{jk}(0),$$

где $P_{jk}(2)$ — вероятность победы j-го, $P_{jk}(0)$ — вероятность поражения j-го, $P_{jk}(1)$ – вероятность ничьей. Число очков k-го игрока $r_{jk}(1)$ в одной встрече j-го и k-го игроков принимает значения $0, 1, 2$ с вероятностями

$$\begin{aligned} &P^1_{jk}(0) = P^1_{kj}(2) = s_k(1 - s_j) \\ &P^1_{jk}(1) = P^1_{kj}(1) = 1 - (s_j + s_k - 2s_js_k) = 1 - P^1_{jk}(0) - P_{jk}(2) \\ &P^1_{jk}(2) = P^1_{kj}(0) = s_j(1 - s_k). \end{aligned} \tag{4}$$

Так что среднее число очков, набранных j-м игроком во встрече с k-м, и дисперсия r_{jk} равны:

$$E_{r_{jk}} = 1 + s_j - s_k, \quad D_{r_{jk}} = s_j(1 - s_j) + s_k(1 - s_k). \tag{5}$$

Для числа очков $r_j < 0$ и $r_j > 2$ $\quad P^1(r_j) = 0$. Сумма числа очков, набранных обоими игроками в каждой игре, равна 2.

При подсчете числа очков, набранных в турнире j-м игроком, нужно учесть, что он не встречается с самим собой, а значит, и не набирает ни одного очка. Проще всего положить, что

$$P^1_{jj}(0) = 1, \quad P^1_{jj}(1) = P^1_{jj}(2) = 0. \tag{6}$$

В дальнейшем будем предполагать, что результаты игр не зависят друг от друга. Тогда число очков в двух встречах равно $\nu = r_{jk}(2)$, принимает значение от 0, до 4, плотность распределения этой величины равна свертке

$$P^2_{jk}(\nu) = \sum_{\mu=0}^{2} P^1_{jk}(\mu)P^1_{jk}(\nu - \mu), \quad \nu = 0, 1, 2, 3, 4. \tag{7}$$

Так, для $\nu = 0$

$$P^2_{jk}(0) = (P^1_{jk}(0))^2,$$

для $\nu = 1$

$$P^2_{jk}(1) = P^1_{jk}(0)P^1_{jk}(1) + P^1_{jk}(1)P^1_{jk}(0) = 2P^1_{jk}(0)P^1_{jk}(1),$$

и т.д.

С учетом (6) для n встреч справедливо рекуррентное соотношение:

$$P^n_{jk}(\nu) = \sum_{\mu=0}^{2} P^{n-1}_{jk}(\nu - \mu)P^1_{jk}(\mu), \quad \nu = 0, ..., 2n. \tag{8}$$

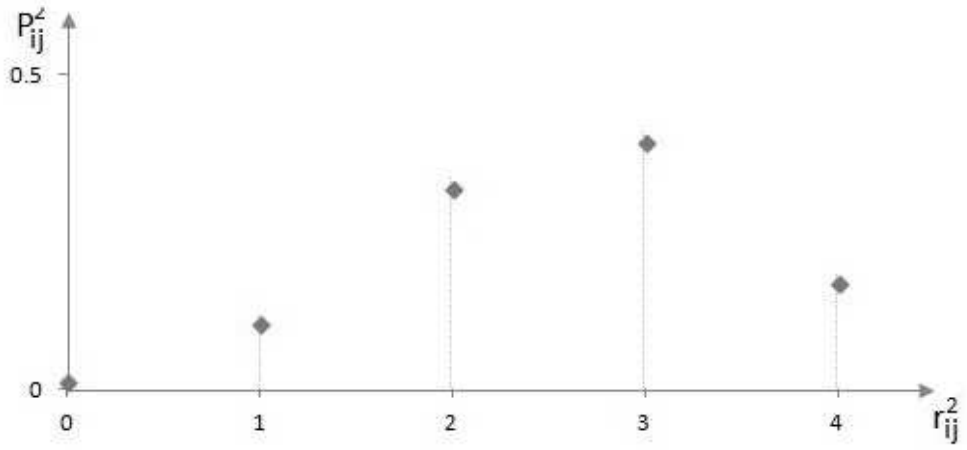

Рис. 2. Плотность распределения числа очков, набранных i-м игроком в двух встречах с j-м игроком при $i < j$

Чем больше n, тем ближе распределение суммарного числа очков к нормальному дискретному закону распределения, определенному на множестве натуральных чисел.

Так как ниже операция свертки

$$z(\nu) = x(\nu) * y(\nu) = \sum_t x(t)y(\nu - t) = \sum_t y(t)x(\nu - t) \tag{9}$$

будет использована неоднократно, напомним некоторые ее свойства [20], [21]:

1. Свертка перестановочна, т.е. результат не зависит от того, в каком порядке под знаком суммы стоят сворачиваемые функции (см. (9)).

2. Область определения z представляет собой объединение областей определения x и y. Так, если одна из функций определена для $\nu = 0, 1, 2$, а другая для $\nu = 0, 1, 2, 3$, то функция z_ν имеет область определения $\nu = 0, 1, ..., 5$.

3. Так как каждая из сворачиваемых плотностей распределения неотрицательна и сумма ее значений для всех точек области определения равна единице, то тем же условиям отвечает и результат свертки.

4. Математическое ожидание и дисперсия суммы независимых случайных величин равны сумме математических ожиданий и дисперсий каждой из них, что позволяет найти математическое ожидание и дисперсию распределения, являющегося результатом свертки.

1.2. Круговой турнир

Пусть M – число игроков. Общее число игр $N = 0,5M(M-1)$, а общее число очков, набранных всеми игроками, $R = M(M-1)$. Число игр, проведенных каждым игроком, $n = M - 1$. Так как порядок игр не влияет на число набранных очков, то будем предполагать, что каждый j-й игрок встречается последовательно с первым, вторым и т.д. до M.

Обозначим число очков, полученных j-м игроком во всех $(M-1)$ играх турнира, как r_j. Число очков в каждой встрече — дискретная случайная величина, имеющая плотность распределения (4). Плотность распределения числа очков после m встреч связана с плотностью распределения числа очков после $m-1$ игры соотношением, аналогичным (8)

$$P_j^m(r_j) = \sum_{\mu=0}^{2} P_j^{m-1}(r_j-\mu)P_{jm}^1(\mu) = P_j^{m-1} * P_{jm}^1, \quad r_j = 0, ..., 2m, \tag{10}$$

где $*$ — знак операции свертки. Здесь учтено, что в последней игре j-й игрок встречается с m-м.

В соответствии с (4)

$$\begin{array}{l} P_{j1}^1(0) = s_1(1-s_j) \\ P_{j1}^1(1) = 1-(s_j+s_1-2s_js_1) \\ P_{j1}^1(2) = s_j(1-s_1). \end{array} \tag{11}$$

Случайная величина r_j принимает целочисленные значения в диапазоне от нуля до $2(M-1)$ и ее плотность распределения находят рекуррентно с начальными условиями (11) по формуле (10):

$$P_j(r_j) = \sum_{\mu=r_j-2}^{r_j} P_j^{M-2}(\mu)P_{jM}^1(r_j-\mu) = \sum_{\mu=0}^{2} P_j^{M-2}(r_j-\mu)P_{jM}^1(\mu). \tag{12}$$

Пределы суммирования определены тем, что аргумент в функции P_{jM}^1 принимает значения от нуля до двух.

Среднее число очков $\overline{r_j}$, набранных в однокруговом турнире j-м игроком, равно сумме по $k(k \neq j)\overline{r_{jk}}$, а дисперсия – такой же сумме $D_{r_{jk}}$. Так что

$$\begin{array}{l} \overline{r_j} = (M-1)(1+s_j) - \sum_{k=1,k\neq j}^{M} s_k, \\ D_{r_jk} = (M-1)s_j(1-s_j) + \sum_{k=1,k\neq j}^{M} s_k(1-s_k). \end{array} \tag{13}$$

Расчет вероятности правильности турнира. Зная $P_i(r_i)$ для всех игроков, нужно найти вероятность того, что один игрок (для определенности первый) набрал не меньше очков, чем j-й. Область определения плотностей распределения вероятностей удовлетворяет условиям

$$0 \leq r_i \leq 2(M-1), i = 1, ..., M, \tag{14}$$

$$\sum_{i=1}^{M} r_i = R = M(M-1).$$

Пусть первый игрок набрал максимально возможное число очков 2(M-1), тогда с вероятностью единица он набрал больше любого j-го. Турнир заведомо правильный, если по итогам турнира $r_1 \geq 2(M-1)-1 = 2M-3$. В противном случае при вычислении вероятности того, что первый игрок наберет r_1 очков, и при этом j-й наберет $r_j \geq r_1$, нужно учесть отдельно результаты личной встречи, так как эти события не являются независимыми.

Обозначим через $\check{P}_{1j-}(r)$ плотность распределения вероятности того, что во всех встречах 1-го игрока, кроме его встречи с j-м игроком, общее количество набранных очков равно r. Эта плотность вероятности для $0 \leq r \leq 2(M-2)$ находится следующим образом:

$$\check{P}_{1j-}(r) = P_{12}(r) * ... * P_{1(j-1)}(r) * P_{1(j+1)}(r) * ... * P_{1M}(r), \tag{15}$$

где $P_{ik}(r)$ – плотность распределения вероятности получения i-м игроком r очков в игре с k-м игроком. Символ $*$ используется для операции свертки:

$$p_1(r) * p_2(r) = \sum_{r_0=0}^{2} p_1(r_0)p_2(r-r_0). \tag{16}$$

Аналогично находится $\check{P}_{j1-}(r)$ – плотность распределения очков, набранных во всех играх j-м игроком, кроме игры этого игрока с первым:

$$\check{P}_{j1-}(r) = P_{j3}(r) * P_{j4}(r) * P_{j5}(r) * ... * P_{jM}(r). \tag{17}$$

Рассмотрим 3 возможных результата встречи между 1-м и j-м игроками.

A) Игрок 1 проиграл игроку j. В этом случае вероятность $P_1(r)$ того, что 1-й игрок за весь турнир набрал r очков равна

$$P_1(r) = \check{P}_{1j-}(r).$$

B) Игрок 1 сыграл вничью с игроком j:

$$P_1(r) = \check{P}_{1j-}(r-1).$$

C) Игрок 1 выиграл у игрока j:

$$P_1(r) = \check{P}_{1j-}(r-2).$$

Найдем вероятность $P(r_1 > r_j)$ того, что количество очков r_1, набранное 1-м игроком, окажется не меньше, чем количество очков r_j j-го игрока. Выпишем выражения для этой вероятности в зависимости от результатов личной встречи 1-го и j-го игроков:

A)

$$P_a(r_1 \geq r_j) = \sum_{r_1=2}^{2(M-2)} \left(\check{P}_{1j-}(r_1) \sum_{r_j=2}^{r_1} \check{P}_{j1-}(r_j-2) \right)$$

B)

$$P_b(r_1 \geq r_j) = \sum_{r_1=1}^{2(M-2)+1} \left(\check{P}_{1j-}(r_1-1) \sum_{r_j=1}^{r_1} \check{P}_{j1-}(r_j-1) \right)$$

C)

$$P_c(r_1 \geq r_j) = \sum_{r_1=0}^{2(M-2)+2} \left(\check{P}_{1j-}(r_1-2) \sum_{r_j=0}^{r_1} \check{P}_{j1-}(r_j) \right)$$

.

Вероятность $P(r_1 \geq r_j)$ того, что первый игрок в итоговой таблице окажется не ниже j-го, находят как средневзвешенную из записанных величин с учетом вероятностей результатов личной встречи следующим образом:

$$P(r_1 \geq r_j) = P_{1j}(0)P_a(r_1 \geq r_j) + P_{1j}(1)P_b(r_1 \geq r_j) + P_{1j}(2)P_c(r_1 \geq r_j), \tag{18}$$

где $P_{1j}(r)$ – плотность распределения вероятности того, что 1-й игрок наберет r очков в игре с j-м игроком.

Однако для подсчета вероятности правильности турнира нельзя использовать произведение вероятностей $P(r_1 \geq r_j)$ того, что первый игрок наберет больше очков, чем j-й, для $j = 2, 3, ..., M$, так как каждая из этих вероятностей зависит от того, набрал ли первый игрок больше очков, чем k-ый. Справедливо утверждение: *Турнир правильный, если для любого возможного количества r_1 очков, набранных первым игроком, никто из остальных игроков не набрал большего числа очков.* Минимальное число очков, которое должен набрать первый игрок, чтобы с вероятностью, большей нуля, разделить первое место, равна $M - 1$. В этом случае все игры закончатся вничью и он разделит первое место с остальными участниками. Если, как указывалось выше, он наберет $2M - 3$ очка, то он заведомо окажется первым или разделит первое место с одним из остальных участников турнира. Так что вероятность правильного турнира в этом случае равна единице.

Нужно учесть, что общее число очков, набранных всеми участниками по итогам турнира, фиксировано и равно $M(M - 1)$. Значит, если первый игрок набрал r_1 очков, то остальные игроки в сумме наберут $M(M - 1) - r_1$ очков. Вероятность того, что все игроки в сумме наберут некоторое число очков r_σ, обозначим через P_σ. Она равна свертке плотностей распределения числа очков, набранных по итогам турнира вторым, третьим и т.д. M-м игроками:

$$P_\sigma(r_\sigma) = P_2(r_2) * P_3(r_3) * ... * P_M(r_M).$$

Вероятность правильности турнира в общем случае может быть выражена формулой

$$P_p = \sum_{r_1=M-1}^{2(M-1)} P_1(r_1) \sum_{r_j \in V, j=2...M} P_2(r_2)P_3(r_3)...P_M(r_M). \tag{19}$$

При этом множество V допустимых значений аргументов $r_j, j = 2, 3, ..., M$ определено ограничениями:

$$\sum_{j=2}^{M} r_j = M(M - 1) - r_1, \quad r_j \leq r_1 \forall j.$$

Практически использование формулы (19) требует громоздкого перебора и при $M > 10$ становится слишком затратным по времени вычисления. Ниже приведены формулы, позволяющие получить оценку вероятности правильности турнира с гораздо меньшей трудоемкостью.

Таблица 1. Вероятность правильности турнира, ее оценка и относительная погрешность для различных вариантов распределения сил

P_p	$P_p(M,N)$	$\Delta\%$
0.4021	0.4206	4.60
0.4580	0.4844	5.76
0.5071	0.5254	3.61
0.5513	0.5739	4.10
0.5990	0.6157	2.79
0.6533	0.6807	4.19
0.6952	0.7211	3.73
0.7506	0.7808	4.02
0.8095	0.8111	0.20

Так как $r_\sigma = M(M-1) - r_1$, то вероятность P_σ определена при фиксированном числе игроков для каждого значения r_1. Поэтому, имея в виду такую замену, будем писать $P_\sigma(r_1)$. Для оценки вероятности правильности турнира получим выражение

$$P_p(M,N) = \sum_{r_1=M-1}^{2M-3} P_1(r_1) \prod_{i=2}^{M} \left[1 - \sum_{r_i=r_1+1}^{2M-3} P_i(r_i) \right] P_\sigma(r_1). \tag{20}$$

Здесь случайные события „ни один игрок, кроме первого, не наберет больше очков, чем r_1“, и „все игроки, кроме первого, наберут в сумме r_σ очков“ предполагаются независимыми. Поэтому найденная таким образом оценка правильности турнира выше истинного значения, найденного по формуле (19), однако расчет не требует перебора.

Для оценки точности последней формулы были проведены численные эксперименты для различных вариантов первоначального распределения сил $s_1, s_2, ..., s_M$. В таблице 1 приведены результаты этих расчетов для различного априорного распределения сил. В ней показаны вероятность P_p, полученная по формуле (19), оценка вероятности $P_p(M,N)$, найденная по формуле (20), и погрешность $\Delta\%$, полученная по формуле

$$\Delta\% = \frac{P_p(M,N) - P_p}{P_p} \ 100\%.$$

. Эти расчеты показали, что оценка (20) имеет погрешность порядка 4%, что позволяет ее использовать для сравнения различных схем турнира.

2. Розыгрыш с предварительным разбиением на группы и выбыванием

Будем оценивать структуру турнира значением вероятности его правильности P_p.

Пусть число участников M делится на 4 и команды разбиты на подгруппы по правилу: в первую подгруппу – команды с нечетными, а во вторую – с четными

номерами. Розыгрыш проводится в подгруппах по круговой системе. Отсеивается половина команд, занявших последние места в подгруппах, а оставшиеся разыгрывают первенство по круговой системе. Общее число игр

$$N_{ng} = \frac{3}{4}M\left(\frac{M}{2} - 1\right). \tag{21}$$

Число игр N_{ng} меньше, чем при круговой системе. Сравним величину P_p для двух систем розыгрыша при $M = 4$, когда система с отбором становится кубковой, а число игр при круговой системе $N = 6$ вдвое превышает число игр при розыгрыше по кубковой.

Для круговой системы P_p может быть найдено по формулам, полученным в предыдущем разделе. Для системы с отбором подгруппы включают команды с s_1, s_3 и s_2, s_4. Чтобы победить в розыгрыше, игрок с «силой» s_1 должен победить в подгруппе, а затем в финале. Так как эти события независимые, то вероятность победы равна

$$P_p = P_{13}P_{1f} = s_1(1 - s_3)P_{1f}. \tag{22}$$

В свою очередь, вероятность победы в финальной встрече равна

$$\begin{gathered} P_{1f} = P_{12} \cdot P_{24} + P_{14} \cdot P_{42} = s_1(1 - s_2)s_2(1 - s_4)+ \\ +s_1(1 - s_4)s_4(1 - s_2) = s_1(1 - s_2)(1 - s_4)(s_2 + s_4). \end{gathered} \tag{23}$$

После подстановки этого выражения в (22) получим

$$P_p = s_1^2(1 - s_3)(1 - s_2)(1 - s_4)(s_2 + s_4). \tag{24}$$

Так как число игр при круговой системе вдвое больше, то можно при кубковой системе проводить не по одной, а по две встречи между игроками, считая победителем того, кто набрал больше очков в двух встречах. Тогда вероятность победы первого игрока в своей подгруппе (вероятность набрать более двух очков) по формуле (7)

$$\overline{P}_{13} = s_1(1 - s_3)[1 + 2(1 - s_1 - s_3 + 2s_1s_3)]. \tag{25}$$

Вероятность выхода в финал второго и четвертого игрока равны соответственно

$$\begin{aligned} &\overline{P}_{24} = s_2(1 - s_4)[1 + 2(1 - s_2 - s_4 + 2s_1s_4)], \\ &\overline{P}_{42} = 1 - \overline{P}_{24}. \end{aligned} \tag{26}$$

Вероятность победы первого игрока в розыгрыше

$$\begin{aligned} &\overline{P}_p = \overline{P}_{13}(\overline{P}_{24} \cdot \overline{P}_{12} + \overline{P}_{42} \cdot \overline{P}_{14}) = \\ &= \overline{P}_{13}\Big\{\overline{P}_{24} \cdot s_1(1 - s_2)[1 + 2(1 - s_1 - s_2 + 2s_1s_2)]+ \\ &+\overline{P}_{42} \cdot s_1(1 - s_4)[1 + 2(1 - s_1 - s_4 + 2s_1s_4)]\Big\}. \end{aligned} \tag{27}$$

Здесь черта соответствует вероятности победы в розыгрыше из двух игр.

Численные расчеты, проведенные по формуле (27), при равномерном распределении сил игроков (а именно когда $s_1 = 0,8; s_2 = 0,6; s_3 = 0,4; s_4 = 0,2$) показали, что при такой организации вероятность правильности турнира равна $\overline{P}_p = 0,645$, при этом оценка вероятности правильного турнира при круговом розыгрыше, найденная по формуле (20), $P_p = 0,670$.

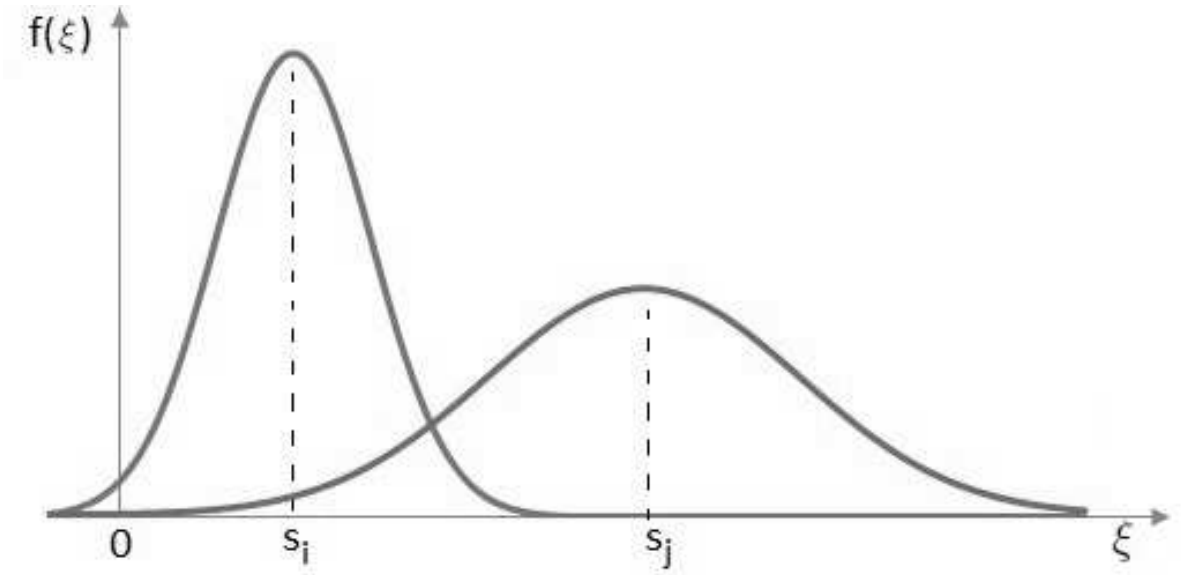

Рис. 3. Плотности распределения состояния i-го и j-го игроков для нормального закона распределения при $s_i < s_j$ и различных D_i и D_j

3. Состояние игрока — случайная величина с непрерывным распределением

Выше рассмотрен случай, когда сила каждого j-го игрока s_j представляет собой вероятность того, что его состояние равно единице. Это обстоятельство облегчало расчет результатов парных сравнений. Рассмотрим, что изменится, если плотность распределения состояния ξ $f_j(\xi_j)$ — непрерывна с математическим ожиданием $\overline{s}_j$ и дисперсией $D_j = \sigma_j^2$. Игрок j побеждает игрока k и получает два очка, когда при парном сравнении $\xi_j > \xi_k$. Так как плотности распределения непрерывны, то $\xi_j = \xi_k$ со сколь угодно малой вероятностью, и таким образом ничьи исключаются. Формулы для вычисления плотности распределения суммы набранных в турнире очков остаются справедливыми, так как они используют только результаты парных сравнений.

Вероятность победы j-го игрока в одиночной встрече с k–м (см. (4)) равна

$$P_{jk}(2) = \int\limits_0^\infty f_j(\xi_j) F_k(\xi_j) d\xi_j, \quad P_{jk}(0) = 1 - P_{jk}(2) = P_{kj}(2), \tag{28}$$

где

$$F_k(\xi_j) = \int\limits_0^{\xi_j} f_k(\xi_k) d\xi_k, \tag{29}$$

$$P_{kj} = 1 - P_{jk}. \tag{30}$$

Эти выражения позволяют анализировать исход турниров и находить вероятность их «правильности» при фиксированном числе игр.

Если $f_j(\xi_j)$ — нормальный закон распределения

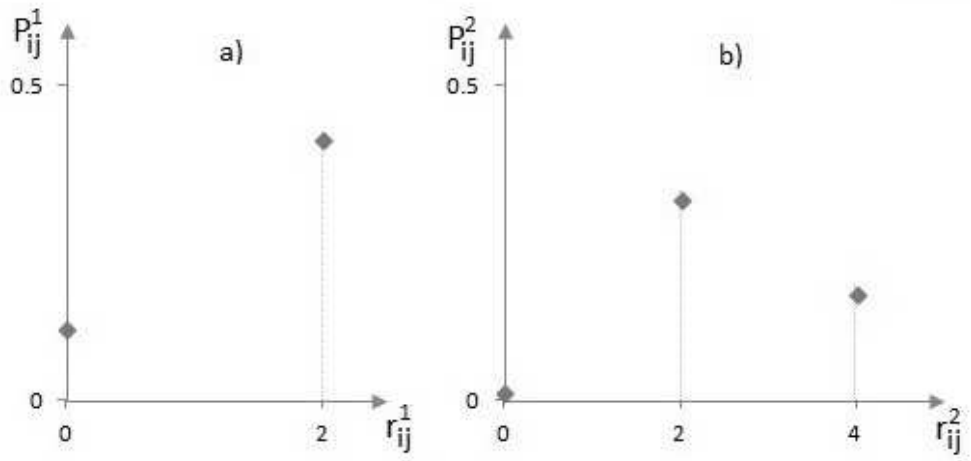

Рис. 4. Плотность распределения результатов встречи i-го и j-го игроков после одной (a) и двух (b) встреч

$$f_j(\xi_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_j}} e^{-\frac{(\xi_j - \overline{s}_j)^2}{2D_j}}, \tag{31}$$

как и $f_k(\xi_k)$, то вероятность выигрыша j-го игрока у k-го (проигрыша k-го) равны:

$$P_{jk}(2) = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi D_j}} e^{-\frac{(\xi_j - \overline{s}_j)^2}{2D_j}} \left[\Phi\left(\frac{\xi_j - \overline{s}_k}{\sigma_k \sqrt{2}} \right) - \Phi\left(\frac{-\overline{s}_k}{\sigma_k \sqrt{2}} \right) \right] d\xi_j, \tag{32}$$

где

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp^{-t^2} dt$$

– функция Лапласа, значения которой заданы в таблицах [21].

Для равномерного распределения, равного для каждого игрока нулю за пределами отрезка $\overline{s}_k - \delta_k, \overline{s}_k + \delta_k$ и равного $\frac{1}{2\delta_k}$ внутри этого отрезка

$$\begin{aligned} &P_{jk}(2) = 0 \quad \text{при} \quad (\overline{s}_j - \overline{s}_k) < -(\delta_j + \delta_k), \\ &P_{jk}(2) = \tfrac{1}{4} \left(\tfrac{\overline{s}_j - \overline{s}_k}{\delta_j + \delta_k} + 1 \right)^2 \quad \text{при} \quad |\overline{s}_j - \overline{s}_k| < (\delta_j + \delta_k), \\ &P_{jk}(2) = 1 \quad \text{при} \quad (\overline{s}_j - \overline{s}_k) > (\delta_j + \delta_k). \end{aligned} \tag{33}$$

4. Сравнение различных типов турниров методом стохастического моделирования

Проведем сравнение несколько систем розыгрыша, в которых общее количество проведенных игр одинаково.

Кроме круговой системы, были рассмотрены еще 3 системы розыгрыша.

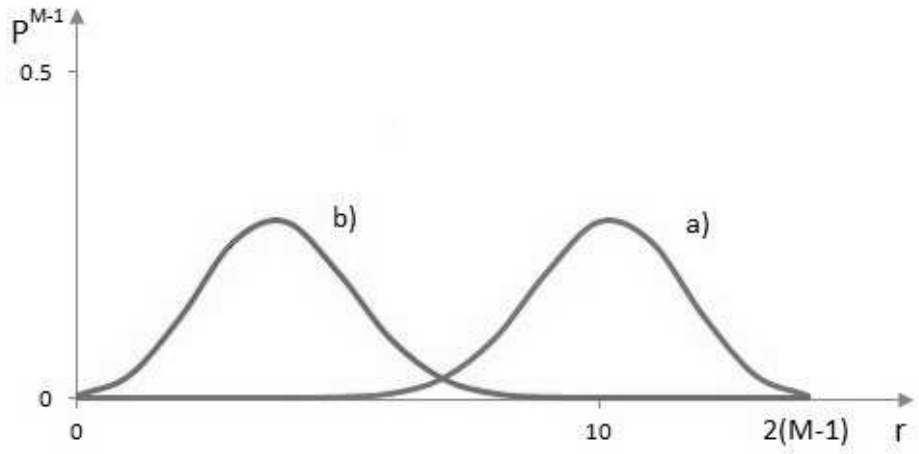

Рис. 5. Плотность распределения числа очков r, набранных в турнире сильнейшим (a) и слабейшим (b) игроками

Система 1.

Всех игроков разбивают на 2 одинаковые по средней силе подгруппы. В каждой подгруппе проводится круговой турнир. Затем половина игроков каждой подгруппы, занявших последние места, образуют новую подгруппу, в которой проводится еще один круговой турнир и выявляется его победитель. Этот победитель и оставшиеся лучшие игроки из каждой подгруппы проводят четвертый круговой турнир. По общей сумме набранных в этом турнире очков выявляются 2 игрока, занявшие 1 и 2 места. Между ними проводятся несколько встреч из расчета, чтобы общее количество проведенных игр совпадало с количеством игр при круговой системе, т.е. было равно M(M-1). Победителем объявляется игрок, набравший максимальное количество очков в этих встречах.

Система 2.

Всех игроков разбивают на 2 одинаковые подгруппы, в каждой подгруппе проводится круговой турнир. По одному игроку, занявшему последнее место в подгруппах, выбывают из турнира. Оставшиеся игроки проводят круговой турнир, после чего два лучших игрока проводят серию финальных встреч, количество которых определяется из условия, чтобы общее число проведенных игр совпадало с числом игр при круговой системе.

Система 3.

Всех игроков разбивают на 2 одинаковые подгруппы, в каждой из которых проводится круговой турнир. Половина игроков каждой подгруппы, занявших последние места, выбывают из турнира. Оставшиеся игроки проводят два круговых турнира, затем два лучших игрока проводят серию финальных встреч, число которых таково, чтобы общее число проведенных игр было равно числу игр при круговой системе.

Кроме этого, были рассмотрены два варианта первоначального разбиения всех игроков на подгруппы. В первом случае (способ A) разбиение проводилось с учетом силы игроков s_i: все игроки выстраивались по уменьшению их силы, первый игрок попадал в подгруппу 1, второй – в подгруппу 2, третий – в 1, четвертый – в

2, и т.д. Второй способ (Б) имитирует широко используемое в спортивных соревнованиях разбиение на подгруппы с помощью жеребьевки, при этом способе игроки разбиваются случайным образом.

При распределении сил игроков были использованы два подхода: равномерное распределение сил, когда различие между s_i одинаковы, и случайное распределение сил. При случайном распределении сил были выбраны 2 характерных случая: “Случайное 1” – когда силы сильнейших игроков близки друг к другу и “Случайное 2” – когда сила сильнейшего игрока существенно больше, чем сила второго игрока.

Приведенные ниже результаты были получены методом стохастического моделирования. При заданных силах игроков $s_1, s_2, ..., s_M$ на каждой итерации находилась случайная реализация турнира и определялась случайная величина ζ_i, принимающая значение 1, если искомое событие (в данном случае сильнейший игрок занял первое место) произошло, либо 0 в противном случае. Оценка вероятности P^* правильности турнира определялась как оценка математического ожидания $E\zeta$ случайной величины ζ.

Количество итераций K находилось из условия, чтобы с заданной вероятностью Q отклонение оценки P^* от истинной вероятности правильности турнира было меньше заданной точности ε

$$P(|P^* - p| < \varepsilon) = Q.$$

Для этих условий K определяется следующим образом [22]:

$$K = \left(\frac{\sigma_\zeta}{\varepsilon}\right)^2 \left[\Phi^{-1}\left(\frac{Q}{2}\right)\right]^2,$$

где σ_ζ – оценка среднего квадратичного отклонения случайной величины ζ, Φ^{-1} – функция, обратная функции Лапласа.

Чтобы найти первую оценку среднего квадратичного отклонения σ_ζ, сначала находилось некоторое количество k_0 значений ζ_i, после чего вычислялись оценка для σ_ζ и значение K. Далее эти величины уточнялись после каждой итерации.

Результаты сравнительных экспериментов приводятся в таблице 2, в ней показаны вероятности того, что сильнейший игрок займет первое место. В данных экспериментах:

- количество игроков $M = 8$;
- общее число игр в турнире $N = 56$;
- уровень доверия $Q = 0,999$;
- точность $\epsilon = 0,001$;
- начальное число итераций $k_0 = 1\ 000\ 000$.

Анализируя результаты проведенных экспериментов, можно сделать следующие выводы:

1. Выбор системы розыгрыша может оказать существенное влияние на эффективность турнира.

2. Третья система организации турнира для всех вариантов априорного распределения сил превосходит остальные.

Таблица 2. Вероятность правильности турнира для различных схем его организации

Распределение сил	Равномерное		Случайное 1		Случайное 2	
Способ разбиения	А	Б	А	Б	А	Б
Круговой	0,41		0,26		0,60	
Система 1	0,39	0,42	0,20	0,27	0,58	0,61
Система 2	0,49	0,49	0,30	0,32	0,69	0,69
Система 3	0,55	0,56	0,32	0,37	0,76	0,76

5. Заключение

Предложен критерий для оценки способа организации турнира с заданным числом участников и ограниченным количеством игр. Получены выражения для аналитической оценки качества организации турнира и проведено статистическое моделирование для расчета критерия правильности той или иной структуры розыгрыша.

Все полученные рекомендации в иных терминах относятся к задаче определения лучшего изделия посредством экспертизы, в которой эксперт выбирает лучшее путем серии парных сравнений.

Список литературы / References

[1] Гнеденко Б. В., *Курс теории вероятностей*, Наука, М., 1988; [Gnedenko B. V., *Kurs teorii veroyatnostey*, Nauka, M., 1988, (in Russian).]

[2] Эрдеш П., Спенсер Дж., *Вероятностные методы в комбинаторике*, Мир, М., 1976; [Erdesh P., Spenser Dzh., *Veroyatnostnye metody v kombinatorike*, Mir, M., 1976, (in Russian).]

[3] Эрдеш П., Мун Дж. В., “О множестве согласованных дуг в турнире”, *Теория графов*, Мир, М., 1976, 160–162; [Erdesh P., Mun Dzh. V., “O mnozhestve soglasovannykh dug v turnire”, *Teoriya grafov*, Mir, M., 1976, 160–162, (in Russian).]

[4] Alspach B., Mason D. W., Pullman N. J., “Path numbers of tournaments”, *J. of Comb Theory*, **20**:3 (1976), 222–228.

[5] Daniels H. E., “Round-robin touranmet scores”, *Biomentrika*, **56**:2 (1969), 295–299.

[6] Ford L. R., Jahnson S. M., “A tournament problem”, *Am. Math. Monthly*, **66** (1959), 387–389.

[7] Freund J. E., “Round Robin Mathematics”, *Am. Math. Monthly*, **63** (1956), 112–114.

[8] Hartigan J. A., “Probabilistic competition of knockout tournament”, *Ann. MAth. Statist.*, **37** (1966), 495–503.

[9] *Moon J.W.* Topics on tournaments in graph theory. Dover Publications, Inc., Meniola, NY, 2015.

[10] Narayana T. V., Bent B. H., “Computation of the number of score sequence in round-robin tournamets”, *Canad. Math. Bull*, **7** (1964), 133–136.

[11] Narayana T. V., Zidek J., “Statistical inference in random tournaments”, *Rev. Roum. Math. Pures et Appl.*, **10** (1969), 1563–1576.

[12] Searls D. T., “On the probability of winning with different tournament procedures”, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **58**:304 (1963), 1064–1081.

[13] Thompson G. L., *Lectures on game theory, Markov chains and related topics*, Sandia Corporation Monograph, 1958.

[14] David H. A., *The Method of paired comparisons*, London, 1976.

[15] David H. A., "Ranking the Players in a Round Robin Tournament", *Rev. Int. Statist. Inst.*, **39**, 1971, 137–147.

[16] David H. A., "Tournaments and paired comparisons", **46** (1959), 139–149.

[17] Glason J. R., Haplerin S. A., "A paired comparisons model for Round-Robin experiments", *Psychomentika*, **40**:4 (1975), 433–454.

[18] Glenn W. A., "A comparison for the effectiveness of tournaments", *Biomentrika*, **47** (1960), 253–262.

[19] Брук Б. Н., Бурков В. Н., "етоды экспертных оценок в задачах упорядочивания объектов", Техн. кибернетика, 1972, 29–39; [Bruk B. N., Burkov V. N., "Metody ekspertnykh otsenok v zadachakh uporyadochivaniya obektov", Tekhn. kibernetika, 1972, 29–39, (in Russian).]

[20] Хиршман И. И., Уиддер Д. В., *Преобразования типа свертки*, Мир, М., 1958; [Khirshman I. I., Uidder D. V., *Preobrazovaniya tipa svertki*, Mir, M., 1958, (in Russian).]

[21] Диткин В. А., Кузнецов П. И., *Справочник по операционному исчислению: Основы теории и таблицы формул*, Государственное издательство технико-теоретической литературы, М., 1951; [Ditkin V. A., Kuznetsov P.I., *Spravochnik po operatsionnomu ischisleniyu: Osnovy teorii i tablitsy formul*, Gosudarstvennoe izdatelstvo tekhniko-teoreticheskoy literatury, M., 1951, (in Russian).]

[22] Вентцель Е. С, *Исследование операций*, Советское радио, 1972; [Venttsel E. S., *Issledovanie operatsiy*, Sovetskoe radio, M., 1972, (in Russian).]

Tsirlin A. M., Akhremenkov Al. A., "Probabilistic Analysis of Tournament Organization Systems", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:4 (2016), 492–507.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-4-492-507

Abstract. In this paper a criteria of comparison of different tournament organization systems in sporting contests is offered; the criteria uses the probability of winning the fairly strongest player. Two probabilistic models have been analyzed. Calculating formulas for estimating the probability and probability density of score points gained by one or another player were obtained. Some really used tournament systems were analyzed with the stochastic modeling method. The available results also provide an order of objects presenting to experts while organizating the examination by paired comparison. An analytical estimation of probability of tournament results (or pared comparison) was obtained. In many cases it allows to avoid a time-consuming procedure of sorting out possible variants.

Keywords: tournament organization, probability, paired comparisons

On the authors:
Tsirlin Anatoly Michailovich, orcid.org/0000-0002-3637-6160, Prof,
Program Systems Institute of RAS
Petra 1 str., 4a, Veskovo Jaroslavskoy, 152020, Russia, e-mail: tsirlin@sarc.botik.ru

Akhremenkov Alexander Alexandrovich, orcid.org/0009-0203-2514-7755, PhD,
Program Systems Institute of RAS
Petra 1 str., 4a, Veskovo Jaroslavskoy, 152020, Russia, e-mail: alex@eco.botik.ru