

©Бутузов В. Ф., Белошапко В. А., 2016

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-5-515-528

УДК 519.632.34

Сингулярно возмущенная эллиптическая задача Дирихле с кратным корнем вырожденного уравнения

Бутузов В. Ф., Белошапко В. А.

получена 15 марта 2016

Аннотация. Рассматривается сингулярно возмущенная эллиптическая задача с граничными условиями Дирихле в случае кратного корня вырожденного уравнения. Построено и обосновано полное асимптотическое разложение решения задачи. Оно качественно отличается от известного разложения в случае, когда корень вырожденного уравнения – простой: асимптотическое разложение решения ведется по дробным степеням малого параметра, погранслойные переменные имеют другой масштаб, погранслойный ряд строится с помощью нестандартного алгоритма, пограничный слой вблизи границы области состоит из трех зон с различным поведением решения в разных зонах.

Ключевые слова: сингулярно возмущенное эллиптическое уравнение, случай кратного корня вырожденного уравнения, асимптотическое разложение решения погранслойного типа, трехзонный пограничный слой

Для цитирования: Бутузов В. Ф., Белошапко В. А., "Сингулярно возмущенная эллиптическая задача Дирихле с кратным корнем вырожденного уравнения", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:5 (2016), 515–528.

Об авторах:

Бутузов Валентин Федорович, orcid.org/0000-0002-8715-5720, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры математики физического факультета, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991 Россия, e-mail: butuzov@phys.msu.ru;

Белошапко Вера Александровна, orcid.org/0000-0002-7847-4113, аспирант, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991 Россия, e-mail: postvab@rambler.ru.

Благодарности:

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №15-01-04619.

1. Постановка задачи

Рассмотрим краевую задачу

$$\varepsilon^2 \Delta u = f(u, x, \varepsilon), \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (1)$$

$$u = u^0(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad (2)$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ – оператор Лапласа, Ω – ограниченная область с границей $\partial\Omega$.

Известно [1], [2], что если вырожденное уравнение

$$f(u, x, 0) = 0 \quad (3)$$

имеет корень $u = \varphi(x)$, $x \in \bar{\Omega}$, причем

$$f_u(\varphi(x), x, 0) > 0, x \in \bar{\Omega}, \quad (4)$$

функции f , $u^0(x)$ и граница $\partial\Omega$ достаточно гладкие, $u^0(x)$ принадлежит области притяжения корня $\varphi(x)$, то задача (1), (2) для достаточно малых ε имеет решение $u(x, \varepsilon)$ с асимптотическим представлением

$$u(x, \varepsilon) = \varphi(x) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i \bar{u}_i(x) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i \Pi_i(\rho, l) + O(\varepsilon^{n+1}), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (5)$$

где $\bar{u}_i(x)$ – коэффициенты регулярной части асимптотики, $\rho = r/\varepsilon$ – погранслоинная переменная, (r, l) – локальные координаты точки в окрестности $\partial\Omega$, r – расстояние от точки до $\partial\Omega$ вдоль нормали к $\partial\Omega$, l – переменная, определяющая положение точки на границе $\partial\Omega$, $\Pi_i(\rho, l)$ – пограничные функции, играющие существенную роль вблизи границы $\partial\Omega$ и экспоненциально стремящиеся к нулю при $\rho \rightarrow \infty$. Отметим, что в этом случае корень $\varphi(x)$ вырожденного уравнения является простым (однократным) в силу (4).

В данной работе задача (1), (2) исследуется при условии, что вырожденное уравнение $f(u, x, 0) = 0$ имеет двукратный корень. В связи с этим введем следующее условие.

Условие А1. Пусть функция $f(u, x, \varepsilon)$ имеет вид

$$f(u, x, \varepsilon) = h(x)(u - \varphi(x))^2 - \varepsilon f_1(u, x, \varepsilon), \quad (6)$$

где $h(x)$, $\varphi(x)$, $f_1(u, x, \varepsilon)$ – достаточно гладкие функции, и пусть

$$h(x) > 0, \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (7)$$

Как обычно, требуемый порядок гладкости зависит от порядка асимптотики, которую мы хотим построить; поскольку речь пойдет об асимптотике произвольного порядка, будем считать указанные функции бесконечно дифференцируемыми.

При условии А1 корень $u = \varphi(x)$ уравнения (3) является двукратным и, так же, как в работах [3] – [5], это приводит к качественному изменению асимптотики (при малых ε) решения задачи (1), (2) по сравнению со случаем простого корня: изменяется масштаб погранслоинных переменных, а регулярный и погранслоинный ряды становятся рядами не по целым, а по дробным степеням ε . Кроме того, существенное влияние на вид асимптотики решения оказывает теперь член порядка ε , входящий в правую часть (6), а именно функция $\bar{f}_1(x) := f_1(\varphi(x), x, 0)$. В отличие

от эллиптической задачи с граничными условиями Неймана [3], [4], пограничные функции в задаче (1), (2) появляются уже в нулевом приближении (будет показано ниже).

Условие А2. Пусть $\bar{f}_1(x) > 0$, $x \in \bar{\Omega}$.

Условие А3. Пусть $\Pi^0(l) := [u^0(x) - \varphi(x)]_{x \in \partial\Omega} > 0$.

2. Построение асимптотики решения

Как и в случае простого корня вырожденного уравнения, асимптотика решения задачи (1), (2) при условиях А1 – А3 будет состоять из регулярной $\bar{u}(x, \varepsilon)$ и погранслошной $\Pi(\rho, l, \varepsilon)$ частей, причем регулярная часть будет теперь рядом по степеням $\sqrt{\varepsilon}$ (а не ε), пограничный слой будет иметь теперь трехзонный характер, и наряду с $\rho = r/\varepsilon$ появится новая погранслошная переменная $\zeta = r/\varepsilon^{3/4}$.

2.1. Регулярная часть асимптотики решения

Регулярную часть $\bar{u}(x, \varepsilon)$ асимптотики решения будем строить в виде

$$\bar{u}(x, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2} \bar{u}_i(x). \quad (8)$$

Уравнения для коэффициентов $\bar{u}_i(x)$ этого ряда получаются стандартным способом, т. е. путем подстановки ряда (8) в уравнение (1) вместо u и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях $\sqrt{\varepsilon}$ в разложениях левой и правой частей равенства. В результате получаем: $\bar{u}_0 = \varphi(x)$, а функция $\bar{u}_1(x)$ является решением уравнения

$$h(x)\bar{u}_1^2 - \bar{f}_1(x) = 0.$$

В силу условий А1 и А2 это уравнение имеет два вещественных корня. В качестве $\bar{u}_1(x)$ выберем положительный корень (такой выбор будет оправдан ниже):

$$\bar{u}_1(x) = [h^{-1}(x) \bar{f}_1(x)]^{1/2} > 0, \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (9)$$

Следующие коэффициенты $\bar{u}_i(x)$ ряда (8) последовательно определяются как решения линейных алгебраических уравнений

$$[2h(x)\bar{u}_1(x)] \bar{u}_i(x) = F_i(x), \quad i \geq 2, \quad (10)$$

где $F_i(x)$ выражаются рекуррентно через $\bar{u}_j(x)$, $j < i$, а коэффициент при $\bar{u}_i(x)$ отличен от нуля в силу (7) и (9).

Отметим, что уравнение (10) получается в результате приравнивания коэффициентов при $\varepsilon^{(i+1)/2}$, поэтому частичная сумма $\bar{u}^{(n)} = \sum_{i=0}^n \varepsilon^{i/2} \bar{u}_i(x)$ ряда (8) при подстановке в уравнение (1) дает невязку порядка $O(\varepsilon^{n/2+1})$, т. е.

$$L_\varepsilon \bar{u}^{(n)} := \varepsilon^2 \Delta \bar{u}^{(n)} - f(\bar{u}^{(n)}, x, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n/2+1}), \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (11)$$

2.2. Погранслоиная часть асимптотики

Для построения погранслоиной части асимптотики перейдем в окрестности границы $\partial\Omega$ к новым (локальным) координатам. Пусть уравнения границы $\partial\Omega$ имеют вид

$$x_1 = \psi_1(l), \quad x_2 = \psi_2(l), \quad 0 \leq l \leq l_0,$$

где $\psi_1(l)$ и $\psi_2(l)$ – бесконечно дифференцируемые функции и $\psi_1'(l) + \psi_2'(l) \neq 0$. В достаточно малой окрестности $\partial\Omega$ (в которой нормали к $\partial\Omega$ не пересекаются) введем локальные координаты (r, l) , где r – расстояние от точки до $\partial\Omega$ вдоль нормали, l – переменная, определяющая положение точки на границе $\partial\Omega$. Координаты (x_1, x_2) точки связаны с координатами (r, l) равенствами

$$x_1 = \psi_1(l) - r \frac{\psi_2'(l)}{\sqrt{\psi_1'^2(l) + \psi_2'^2(l)}}, \quad x_2 = \psi_2(l) + r \frac{\psi_1'(l)}{\sqrt{\psi_1'^2(l) + \psi_2'^2(l)}}.$$

В переменных (r, l) оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \alpha(r, l) \frac{\partial^2}{\partial l^2} + \beta(r, l) \frac{\partial}{\partial r} + \gamma(r, l) \frac{\partial}{\partial l},$$

где

$$\alpha(r, l) = \left(\frac{\partial l}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial l}{\partial x_2} \right)^2, \quad \beta(r, l) = \frac{\partial^2 r}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial x_2^2}, \quad \gamma(r, l) = \frac{\partial^2 l}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 l}{\partial x_2^2}.$$

Произведем растяжение переменной r , причем коэффициент растяжения возьмем равным ε , т. е. введем погранслоиновую переменную $\rho = r/\varepsilon$. Наряду с погранслоиновой переменной ρ введем погранслоиновую переменную $\zeta = r/\varepsilon^{3/4} = \varepsilon^{1/4}\rho$ (отметим, что в случае [3] возникала только одна погранслоиновая переменная $\rho = r/\varepsilon^{3/4}$, а в случае [4] две погранслоиновые переменные $\rho = r/\varepsilon^{2/3}$ и $\zeta = r/\varepsilon^{1/2} = \varepsilon^{1/6}\rho$) и запишем оператор $\varepsilon^2\Delta$ в виде

$$\varepsilon^2\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \varepsilon^2\alpha(\varepsilon^{3/4}\zeta, l) \frac{\partial^2}{\partial l^2} + \varepsilon\beta(\varepsilon^{3/4}\zeta, l) \frac{\partial}{\partial \rho} + \varepsilon^2\gamma(\varepsilon^{3/4}\zeta, l) \frac{\partial}{\partial l}.$$

Разложив коэффициенты α , β и γ в ряды по степеням $\varepsilon^{3/4}$ и сгруппировав слагаемые одного порядка относительно ε , получим разложение $\varepsilon^2\Delta$ по целым степеням $\varepsilon^{1/4}$:

$$\varepsilon^2\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \sum_{j=4}^{\infty} \varepsilon^{\frac{j}{4}} L_j \right), \quad (12)$$

где L_j – линейные дифференциальные операторы с коэффициентами, зависящими от ζ , l , содержащие операторы дифференцирования $\frac{\partial}{\partial \rho}$, $\frac{\partial}{\partial l}$, $\frac{\partial^2}{\partial l^2}$, в частности, $L_4 = \beta(0, l) \frac{\partial}{\partial \rho}$.

Погранслоиновую часть асимптотики $\Pi(\rho, l, \varepsilon)$ будем строить в виде ряда по степеням $\varepsilon^{1/4}$:

$$\Pi(\rho, l, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} \Pi_i(\rho, l). \quad (13)$$

Отметим, что в отличие от случая граничных условий Неймана [3], [4] слагаемые погранслошной части асимптотики возникают уже в нулевом приближении $(\Pi_0(\rho, l))$.

Граничные условия для функций $\Pi_i(\rho, l)$ при $\rho = 0$ обусловлены тем, что погранслошная часть асимптотики совместно с регулярной частью должны удовлетворять заданному граничному условию (2), т. е.

$$\bar{u}(0, l, \varepsilon) + \Pi(0, l, \varepsilon) = u^0(l), \quad 0 \leq l \leq l_0. \quad (14)$$

Здесь и далее используется обозначение $\bar{u}(r, l, \varepsilon) = \bar{u}(x(r, l), \varepsilon)$ и аналогичные обозначения для других функций.

Кроме того, потребуем, чтобы члены погранслошного ряда удовлетворяли стандартному условию при $\rho \rightarrow \infty$:

$$\Pi_i(\infty, l) = 0. \quad (15)$$

Уравнения для коэффициентов $\Pi_i(\rho, l)$ ряда (13) будем извлекать из стандартного для метода пограничных функций равенства (см. [1])

$$\varepsilon^2 \Delta \Pi = \Pi f, \quad (16)$$

где в силу (12) и (13)

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \Delta \Pi &= \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \sum_{j=4}^{\infty} \varepsilon^{\frac{j}{4}} L_j \right) \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} \Pi_i(\rho, l), \\ \Pi f &= [f(\bar{u}(r, l, \varepsilon) + \Pi(\rho, l, \varepsilon), r, l, \varepsilon) - f(\bar{u}(r, l, \varepsilon), r, l, \varepsilon)]_{r=\varepsilon^{3/4}\zeta} = \\ &= \left[h(r, l) \cdot \left(\left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2} \bar{u}_i(r, l) + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} \Pi_i(\rho, l) \right\}^2 - \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2} \bar{u}_i(r, l) \right\}^2 \right) - \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon \left\{ f_1 \left(\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2} \bar{u}_i(r, l) + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} \Pi_i(\rho, l), r, l, \varepsilon \right) - f_1 \left(\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2} \bar{u}_i(r, l), r, l, \varepsilon \right) \right\} \right]_{r=\varepsilon^{3/4}\zeta} \quad (17) \end{aligned}$$

Если извлекать уравнения для функций $\Pi_i(\rho, l)$ стандартным образом [1], т. е. приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε в разложениях левой и правой частей равенства (16), то для $\Pi_0(\rho, l)$ получаем задачу (l входит, как параметр, $0 \leq l \leq l_0$):

$$\frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial \rho^2} = h(0, l) \Pi_0^2, \quad \rho > 0, \quad (18)$$

$$\Pi_0(0, l) = \Pi^0(l), \quad (19)$$

$$\Pi_0(\infty, l) = 0. \quad (20)$$

Решение этой задачи

$$\Pi_0(\rho, l) = \frac{\Pi^0}{\left(\sqrt{\frac{1}{6} h(0, l) \Pi^0} \cdot \rho + 1 \right)^2} \quad (21)$$

убывает при $\rho \rightarrow \infty$ степенным образом: $\Pi_0(\rho, l) = O\left(\frac{1}{(1+\rho)^2}\right)$.

Однако анализ задачи (1), (2) показывает, что ее решение в пограничном слое ведет себя более сложным образом, чем это описывается функцией (21). Пограничный слой разделяется на три зоны. Степенное убывание пограничных функций имеет место только в первой зоне пограничного слоя. Вторая зона является переходной, а в третьей зоне пограничные функции убывают экспоненциально с ростом погранслошной переменной $\zeta = r/\varepsilon^{3/4}$. Ниже уточним границы этих зон.

Для корректного описания поведения решения в пограничном слое необходимо изменить стандартные уравнения для $\Pi_0(\rho, l)$ и следующих слагаемых погранслошного ряда. В правую часть уравнения (18) добавим слагаемое $2h(0, l)\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(0, l)\Pi_0$, которое содержится в разложении Πf (см. (17)). Таким образом, функция $\Pi_0(\rho, l)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial \rho^2} = h(0, l) (\Pi_0^2 + 2\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(0, l)\Pi_0), \quad \rho > 0, \quad (22)$$

с граничными условиями (19), (20).

Заметим, что функция Π_0 и также следующие коэффициенты Π_i ряда (13) будут зависеть не только от ρ и l , но также и от ε , но с целью уменьшения громоздкости формул будем писать $\Pi_i(\rho, l)$ вместо $\Pi_i(\rho, l, \varepsilon)$.

Задача (22), (19), (20) стандартным образом сводится к дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial \rho} = -\sqrt{h(0, l) \left(\frac{2}{3}\Pi_0^3 + 2\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(0, l)\Pi_0^2 \right)}, \quad \rho > 0, \quad (23)$$

с начальным условием (19).

Так как $\Pi^0(l) > 0$ (условие А3), $h(0, l) > 0$ (см. (7)), $\bar{u}_1(0, l) > 0$ (см. (9)), то $\Pi_0(\rho, l) > 0$ при $\rho \geq 0$ и $\Pi_0(\rho, l)$ монотонно стремится к нулю при $\rho \rightarrow \infty$. Решение находится в явном виде

$$\Pi_0(\rho, l) = 12\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(0, l) \frac{c \cdot \exp(-\varepsilon^{1/4}k_0\rho)}{(1 - c \cdot \exp(-\varepsilon^{1/4}k_0\rho))^2}, \quad (24)$$

где $c := 1 - \sqrt{12\bar{u}_1(0, l)(\Pi^0)^{-1}\varepsilon^{1/4} + O(\varepsilon^{1/2})}$, $k_0 := \sqrt{2h(0, l)\bar{u}_1(0, l)} > 0$.

Анализ выражения (24) выявляет различный характер поведения $\Pi_0(\rho, l)$ в каждой из трех зон.

В первой зоне, где $0 \leq \rho \leq \varepsilon^{-\gamma}$, γ – любое число из промежутка $0 \leq \gamma < 1/4$, т.е. $0 \leq r \leq \varepsilon^{1-\gamma}$, функция $\Pi_0(\rho, l)$ убывает степенным образом:

$$\Pi_0(\rho, l) = O\left(\frac{1}{(1+\rho)^2}\right).$$

Вторая зона, где $\varepsilon^{-\gamma} \leq \rho \leq \varepsilon^{-1/4}$, т.е. $\varepsilon^{1-\gamma} \leq r \leq \varepsilon^{3/4}$, является переходной, в ней происходит изменение масштаба погранслошной переменной и характера убывания функции $\Pi_0(\rho, l)$.

И, наконец, в третьей зоне, где $\rho \geq \varepsilon^{-1/4}$, т.е. $r \geq \varepsilon^{3/4}$, возникает новая погранслошная переменная $\zeta = r/\varepsilon^{3/4}$, и функция Π_0 убывает экспоненциально с ростом ζ :

$$\Pi_0 = O(\varepsilon^{1/2}) \exp(-k_0 \zeta).$$

При этом функция $\Pi_0(\rho, l)$, являющаяся решением задачи (22), (19), (20) описывает поведение решения во всех трех зонах пограничного слоя. Следующие члены пограничного ряда (13) имеют такое же поведение, как и $\Pi_0(\rho, l)$, как мы увидим в дальнейшем.

Уравнения для коэффициентов $\Pi_i(\rho, l)$ погранслошного ряда так же, как и для $\Pi_0(\rho, l)$, получим не стандартным образом, а с определенными модификациями стандартного способа. Прежде всего, в правую часть уравнения для $\Pi_i(\rho, l)$ войдет слагаемое $2h(0, l)\Pi_0(\rho, l)\Pi_i$, а также слагаемое $2h(0, l)\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(0, l)\Pi_i$, соответствующее слагаемому $2h(0, l)\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(0, l)\Pi_0$ в уравнении (22). Поэтому уравнение для $\Pi_i(\rho, l)$, $i = 1, 2, \dots$ имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial \rho^2} = 2h(0, l) [\Pi_0(\rho, l) + \sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(0, l)] \Pi_i + \pi_i(\rho, l, \varepsilon), \quad \rho > 0, \quad (25)$$

где функция $\pi_i(\rho, l, \varepsilon)$ выражается через $\Pi_j(\rho, l)$, $j < i$, и формируется следующим образом. При разложении правой части (16) по степеням $\varepsilon^{1/4}$ обозначим коэффициент при $(\varepsilon^{1/4})^i$ через $q_i(\Pi_0, \dots, \Pi_{i-1}, \zeta, l)$. В этот коэффициент мы не включаем слагаемые $2h(0, l)\Pi_0(\rho, l)\Pi_i(\rho, l)$ и $2h(0, l)\bar{u}_1(0, l)\Pi_{i-2}(\rho, l)$, первое из которых уже вошло в правую часть (25), а второе – в правую часть уравнения для $\Pi_{i-2}(\rho, l)$. Если какое-то слагаемое (обозначим его $\tilde{q}_i(\Pi_0, \dots, \Pi_{i-1}, \zeta, l)$), входящее в коэффициент q_i , имеет оценку по модулю, содержащую не менее двух сомножителей из набора $|\Pi_0(\rho, l)|, \dots, |\Pi_{i-1}(\rho, l)|$, то есть

$$|\tilde{q}_i| \leq p_i(\zeta, l) |\Pi_j(\rho, l)| |\Pi_k(\rho, l)|, \quad j \leq i-1, \quad k \leq i-1,$$

где $p_i(\zeta, l)$ – неотрицательная функция, то это слагаемое, заменив ζ на $\varepsilon^{1/4}\rho$, включаем в $\pi_i(\rho, l, \varepsilon)$. Если же оценка по модулю для $\tilde{q}_i$ содержит только один сомножитель указанного вида, то это слагаемое, умноженное на $\varepsilon^{1/2}$, включаем в $\pi_{i-2}(\rho, l, \varepsilon)$, заменив, как и в первом случае, ζ на $\varepsilon^{1/4}\rho$.

Кроме того, при $i \geq 2$ в состав $\pi_i(\rho, l, \varepsilon)$ включаем со знаком минус слагаемые $\varepsilon^{1/2} \sum_{j+k=i+2} L_j \Pi_k(\rho, l)$, где $j \geq 4$, $k \geq 0$, заменив ζ на $\varepsilon^{1/4}\rho$ в выражениях для коэффициентов операторов L_j (эти слагаемые берутся из левой части (16)). Обоснование указанного способа формирования функций $\pi_i(\rho, l, \varepsilon)$ будет дано ниже. В качестве примера выпишем выражения для $\pi_i(\rho, l, \varepsilon)$, $i = 1, 2, 3$, сформированные по указанному принципу:

$$\begin{aligned}
 \pi_1(\rho, l, \varepsilon) &= 0, \\
 \pi_2(\rho, l, \varepsilon) &= \varepsilon^{1/2} \left[2h(0, l)\bar{u}_2(0, l)\Pi_0(\rho, l) - \beta(0, l)\frac{\partial \Pi_0}{\partial \rho}(\rho, l) - \Pi_0 f_1 \right], \\
 \Pi_0 f_1 &:= f_1(\bar{u}_0(0, l) + \Pi_0(\rho, l), 0, l, 0) - f_1(\bar{u}_0(0, l), 0, l, 0), \\
 \pi_3(\rho, l, \varepsilon) &= \left[\frac{\partial}{\partial r} h(r, l) \right]_{r=0} \cdot (\varepsilon^{1/4} \rho) \Pi_0^2(\rho, l) + \\
 &+ \varepsilon^{1/2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \{2h(r, l)\bar{u}_1(r, l)\} \right]_{r=0} \cdot (\varepsilon^{1/4} \rho) \Pi_0(\rho, l) - \varepsilon^{1/2} \beta(0, l) \frac{\partial \Pi_1}{\partial \rho}(\rho, l).
 \end{aligned} \tag{26}$$

Граничные условия для пограничных функций $\Pi_i(\rho, l)$, $i = 1, 2, \dots$ следуют из (14), (15) и имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \Pi_i(0, l) &= \begin{cases} -\bar{u}_{i/2}(0, l), & \text{если } i - \text{четное число,} \\ 0, & \text{если } i - \text{нечетное число.} \end{cases} \\
 \Pi_i(\infty, l) &= 0.
 \end{aligned} \tag{27}$$

Учитывая, что $\pi_1(\rho, l, \varepsilon) = 0$, а также (27) при $i = 1$, находим

$$\Pi_1(\rho, l) \equiv 0. \tag{28}$$

Этот факт будет использоваться при обосновании асимптотики.

Решение задачи (25), (27) можно записать в явном виде, что позволяет получить для всех функций $\Pi_i(\rho, l)$ единообразную оценку. Это будет сделано в следующем пункте.

2.3. Оценки пограничных функций

Введем эталонную функцию

$$\Pi_{\varkappa}(\rho, l) = 12\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(0, l) \frac{c \cdot \exp(-\varepsilon^{1/4}\varkappa\rho)}{(1 - c \cdot \exp(-\varepsilon^{1/4}k_0\rho))^2}, \tag{29}$$

где c и k_0 – те же самые функции, что и в (24), а $\varkappa$ – число из интервала $0 < \varkappa < \min_{l \in [0; l_0]} k_0(l)$. Функция $\Pi_{\varkappa}(\rho, l)$ имеет такой же вид, как $\Pi_0(\rho, l)$ (см. (24)), с тем лишь отличием, что в показателе экспоненты в числителе дроби стоит число $\varkappa$ вместо $k_0(l)$. Поэтому справедлива оценка

$$\Pi_0(\rho, l) \leq \Pi_{\varkappa}(\rho, l), \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq l \leq l_0. \tag{30}$$

Аналогичную оценку будут иметь функции $\Pi_i(\rho, l)$, $i = 1, 2, \dots$

$$|\Pi_i(\rho, l)| \leq c\Pi_{\varkappa}(\rho, l), \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq l \leq l_0, \tag{31}$$

с различными числами c и $\varkappa$ (не зависящими от ε) для разных i .

Для доказательства оценки (31) сформулируем лемму

Лемма 1. Рассмотрим задачу для функции $\nu(\rho, l)$:

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial \rho^2} = 2h(0, l) [\Pi_0(\rho, l) + \sqrt{\varepsilon} \bar{u}_1(0, l)] \nu + g(\rho, l, \varepsilon), \quad \rho > 0, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \nu(0, l) &= \nu^0, \\ \nu(\infty, l) &= 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Если функция $g(\rho, l, \varepsilon)$ имеет оценку

$$|g(\rho, l, \varepsilon)| \leq c [\Pi_{\varkappa}^2(\rho, l) + \sqrt{\varepsilon} \Pi_{\varkappa}(\rho, l)], \quad (34)$$

то для функции $\nu(\rho, l)$ справедливо неравенство

$$|\nu(\rho, l)| \leq c \Pi_{\varkappa}(\rho, l). \quad (35)$$

Здесь и далее в различных оценках типа (34), (35) используются разные числа c и $\varkappa$, но в целях упрощения записи будем обозначать их одними и теми же буквами c и $\varkappa$.

Доказательство Леммы 1 проводится аналогично тому, как это сделано в статье [4].

Для доказательства оценки (31) для любой функции $\Pi_i(\rho, l)$ будем использовать Лемму 1. Но, чтобы применить Лемму 1, необходимо доказать, что функции $\pi_i(\rho, l, \varepsilon)$, входящие в правую часть уравнения (25), удовлетворяют требованию (34). В силу способа формирования функций $\pi_i(\rho, l, \varepsilon)$ в их состав войдут не только члены погранслоного ряда $\Pi_j(\rho, l)$, но и их частные производные $\frac{\partial}{\partial \rho} \Pi_j(\rho, l)$, $\frac{\partial}{\partial l} \Pi_j(\rho, l)$, $\frac{\partial^2}{\partial l^2} \Pi_j(\rho, l)$, $j < i$. Следовательно, оценку типа (35) нужно обосновать не только для функций $\Pi_i(\rho, l)$, но и для их частных производных:

$$\left| \frac{\partial^{m+n}}{\partial \rho^m \partial l^n} \Pi_i(\rho, l) \right| \leq c \Pi_{\varkappa}(\rho, l), \quad i = 0, 1, \dots; \quad m = 0, 1; \quad m + n = 0, 1, 2. \quad (36)$$

Задача для $\frac{\partial \Pi_0}{\partial l}(\rho, l)$ получается из задачи (22), (19), (20) дифференцированием по параметру l :

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \left(\frac{\partial \Pi_0}{\partial l} \right) = 2h(0, l) [\Pi_0(\rho, l) + \sqrt{\varepsilon} \bar{u}_1(0, l)] \left(\frac{\partial \Pi_0}{\partial l} \right) + q(\rho, l, \varepsilon), \quad \rho > 0, \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_0}{\partial l}(0, l) &= \frac{d\Pi^0(l)}{dl}, \\ \frac{\partial \Pi_0}{\partial l}(\infty, l) &= 0, \end{aligned} \quad (38)$$

где $q(\rho, l, \varepsilon) := \frac{\partial h}{\partial l}(0, l) \Pi_0^2(\rho, l) + 2\sqrt{\varepsilon} (h(0, l) \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial l}(0, l) + \bar{u}_1(0, l) \frac{\partial h}{\partial l}(0, l)) \Pi_0(\rho, l)$. Очевидно, для $q(\rho, l, \varepsilon)$ имеем оценку типа (34)

$$|q(\rho, l, \varepsilon)| \leq c [\Pi_{\varkappa}^2(\rho, l) + \sqrt{\varepsilon} \Pi_{\varkappa}(\rho, l)].$$

Тогда, согласно Лемме 1, функция $\frac{\partial \Pi_0}{\partial l}(\rho, l)$ удовлетворяет неравенству типа (36).

Аналогично доказывается оценка типа (36) для производной любого порядка функции $\Pi_0(\rho, l)$.

Доказательство справедливости оценок (31) и (36) для функций $\Pi_i(\rho, l)$, $i \geq 1$ проведем по индукции. Предположим, что неравенство (36) выполнено для функций $\Pi_j(\rho, l)$ с номерами $j = 0, 1, \dots, i-1$. Для функции $\Pi_i(\rho, l)$ имеем задачу (25), (27). Согласно описанному алгоритму формирования функции $\pi_i(\rho, l, \varepsilon)$, входящей в правую часть уравнения (25), для нее справедлива оценка типа (34). Поэтому, согласно Лемме 1, функция $\Pi_i(\rho, l)$ имеет оценку (31).

Как и в случае $\Pi_0(\rho, l)$, аналогичными рассуждениями доказывается оценка (36) для производной функций $\Pi_0(\rho, l)$ произвольного порядка.

Итак, оценки (31) и (36) доказаны для любой функции $\Pi_i(\rho, l)$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Оценка (31) показывает, что все эти функции имеют одинаковый (трехзонный) характер убывания с ростом ρ , как и функции $\Pi_0(\rho, l)$ и $\Pi_{\kappa}(\rho, l)$ (см. (31)).

Таким образом, в рассматриваемой задаче функция $\Pi_{\kappa}(\rho, l)$ является эталонной (оценочной) функцией для всех пограничных функций $\Pi_i(\rho, l)$ подобно тому, как в случае простого корня вырожденного уравнения (см. [1]) и также в случае двукратного корня вырожденного уравнения задачи Неймана при условии $\bar{f}_1(x) > 0$ (см. [3]) в роли эталонной выступала функция $\exp(-\kappa\rho)$.

Обозначим через $\Pi^{(m)}$ частичную сумму ряда (13):

$$\Pi^{(m)} = \sum_{i=0}^m \varepsilon^{i/4} \Pi_i(\rho, l).$$

Как следует из алгоритма формирования уравнений для функций $\Pi_i(\rho, l)$, функция $\Pi^{(m)}$ удовлетворяет равенству (16) с точностью $O(\varepsilon^{(m+1)/2})\Pi_{\kappa}(\rho, l)$, т. е.

$$\varepsilon^2 \Delta \Pi^{(m)} - \Pi^{(m)} f = O(\varepsilon^{\frac{m+1}{2}}) \Pi_{\kappa}(\rho, l). \quad (39)$$

Заметим, что хотя функции $\Pi_i(\rho, l)$ определены при $\rho \geq 0$, фактически они имеют смысл только при $0 \leq \rho \leq \delta/\varepsilon$, т. е. в той (достаточно малой) δ – окрестности границы $\partial\Omega$, где введены локальные координаты (r, l) . Для гладкого продолжения их на всю область $\bar{\Omega}$ применим стандартную процедуру (см. [1]): умножим каждую функцию $\Pi_i(\rho, l)$ на бесконечно дифференцируемую срезающую функцию, равную единице в $\delta/2$ – окрестности границы $\partial\Omega$ и нулю вне δ – окрестности $\partial\Omega$. Это никак не повлияет на построенную асимптотику, поскольку $\Pi_i(\rho, l) = O\left(\exp\left(-\frac{\kappa\delta}{2\varepsilon^{1/4}}\right)\right) = o\left(\varepsilon^N\right)$ для любого N при $\rho \geq \frac{\delta}{2\varepsilon}$ (т. е. при $r \geq \frac{\delta}{2}$). Для регуляризованных таким образом функций $\Pi_i(\rho, l)$ сохраним старые обозначения.

3. Обоснование асимптотики

Итак, мы построили регулярный (8) и погранслоный (13) ряды. Для суммы этих рядов обозначим через $U_n(x, \varepsilon)$ частичную сумму следующего вида:

$$U_n(x, \varepsilon) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^{i/2} \bar{u}_i(x) + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/4} \Pi_i(\rho, l). \quad (40)$$

Теорема 1. При условиях A1–A3 для достаточно малых ε задача (1), (2) имеет решение $u(x, \varepsilon)$, для которого функция (40) является равномерным в $\bar{\Omega}$ асимптотическим приближением с точностью порядка $O(\varepsilon^{(n+1)/2})$, т. е. для любого $n = 0, 1, 2, \dots$ справедливо равенство

$$u(x, \varepsilon) = U_n(x, \varepsilon) + O(\varepsilon^{(n+1)/2}), \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (41)$$

Доказательство. Докажем теорему с помощью асимптотического метода дифференциальных неравенств, т. е. путем построения подходящих нижнего и верхнего решений задачи (1), (2) с использованием суммы (40).

Напомним, что функции $\underline{U}(x, \varepsilon)$ и $\bar{U}(x, \varepsilon)$ называются нижним и верхним решениями задачи (1), (2), если они удовлетворяют условиям [6]:

$$\begin{aligned} 1. L_\varepsilon \underline{U} &:= \varepsilon^2 \Delta \underline{U} - f(\underline{U}, x, \varepsilon) \geq 0 \geq L_\varepsilon \bar{U}, \quad x \in \Omega; \\ 2. \underline{U}(x, \varepsilon) &\leq u^0(x) \leq \bar{U}(x, \varepsilon), \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Нижнее и верхнее решения называются упорядоченными, если $\underline{U}(x, \varepsilon) \leq \bar{U}(x, \varepsilon)$, $x \in \bar{\Omega}$.

Если существуют упорядоченные нижнее и верхнее решения задачи (1), (2), то эта задача имеет решение $u(x, \varepsilon)$, удовлетворяющее неравенствам [6]:

$$\underline{U}(x, \varepsilon) \leq u(x, \varepsilon) \leq \bar{U}(x, \varepsilon), \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (42)$$

Нижнее решение задачи (1), (2) возьмем в виде

$$\underline{U}(x, \varepsilon) = U_n(x, \varepsilon) - M\varepsilon^{(n+1)/2},$$

где функция $U_n(x, \varepsilon)$ определена формулой (40), M – положительное число, не зависящее от ε , $n \geq 1$.

В силу (19), (27) функция $\underline{U}(x, \varepsilon)$ удовлетворяет при любом M условию 2 для нижнего решения:

$$\underline{U} \Big|_{\partial\Omega} = U_n(0, l, \varepsilon) - M\varepsilon^{(n+1)/2} = u^0(l) - M\varepsilon^{(n+1)/2} < u^0(l).$$

Покажем, что при достаточно большом M и достаточно малых ε функция $\underline{U}(x, \varepsilon)$ будет удовлетворять условию 1 для нижнего решения.

Согласно (11) и (39) для $U_n(x, \varepsilon)$ справедливо равенство:

$$L_\varepsilon U_n = O(\varepsilon^{n/2+1}) + O(\varepsilon^{(n+1)/2})\Pi_\varkappa(\rho, l).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} L_\varepsilon \underline{U} &= L_\varepsilon U_n + f(U_n, x, \varepsilon) - f(U_n - M\varepsilon^{(n+1)/2}, x, \varepsilon) = \\ &= O(\varepsilon^{n/2+1}) + O(\varepsilon^{(n+1)/2})\Pi_\varkappa(\rho, l) - h(x) \left[(U_n - M\varepsilon^{(n+1)/2} - \varphi(x))^2 - (U_n - \varphi(x))^2 \right] + \\ &+ \varepsilon[f_1(U_n - M\varepsilon^{(n+1)/2}, x, \varepsilon) - f_1(U_n, x, \varepsilon)] = O(\varepsilon^{n/2+1}) + O(\varepsilon^{(n+1)/2})\Pi_\varkappa(\rho, l) - \\ &- h(x) \left[(U_n - M\varepsilon^{(n+1)/2} - \varphi(x))^2 - (U_n - \varphi(x))^2 \right] - \varepsilon f_{1u}^* \cdot M\varepsilon^{(n+1)/2}, \end{aligned}$$

где производная f_{1u}^* берется в некоторой промежуточной точке. Учтем, что $h(x) \geq h_0 = \text{const} > 0$ в силу (7), $\Pi_1(\rho, l) \equiv 0$ (см. (28)), $U_n - \varphi(x) = \sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(x) + \Pi_0 + \sqrt{\varepsilon}\Pi_2 + O(\varepsilon^{3/4})$, и так как $n \geq 1$, то $\varepsilon^{(n+1)/2} = o(\sqrt{\varepsilon})$. В результате получим:

$$\begin{aligned} L_\varepsilon \underline{U} &\geq O(\varepsilon^{(n+2)/2}) + O(\varepsilon^{(n+1)/2})\Pi_\varkappa(\rho, l) + \\ &+ 2h_0M\varepsilon^{(n+1)/2}(\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(x) + \Pi_0 + \sqrt{\varepsilon}\Pi_2 + O(\varepsilon^{3/4}) - (M/2)\varepsilon^{(n+1)/2}) \geq \\ &\geq O(\varepsilon^{(n+2)/2}) + O(\varepsilon^{(n+1)/2})\Pi_\varkappa(\rho, l) + \\ &+ 2h_0M\varepsilon^{(n+1)/2} [\sqrt{\varepsilon}\bar{u}(x) + \Pi_0 + \sqrt{\varepsilon}\Pi_2 - M \cdot o(\sqrt{\varepsilon})]. \end{aligned} \quad (43)$$

Остановимся на детальном рассмотрении третьего слагаемого в правой части выражения (43). Учтем, что $\bar{u}_1(x) \geq c_0 > 0$, $x \in \Omega$. Тогда

$$\begin{aligned} &2h_0M\varepsilon^{(n+1)/2} [\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(x) + \Pi_0 + \sqrt{\varepsilon}\Pi_2 - M \cdot o(\sqrt{\varepsilon})] \geq \\ &\geq h_0M\varepsilon^{(n+1)/2} \{ (c_0\sqrt{\varepsilon} + \Pi_0(\rho, l)) + [c_0\sqrt{\varepsilon} + \Pi_0(\rho, l) + 2\sqrt{\varepsilon}\Pi_2(\rho, l) - M \cdot o(\sqrt{\varepsilon})] \}. \end{aligned} \quad (44)$$

Заметим, что для любого M выражение в квадратных скобках положительно для достаточно малых ε . В самом деле, возьмем число ρ_0 столь большим (и не зависящим от ε), что

$$|\Pi_2(\rho, l)| < \frac{1}{2}c_0, \quad \rho \geq \rho_0. \quad (45)$$

Такое ρ_0 найдется, поскольку в первой зоне пограничного слоя $\Pi_2(\rho, l) = O\left(\frac{1}{(1+\rho)^2}\right)$. Тогда при $0 \leq \rho \leq \rho_0$ для достаточно малых ε $c_0\sqrt{\varepsilon} - M \cdot o(\sqrt{\varepsilon}) > 0$, и $\Pi_0(\rho, l) + 2\sqrt{\varepsilon}\Pi_2(\rho, l) > 0$, поскольку $\Pi_0(\rho, l) > 0$, а при $\rho \geq \rho_0$ в силу (45) выполняется неравенство $c_0\sqrt{\varepsilon} + 2\Pi_2(\rho, l)\sqrt{\varepsilon} - M \cdot o(\sqrt{\varepsilon}) > 0$, и, следовательно, выражение в квадратных скобках положительно. Поэтому из (44) следует неравенство

$$2h_0M\varepsilon^{(n+1)/2} [\sqrt{\varepsilon}\bar{u}(x) + \Pi_0 + \sqrt{\varepsilon}\Pi_2 - M \cdot o(\sqrt{\varepsilon})] \geq h_0M\varepsilon^{(n+1)/2}(c_0\sqrt{\varepsilon} + \Pi_0(\rho, l)), x \in \Omega.$$

Используя эту оценку, из (43) получаем

$$L_\varepsilon \underline{U} \geq O(\varepsilon^{(n+2)/2}) + O(\varepsilon^{(n+1)/2})\Pi_\varkappa(\rho, l) + h_0c_0M\varepsilon^{(n+2)/2} + h_0\Pi_0(\rho, l)M\varepsilon^{(n+1)/2}, \quad x \in \Omega. \quad (46)$$

Так как

$$\Pi_\varkappa(\rho, l) = \Pi_0(\rho, l) \exp(\varepsilon^{1/4}(k_0 - \varkappa)\rho),$$

то при $0 \leq \rho \leq \varepsilon^{-1/4}$ выполняется неравенство

$$\Pi_{\kappa}(\rho, l) \leq c\Pi_0(\rho, l),$$

где $c = \exp(k_0 - \kappa)$. Поэтому при $0 \leq \rho \leq \varepsilon^{-1/4}$ сумма второго и четвертого слагаемых, а также сумма первого и третьего слагаемых в правой части (46) больше нуля для достаточно большого M и достаточно малых ε .

Итак,

$$L_{\varepsilon} \underline{U} \geq 0, \quad 0 \leq \rho \leq \varepsilon^{-1/4}.$$

При $\rho \geq \varepsilon^{-1/4}$, функция $\Pi_{\kappa}(\rho, l)$ имеет порядок $O(\sqrt{\varepsilon})$ (см. (29)), поэтому второе слагаемое в правой части (46) имеет порядок $O(\varepsilon^{(n+2)/2})$, и, следовательно, правая часть (46) будет положительной за счет третьего слагаемого при достаточно большом M и достаточно малых ε .

В результате для достаточно большого M и при достаточно малых ε приходим к неравенству

$$L_{\varepsilon} \underline{U} \geq 0, \quad x \in \Omega,$$

т. е. функция $\underline{U}(x, \varepsilon)$ удовлетворяет условию 1 для нижнего решения.

Итак, при достаточно большом M и достаточно малых ε функция $\underline{U}(x, \varepsilon) = U_n(x, \varepsilon) - M\varepsilon^{(n+1)/2}$ является нижним решением задачи (1), (2).

Аналогично доказывается, что функция

$$\bar{U}(x, \varepsilon) = U_n(x, \varepsilon) + M\varepsilon^{(n+1)/2}$$

при достаточно большом M и достаточно малых ε является верхним решением задачи (1), (2). Построенные нижнее и верхнее решения, очевидно, являются упорядоченными. Следовательно, существует решение $u(x, \varepsilon)$ задачи (1), (2), удовлетворяющее неравенствам (42). Из этих неравенств и вида нижнего и верхнего решений следует равенство (41). Мы доказали его для $n \geq 1$. При $n = 1$ оно принимает вид

$$u(x, \varepsilon) = U_1(x, \varepsilon) + O(\varepsilon), \quad (47)$$

а поскольку $U_1(x, \varepsilon) = U_0(x, \varepsilon) + O(\sqrt{\varepsilon})$, то из (47) следует равенство:

$$u(x, \varepsilon) = U_0(x, \varepsilon) + O(\sqrt{\varepsilon}),$$

т. е. равенство (41) справедливо также для $n = 0$. Теорема 1 доказана.

Список литературы / References

- [1] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., *Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений*, Высшая школа, М., 1990; [Vasilieva A. B., Butuzov V. F., *Asymptotic methods in the theory of singular perturbations*, Moscow, 1990, (in Russian).]
- [2] Paul C. Fife, "Semilinear elliptic boundary value problems with small parameters", *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **52** (1973), 205–232.

- [3] Белошапко В. А., Бутузов В. Ф., “Сингулярно возмущенная эллиптическая задача в случае кратного корня вырожденного уравнения”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **53**:8 (2013), 1291–1301; [Beloshapko V. A., Butuzov V. F., “A singularly perturbed elliptic problem in the case of a multiple root of the degenerate equation”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **53**:8 (2013), 1117–1127 .]
- [4] Белошапко В. А., Бутузов В. Ф., “Асимптотика решения сингулярно возмущенной эллиптической задачи с трехзонным пограничным слоем”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **56**:8 (2016), 1428–1440; [Beloshapko V. A., Butuzov V. F., “Asymptotics of the solution of a singularly perturbed elliptic problem with three-band boundary layer”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **56**:8 (2016), 1414–1425 .]
- [5] Бутузов В. Ф., “Об особенностях пограничного слоя в сингулярно возмущённых задачах с кратным корнем вырожденного уравнения”, *Математические заметки*, **94**:1 (2013), 68–80; [Butuzov V. F., “On the Special Properties of the Boundary Layer in Singularly Perturbed Problems with Multiple Root of the Degenerate Equation”, *Mathematical Notes*, **94**:1 (2013), 60–70 .]
- [6] Pao C. V., *Nonlinear parabolic and elliptic equations*, Plenum Press, New York, 1992.

Butuzov V. F., Beloshapko V. A., "Singularly Perturbed Elliptic Dirichlet Problem with a Multiple Root of the Degenerate Equation", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:5 (2016), 515–528.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-5-515-528

Abstract. A singularly perturbed elliptic problem with Dirichlet boundary conditions is considered in the case of multiple roots of the degenerate equation. A complete asymptotic expansion of the solution is constructed and justified. It is qualitatively different from the known expansion in the case where the root of the degenerate equation is simple: the asymptotic expansion of the solution being in fractional powers of the small parameter, boundary-layer variables have a different scale, boundary-layer series is constructed using a non-standard algorithm, the boundary layer in the vicinity of the domain boundary consists of three zones with different behavior of the solution in different zones.

Keywords: singularly perturbed elliptic equation, case of multiple root of the degenerate equation, asymptotic expansion of boundary layer type solution, three-band boundary layer

On the authors:

Valentin F. Butuzov, Professor,
Lomonosov Moscow State University,
GSP-1, 1-2 Leninskiye Gory, 119991, Russia, e-mail: butuzov@phys.msu.ru

Vera A. Beloshapko, graduate student,
Lomonosov Moscow State University,
GSP-1, 1-2 Leninskiye Gory, 119991, Russia, e-mail: postvab@rambler.ru

Acknowledgments:

This work was supported by RFBR under the Grant No 15-01-04619.