Моделирование и анализ информационных систем. Т. 23, № 5 (2016), с. 548–558
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 23, No 5 (2016), pp. 548–558

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-5-548-558

УДК 517.9

Взаимодействие двух волн в модели Ферми – Паста – Улама

Глызин С.Д.[1]**, Кащенко С.А., Толбей А.О.**

получена 15 июня 2016

Аннотация. Работа посвящена исследованию динамических свойств решений краевых задач, связанных с классической системой Ферми – Паста – Улама (ФПУ). При исследовании локальной динамики этих задач может реализовываться критический случай бесконечной размерности. В этих условиях построено специальное нелинейное уравнение с частными производными, которое играет роль квазинормальной формы, т.е. определяет в главном поведение всех решений исходной краевой задачи с начальными условиями из достаточно малой окрестности состояния равновесия. В зависимости от значений параметров в качестве квазинормальных форм выступают модифицированное уравнение Кортевега – де Вриза (КДВ) и уравнение Кортевега – де Вриза – Бюргерса (КДВБ). При некоторых дополнительных предположениях к полученным краевым задачам применена процедура повторной нормализации, приводящая к бесконечномерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, описан способ сворачивания этой системы в краевую задачу – аналог нормальной формы. Построенные квазинормальные формы позволяют судить о динамике задачи ФПУ. Основной результат работы состоит в том, что аналитическими методами нелинейной динамики изучен вопрос о взаимодействии волн, движущихся в разных направлениях, в задаче ФПУ. При рассмотрении так называемых регулярных решений описано влияние волн друг на друга, которое задается специальным интегральным соотношением. Показано, что это влияние является асимптотически малым и не меняет форму волн, внося вклад только в их скоростной сдвиг, который не меняется по времени.

Ключевые слова: модель Ферми – Паста – Улама, обобщенное уравнение Кортевега–де Вриза, квазинормальная форма, краевая задача

Для цитирования: Глызин С.Д., Кащенко С.А., Толбей А.О., "Взаимодействие двух волн в модели Ферми – Паста – Улама", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:5 (2016), 548–558.

Об авторах:
Глызин Сергей Дмитриевич, orcid.org/0000-0002-6403-4061, д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой компьютерных сетей,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия,
ведущий научный сотрудник,
НЦЧ РАН, ул. Лесная, д. 9, г. Черноголовка, Московская область, 142432 Россия, e-mail: glyzin@uniyar.ac.ru

Кащенко Сергей Александрович, д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой математического моделирования,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия,
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Каширское шоссе, 31, г. Москва, 115409 Россия,
e-mail: kasch@uniyar.ac.ru

Толбей Анна Олеговна, orcid.org/0000-0001-5668-3929 канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры компьютерных сетей,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия,
e-mail: bekva@yandex.ru

Благодарности:
[1] Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект №14-21-00158).

1. Постановка задачи

Рассматривается хорошо известная [1–6] модель Ферми – Паста – Улама (ФПУ), которая описывается системой уравнений

$$m\frac{d^2y_j}{dt^2}=F_{j,j+1}-F_{j-1,j}, \tag{1}$$

где

$$F_{j-1,j}=k(\triangle l)+\alpha(\triangle l)^2+\beta(\triangle l)^3,\ \triangle l=y_j-y_{j-1}\qquad (k>0).$$

Здесь $y_j=y_j(t)$ координата положения равновесия j-й массы. В классической задаче ФПУ имеем $\beta=0$. Система уравнений с ненулевым коэффициентом β предложена в [7]. Пусть $y_j(t)=y(t,x_j)$ и расстояния между соседними точками x_j равны h. Считается, что значения x_j распределены на отрезке длины $2\pi L$ и выполнено условие периодичности $y(t,x_j+2\pi L)=y(t,x_j)$. Удобно произвести нормировку пространственной переменной $x : x\to Lx$. В результате приходим к соотношению $x_{j+1}=x_j+\varepsilon$, где $\varepsilon=hL^{-1}$. Основное предположение состоит в том, что параметр ε является достаточно малым: $0<\varepsilon\ll 1$. Следующее важное ограничение состоит в том, что рассматриваются так называемые регулярные решения системы (1), т.е. такие решения $y(t,x)$, которые можно раскладывать в асимптотические при $\varepsilon\to 0$ ряды

$$y(t,x\pm\varepsilon)=y(t,x)\pm\varepsilon\frac{\partial y(t,x)}{\partial x}+\frac{1}{2}\varepsilon^2\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2}\pm\ldots \tag{2}$$

Подставим (2) в (1) и произведем перенормировку времени $t\to(km^{-1})^{1/2}\varepsilon t$. Тогда с точностью до $O(\varepsilon^6)$ получим [6], краевую задачу

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{1}{12}\varepsilon^2\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\frac{2}{6!}\varepsilon^4\frac{\partial^6 y}{\partial x^6}+\alpha\varepsilon\left[2\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{6}\varepsilon^2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2\right)\right)\right]+$$
$$+\beta\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3+\frac{1}{4}\varepsilon^2\left(\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}+\frac{\partial y}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2\right)\right], \tag{3}$$

$$y(t,x+2\pi)\equiv y(t,x). \tag{4}$$

В работах [4], [8–14] изучались регулярные решения данной краевой задачи, полученной из модели ФПУ (1).

Ниже исследуется поведение решений краевой задачи (3) - (4).

2. Нормализация краевой задачи (3) – (4)

От уравнения (3) перейдем к системе вида

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}&=v,\\ \frac{\partial v}{\partial t}&=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{12}\varepsilon^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{2}{6!}\varepsilon^4\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}+\alpha\varepsilon\left[2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{6}\varepsilon^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\right.\right.\right.\\ &\left.\left.\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2\right)\right)\right]+\beta\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3+\frac{1}{4}\varepsilon^2\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2\right)\right],\end{aligned} \tag{5}$$

где

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x), \ v(t, x + 2\pi) \equiv v(t, x). \tag{6}$$

Решение линеаризованной системы $\dot{w} = Aw$, где $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \end{pmatrix}$, $w = (u, v)^T$, можно разложить в формальный ряд Фурье по элементарным решениям $\xi_k \exp(ik(x+t))$ и $\eta_k \exp(ik(x-t))$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$. Поэтому можно говорить, что при исследовании локальной динамики задачи (5), (6) реализуется критический (в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия) случай бесконечной размерности. Отметим, что такого типа критические случаи изучались в работах [15–19]. Методика исследования базируется на предположении о том, что решения $w(t, x, \varepsilon)$ в (5), (6) можно представить в виде формального выражения

$$\begin{gathered} w(t, x, \tau, \varepsilon) = \varepsilon \xi(\tau, x + t, \varepsilon) + \varepsilon \eta(\tau, x - t, \varepsilon) + \varepsilon^2 w_2(t, x, \tau, \varepsilon) + \\ + \varepsilon^3 w_3(t, x, \tau, \varepsilon) + ..., \end{gathered} \tag{7}$$

где

$$\xi_{-k}(\tau, \varepsilon) = \bar{\xi}_k(\tau, \varepsilon), \quad \eta_{-k}(\tau, \varepsilon) = \bar{\eta}_k(\tau, \varepsilon),$$

$$\xi(\tau, z, \varepsilon) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k \begin{pmatrix} 1 \\ ik \end{pmatrix} \exp(ikz), \quad \eta(\tau, z, \varepsilon) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \eta_k \begin{pmatrix} 1 \\ -ik \end{pmatrix} \exp(ikz),$$

$\tau = \varepsilon^2 t$ — "медленное" время, $\xi_k(\tau, \varepsilon)$ и $\eta_k(\tau, \varepsilon)$ — неизвестные регулярно зависящие от ε амплитуды, а функции $w_j(t, x, \tau, \varepsilon)$ — 2π-периодичны по первым двум аргументам и тоже регулярно зависят от ε. Переход от исходной системы (5) к системе уравнений для определения амплитуд ξ_k и η_k будем называть нормализацией.

Подставим (7) в (5). Для определения функции

$$(U, V)^T = \varepsilon w_2(t, x, \tau, \varepsilon) + \varepsilon^2 w_3(t, x, \tau, \varepsilon)$$

получаем систему вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= V, \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + R_1(t, x, \tau, \varepsilon) + R_2(t, x, \tau, \varepsilon), \end{aligned} \tag{8}$$

в которой в функцию R_1 собраны все слагаемые, разложение которых в ряд Фурье производится только по системе функций $\exp(ik(x + t))$ или $\exp(ik(x - t))$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$, а в R_2 — остальные слагаемые. Отметим, что система (8) разрешима в указанном классе 2π-периодических по t и x функций при условии $R_1 \equiv 0$. Функция R_2 имеет вид

$$R_2 = 2\alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + O(\varepsilon),$$

поэтому для $w_2 = (w_{21}, w_{22})^T$ приходим к системе вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_{21}}{\partial t} &= w_{22}, \\ \frac{\partial w_{22}}{\partial t} &= \frac{\partial^2 w_{21}}{\partial x^2} + 2\alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$w_2 = -\frac{\alpha}{2}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}(\xi\eta) \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x\partial t}(\xi\eta) \end{pmatrix}.$$

Учитывая это равенство в (8), заключаем, что условия разрешимости системы (8) относительно $w_3 = (w_{31}, w_{32})^T$ в указанном классе функций состоит в выполнении соотношений

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2\xi}{\partial\tau^2} + 2\frac{\partial^2\xi}{\partial\tau\partial x} = \frac{1}{12}\frac{\partial^4\xi}{\partial x^4} + \frac{2}{6!}\varepsilon^2\frac{\partial^6\xi}{\partial x^6} + 2\alpha\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon^2\alpha}{6}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial^3\xi}{\partial x^3} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right)^2\right] +$$

$$+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial x}\left[\beta\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^3 + \left(3\beta - 2\alpha^2\right)M\left(\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\right)\frac{\partial\xi}{\partial x}\right], \tag{9}$$

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2\eta}{\partial\tau^2} - 2\frac{\partial^2\eta}{\partial\tau\partial x} = \frac{1}{12}\frac{\partial^4\eta}{\partial x^4} + \frac{2}{6!}\varepsilon^2\frac{\partial^6\eta}{\partial x^6} + 2\alpha\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon^2\alpha}{6}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)^2\right] +$$

$$+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial x}\left[\beta\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^3 + \left(3\beta - 2\alpha^2\right)M\left(\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\right)\frac{\partial\eta}{\partial x}\right], \tag{10}$$

$$\xi(\tau, x+2\pi, \varepsilon) \equiv \xi(\tau, x, \varepsilon), \eta(\tau, x+2\pi, \varepsilon) \equiv \eta(\tau, x, \varepsilon). \tag{11}$$

Здесь принято обозначение $M(\varphi(x)) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi(x)dx$.

Сформулируем несколько выводов о взаимодействии волн $\xi(\tau, x+t, \varepsilon)$ и $\eta(\tau, x-t, \varepsilon)$, движущихся в разных направлениях. Во-первых, это взаимодействие осуществляется через слагаемые $\varepsilon^2(3\beta-2\alpha^2)M\left((\frac{\partial\eta}{\partial x})^2\right)\frac{\partial\xi}{\partial x}$ и $\varepsilon^2(3\beta-2\alpha^2)M\left((\frac{\partial\xi}{\partial x})^2\right)\frac{\partial\eta}{\partial x}$ соответственно. Во-вторых, оно относительно слабое, так как имеет порядок ε^2. В-третьих, что самое важное, отмеченные слагаемые не влияют на форму волн, а вносят вклад только в их скоростной сдвиг, причем постоянный по времени. Это следует из того, что заменами $\tau \to \left(1+\varepsilon^2 M\left((\frac{\partial\eta}{\partial x})^2\right)\right)\tau$ в (9) и заменой $\tau \to \left(1+\varepsilon^2 M\left((\frac{\partial\xi}{\partial x})^2\right)\right)\tau$ в (10) соответствующие слагаемые, обеспечивающие связь уравнений (9) и (10), пропадают. Обратим внимание на то, что чем больше "среднее" одной волны, тем на большую величину происходит изменение скорости движения другой волны. Отметим, что явление, когда волны проходят друг через друга без изменений, а только с небольшим сдвигом по времени, хорошо известно в теории солитонов [20–23].

В уравнениях (9) и (10) произведем еще несколько преобразований. Учтем, что $\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$ и $\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}$ в (9) и (10) выражаются через производную по пространственной переменной от некоторого выражения. Для регулярных решений тогда имеем соотношения:

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = \frac{1}{24}\frac{\partial^3\xi}{\partial x^3} + \frac{\alpha}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + O(\varepsilon),\ \ \frac{\partial\eta}{\partial\tau} = -\frac{1}{24}\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3} - \frac{\alpha}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + O(\varepsilon).$$

Отсюда получаем, что

$$2\frac{\partial^2\xi}{\partial\tau^2} = \frac{1}{288}\frac{\partial^6\xi}{\partial x^6} + \frac{\alpha}{24}\frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\right) + \alpha\frac{\partial\xi}{\partial x}\left(\frac{1}{12}\frac{\partial^4\xi}{\partial x^4} + 2\alpha\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right) + O(\varepsilon)$$

и

$$2\frac{\partial^2\eta}{\partial\tau^2} = \frac{1}{288}\frac{\partial^6\eta}{\partial x^6} + \frac{\alpha}{24}\frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\right) + \alpha\frac{\partial\eta}{\partial x}\left(\frac{1}{12}\frac{\partial^4\eta}{\partial x^4} + 2\alpha\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right) + O(\varepsilon).$$

Эти уравнения позволяют записать краевые задачи (9), (11) и (10), (11) для функций

$$u = \frac{\partial\xi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial\eta}{\partial x} \tag{12}$$

в следующей форме:

$$2\frac{\partial u}{\partial\tau} = \frac{1}{12}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\varepsilon^2}{960}\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + 2\alpha\frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\varepsilon^2\alpha}{6}\frac{\partial}{\partial x}\left[u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] + \varepsilon^2\left[-\frac{\alpha}{48}\frac{\partial^3(u^2)}{\partial x^3} - \right.$$
$$\left. -\frac{\alpha}{24}u\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \alpha^2 u^2\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\beta u^3 + (3\beta - 2\alpha^2)M(v^2)u\right)\right], \tag{13}$$

$$2\frac{\partial v}{\partial\tau} = \frac{1}{12}\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\varepsilon^2}{960}\frac{\partial^5 v}{\partial x^5} + 2\alpha\frac{\partial v}{\partial x}v + \frac{\varepsilon^2\alpha}{6}\frac{\partial}{\partial x}\left[v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right] + \varepsilon^2\left[-\frac{\alpha}{48}\frac{\partial^3(v^2)}{\partial x^3} - \right.$$
$$\left. -\frac{\alpha}{24}v\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \alpha^2 v^2\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\beta v^3 + (3\beta - 2\alpha^2)M(u^2)v\right)\right]. \tag{14}$$

$$u(\tau, x + 2\pi, \varepsilon) \equiv u(\tau, x, \varepsilon), \ v(\tau, x + 2\pi, \varepsilon) \equiv v(\tau, x, \varepsilon), \tag{15}$$

Важно подчеркнуть, что можно вычислить явные значения выражений $M(u^2)$ и $M(v^2)$ с точностью до $O(\varepsilon)$ через начальные условия решений исходной краевой задачи (3) и (4). Пусть $y(0,x) = a(x)$, $\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0} = b(x)$, где $a(x)$ и $b(x)$ – некоторые (гладкие) 2π–периодические функции.

Тогда

$$M(u^2) = \frac{1}{4}M\left(\left(b(x) + \frac{da}{dx}\right)^2\right), \quad M(v^2) = \frac{1}{4}M\left(\left(b(x) - \frac{da}{dx}\right)^2\right).$$

Из (12) следует, что для функций u и v можно выписать условия

$$M(u) = M(v) = 0. \tag{16}$$

Отметим еще, что нулевым приближением краевых задач (13), (15), (16) и (14), (15), (16) является уравнение КДВ

$$\frac{\partial w}{\partial\tau} = \frac{1}{6}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \alpha w\frac{\partial w}{\partial x}, \quad w(\tau, x + 2\pi) \equiv w(\tau, x). \tag{17}$$

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Пусть $u(\tau, x)$ и $v(\tau, x)$ являются ограниченными при $\tau \to \infty$ вместе с производными по x до 5–го порядка включительно решениями краевой задачи (13)–(16). Тогда краевая задача (5),(6) имеет асимптотическое по невязке с точностью до $O(\varepsilon^5)$ решение $w(t, x, \varepsilon)$, для которого*

$$w(t, x, \varepsilon) = \varepsilon(\xi(\tau, x+t) + \eta(\tau, x-t)) + \varepsilon^2 w_2(t, x, \tau, \varepsilon) + \varepsilon^3 w_3(t, x, \tau, \varepsilon),$$

где $\tau = \varepsilon^2 t$ и выполнены соотношения (12).

3. Повторная нормализация

Модифицированное уравнение КДВ и уравнение КДВБ изучались многими авторами [24–28]. Исследовались вопросы интегрируемости, построения (при определенных значениях коэффициентов) точных решений [29–31]. Здесь будем использовать методику работ [15–19,32,33], в которых разработан метод исследования локальной динамики для бесконечномерных критических случаев.

Сначала приведем результаты из [15] нормализации главной части краевой задачи (13)–(16), т. е. краевой задачи (17). Для этого введем следующее обозначение. Пусть $w(x) = \sum\limits_{k=-\infty, k\neq 0}^{\infty} w_k \exp(ikx)$. Оператор J введем по правилу

$$J(w(x)) = \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{\infty} (ik)^{-1} w_k exp(ikx). \tag{18}$$

Из (12) следует, что

$$\xi(\tau, x) = J(u(\tau, x)), \eta(\tau, x) = J(v(\tau, x)). \tag{19}$$

Для функции $W(x)$ из (18) определим вектор-функцию $R(W)$ по правилу

$$R(W) = (\ldots, W_{-1}\exp(-ix), 0, W_1\exp(ix), W_2\exp(2ix), \ldots).$$

Ниже умножение векторов – покоординатное:

$$R^2(W) = (\ldots, W_{-1}^2\exp(-2ix), 0, W_1^2\exp(2ix), W_2^2\exp(4ix), \ldots),$$

$$\text{а} \quad (R^2(W), \bar{R}(v)) = \sum_{j=-\infty, j\neq 0}^{\infty} W_j^2 v_j \exp(ijx).$$

Рассмотрим краевую задачу

$$2\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{\varepsilon^2}{960}\frac{\partial^5 W}{\partial x^5} + A(W), \quad W(\tau, x+2\pi) = W(\tau, x), \quad M(W) = 0, \tag{20}$$

где

$$A(W) = \frac{2}{3}\left[M(J^2(W))\frac{\partial W}{\partial x} + \left(R^2(J(W)), \bar{R}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)\right)\right].$$

Основной результат состоит [15–17] в том, что краевая задача (20) играет роль укороченной нормальной формы для краевой задачи (13)–(16) или – повторной нормальной формы для краевой задачи (5), (6).

Представляет интерес произвести повторную нормализацию в краевой задаче (13)–(16) в случае, когда

$$\alpha = 0. \tag{21}$$

Учтем в (13) соотношение (16) и произведем замену $y = x + \frac{3}{8}\beta M((b(x) - \frac{da}{dx})^2)\tau$. В результате от (13), (15) приходим к краевой задаче

$$2\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{12}\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \varepsilon^2\frac{1}{960}\frac{\partial^5 u}{\partial y^5} + \varepsilon^2\beta\frac{\partial}{\partial y}u^3, \tag{22}$$

$$u(\tau, y + 2\pi) \equiv u(\tau, y), \quad M(u) = 0. \tag{23}$$

Получающееся при $\varepsilon = 0$ уравнение имеет совокупность решений

$$W(\tau, y) = \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{\infty} W_k \exp(-iky + i(24)^{-1}k^3\tau). \tag{24}$$

Базируясь на этом представлении решений, введем формальный ряд

$$W(\tau, y, \varepsilon) = \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{\infty} W_k(s)\exp(-iky + \frac{i}{24}k^3\tau) + \varepsilon^2 W_1(s, \tau, y) + \ldots, \tag{25}$$

где $s = \varepsilon^2\tau$, а функции $W_j(s, \tau, y)$ периодичны по τ и y. Подставим (25) в (22) и будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях ε. Тогда из условия разрешимости получающегося уравнения относительно $W_j(s, \tau, y)$ получаем бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения $W_k(s) \quad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$:

$$2\frac{\partial W_k}{\partial s} = \frac{1}{960}(-ik)^5 W_k + 3\beta(-ik)W_k\left(2\sum_{j=-\infty, j\neq 0}^{\infty}|W_j|^2 - |W_k|^2\right). \tag{26}$$

Положим $W(s, y) = \sum\limits_{j=-\infty, j\neq 0}^{\infty} W_k(s)\exp(-iky)$. Основной вывод состоит в том, что функция $W(s, y)$ с точностью до слагаемого порядка $O(\varepsilon)$ является решением краевой задачи

$$2\frac{\partial W}{\partial s} = \frac{1}{960}\frac{\partial^5 W}{\partial y^5} + 6\beta M(W^2)\frac{\partial W}{\partial y} - 3\beta\frac{\partial(R^2(W), \bar{R}(W))}{\partial y}, \tag{27}$$

$$W(s, y + 2\pi) \equiv W(s, y), \quad M(W) = 0. \tag{28}$$

Процесс нормализации можно продолжить. Поставим задачу локального исследования в окрестности нулевого состояния равновесия краевой задачи (27), (28). Линейная часть этой краевой задачи имеет совокупность периодических решений

$z_k \exp(iky + i(2\cdot 960)^{-1}k^5 s) \quad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$, поэтому и здесь реализуется критический, в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия, случай бесконечной размерности.

Положим

$$z(s,y) = \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{\infty} z_k(s)\exp(iky + i(2\cdot 960)^{-1}k^5 s) + z_1(s,y) + \ldots, \tag{29}$$

где $z_k(s)$ – медленно меняющиеся по s достаточно малые значения амплитуд, а $z_1(s,y), z_2(s,y)$ – квадратично, кубично и т. д. зависят от $z_j(s)$.

Подставим (29) в (27). Производя стандартные действия, приходим к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения $z_k(s)$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Основной результат состоит в том, что для функции

$$Z(s,x) = \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{\infty} z_k(s)\exp(iky) \tag{30}$$

эта бесконечная система уравнений с точностью до слагаемых порядка $O(|z|^5)$ может быть свернута в краевую задачу – аналог нормальной формы –

$$\frac{\partial Z}{\partial s} = 3\beta M(z^2)\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{3}{2}\beta\frac{\partial(R^2(Z), \bar{R}(Z))}{\partial y}, \tag{31}$$

$$Z(s, y+2\pi) \equiv Z(s,y), \quad M(Z) = 0. \tag{32}$$

Остается отметить, что эта краевая задача интегрируется в явном виде. Все решения её являются, вообще говоря, бесконечномерными торами.

Таким образом, краевая задача (27), (28) играет роль нормальной формы для краевой задачи (5),(6) при условии (21).

Выводы

Исследованы специальные уравнения с частными производными, описывающие асимптотическое поведение так называемых регулярных решений в непрерывной модели ФПУ. Использовались и развивались методы локального – в окрестности состояния равновесия – анализа динамики решений. В основе этих методов лежит известный формализм метода нормализации.

Изучен вопрос о взаимодействии волн, движущихся в различных направлениях. Показано, что, во-первых, это взаимодействие относительно слабое, т. к. описывается слагаемыми порядка ε^2. Во-вторых, взаимодействие приводит лишь к сдвигу фазовой скорости. Величина соответствующего сдвига явно определяется через некоторые интегральные характеристики от начальных условий.

Применены процедуры повторных нормализаций. В результате получены специальные эволюционные нелинейные уравнения, играющие роль нормальных форм для описания динамики исходного уравнения. Показано, в частности, что в главном приближении решениями являются бесконечномерные торы и найдена их асимптотика.

Список литературы / References

[1] Russel Scott J., “Report of waves”, *Report of the 14-th. Meeting of the British Association for the Advancement of Science*, London, 1844, 311–390.

[2] Fermi E., Pasta J. R., Ulam S., *Studies of Nonlinear Problems, Report LA-1940*, Alamos Scientific Laboratory, 1955.

[3] Porter M. A., Zabusky N. J., Hu B., Campbell D. K., “Fermi, Pasta, Ulam and the Birth of Experimental Mathematics”, *American Scientist*, **97**:3 (2009), 214–221.

[4] Dauxois T., Peyrard M., Ruffo S., “The Fermi–Pasta–Ulam “numerical experiment”: history and pedagogical perspectives”, arXiv: nlin/0501053v2, 22 Mar 2005.

[5] Genta T., Giorgilli A., Paleari S., Penati T., “Packets of resonant modes in the Fermi-Pasta-Ulam system”, *Physics Letters A*, **376** (2012), 2038–2044.

[6] Кудряшов Н. А., “Модель Ферми–Паста–Улама и нелинейные эволюционные уравнения”, *Вестник национального исследовательского ядерного университета МИФИ*, **5**:1 (2016), 3–22; [Kudryashov N. A., “Fermi–Pasta–Ulam Model and Higher-Order Nonlinear Evolution Equations”, *Vestnik natsionalnogo issledovatelskogo yadernogo universiteta ”MIFI”*, **5**:1 (2016), 3–22, (in Russian).]

[7] Кудряшов Н. А., *Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений*, Институт компьютерных исследований, Москва-Ижевск, 2004, 360 с.; [Kudryashov N. A., *Analytical theory of nonlinear differential equations*, Institute of Computer Science, Moscow-Izhevsk, 2004, 360 pp., (in Russian).]

[8] Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M., *Phys. Rev. Lett.*, **19** (1967), 1095–1097.

[9] Ablowitz M. J., Clarkson P. A., *Solitons Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*, Cambridge university press, 1991.

[10] Kudryashov N. A., “Refinement of the Korteweg – de Vries equation from the Fermi–Pasta–Ulam model”, *Phys. Lett. A*, **279** (2015), 2610–2614.

[11] Kudryashov N. A., “From the Fermi–Pasta–Ulam model”, Reports on mathematical Physics, 2015, in Press.

[12] Polyanin A. D., Zaitsev V. F., *Handbook of nonlinear partial differential equations*, Second Edition, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2011, 520 pp.

[13] Волков А. К., Кудряшов Н. А., “Нелинейные волны, описываемые уравнением пятого порядка, полученным из системы Ферми–Паста–Улама”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **56**:4 (2016), 685–693; [Volkov A. K., Kudryashov N. A., “Nonlinear waves described by a fifth-order equation derived from the Fermi–Pasta–Ulam system”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **56**:4 (2016), 680–687].

[14] Kudryashov N. A., Ryabov P. N., Sinelshchikov D. I., “Nonlinear waves in media with fifth order dispersion”, *Phys. Lett. A*, **375** (2011), 2051–2055.

[15] Кащенко С. А., “Нормальная форма для уравнения Кортеверга – де Вриза – Бюргерса”, *ДАН*, **468**:4 (2016), 383; [Kashchenko S. A., “Normal form for the KdV–Burgers Equation”, *Doklady Mathematics.*, **93**:3 (2016), 331].

[16] Кащенко С.А., “О квазинормальных формах для параболических уравнений с малой диффузией”, *ДАН СССР*, **299**:5 (1988), 1049–1053; [Kashchenko S. A., “On the quasinormal forms for parabolic equations with small diffusion”, *Reports Academy of Sciences of the USSR*, **299** (1988), 1049–1053].

[17] Kaschenko S.A., “Normalization in the systems with small diffusion”, *Int. J. of Bifurcations and chaos*, **6**:7 (1996), 1093–1109.

[18] Кащенко И.С., Кащенко С.А., “Квазинормальные формы двухкомпонентных сингулярно возмущенных систем”, *ДАН*, **447**:4 (2012), 376–381; [Kashchenko I. S. and Kashchenko S. A., “Quasi-Normal Forms of Two-Component Singularly Perturbed Systems”, *Doklady Mathematics.*, **86**:3 (2012), 865].

[19] Кащенко И.С., “Мультистабильность в нелинейных параболических системах с малой диффузией”, *ДАН*, **435**:2 (2010), 164–167; [Kashchenko I. S., “Multistability in Nonlinear Parabolic Systems with Low Diffusion”, *Doklady Mathematics.*, **82**:3 (2010), 878].

[20] Ablowitz M. J. and Segur H., *Solitons and the Inverse Scattering Transform*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa., 1981, 425 pp.

[21] Dodd R. K., Eilbeck J. C., Gibbon J. D., Morris H. C., *Solitons and Nonlinear Wave Equations.*, Academic Press, London et al., 1982, 630 pp.

[22] Newell A. C., *Solitons in Mathematics and Physics*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa., 1985, 260 pp.

[23] Zabusky N. J., Kruskal M. D., “Interaction of “solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states”, *Phys Rev. Lett.*, **15** (1965), 240–243.

[24] Кудряшов Н. А., *Методы нелинейной математической физики*, Издательский дом “Интеллект”, Долгопрудный, 2010, 360 с.; [Kudryashov N. A., *Methods of nonlinear mathematical physics*, Dolgoprudnyy, Izdatel’skiy dom “Intellekt”, 2010, 360 pp., (in Russian).]

[25] Korteweg D. J., de Vries G., “On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new tipe of long stationary waves”, *Phil. Mag.*, **39** (1895), 422–443.

[26] Burgers J.M., “A mathematical model illustrating the theory of turbulence”, *Adv. Appl. Mech.*, **1** (1948), 171–199.

[27] Рабинович М.И., Трубецков Д.И., *Введение в теорию колебаний и волн*, РХД, Ижевск, 2000, 560 с.; [Rabinovich R. S., Trubetskov D. I., *Introduction in the Theory of Oscillations and Waves*, RCD, Izhevsk, 2000, 560 pp., (in Russian).]

[28] Kudryashov N. A., “On ”new travelling wave solutions” of the KdV and the KdV-Burgers equations”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **14(5)** (2009), 1891–1900.

[29] Kudryashov N. A., “Exact soliton solutions of the generalized evolution equation of wave dynamics”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **52**:3 (1988), 361–365.

[30] Kudryashov N. A., “One method for finding exact solutions of nonlinear differential equations”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical*, **17** (2012), 2248–2253.

[31] Kudryashov N. A., “Painleve analysis and exact solutions of the Korteweg – de Vries equation with a source”, *Appl. Math. Lett.*, **41** (2015), 41–45.

[32] Глызин С. Д., Колесов А.Ю, Розов Н. Х., “Автоволновые процессы в континуальных цепочках однонаправленно связанных генераторов”, *Избранные вопросы математической физики и анализа*, Тр. МИАН, **285**, МАИК, М., 2014, 89–106; [Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Autowave processes in continual chains of unidirectionally coupled oscillators”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **285** (2014), 81–98].

[33] Глызин С. Д., Колесов А.Ю, Розов Н. Х., “Явление буферности в континуальных цепочках однонаправленно связанных генераторов”, *ТМФ*, **181**:2 (2014), 254–275; [Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Buffering effect in continuous chains of unidirectionally coupled generators”, *Theoret. and Math. Phys.*, **181**:2 (2014), 1349–1366].

Glyzin S. D., Kashchenko S. A., Tolbey A.O., "Two Wave Interactions in a Fermi–Pasta–Ulam Model", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:5 (2016), 548–558.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-5-548-558

Abstract. The work is devoted to the dynamic properties of the solutions of boundary value problems associated with the classical system of Fermi – Pasta – Ulam (FPU). We study this problem in infinite-dimensional case, when a countable number of roots of characteristic equations tend to an imaginary axis. Under these conditions, we built a special non-linear partial differential equation, which plays the role of a quasinormal form, i.e, it defines the dynamics of the original boundary value problem with the initial conditions in a sufficiently small neighborhood of the equilibrium state. The modified Korteweg - de Vries (KdV) equation and the Korteweg - de Vries - Burgers (KdVB) one are quasinormal forms depending on the parameter values. Under some additional assumptions, we apply the procedure of renormalization to the obtained boundary value problems. This procedure leads to an infinite-dimensional system of ordinary differential equations. We describe a method of folding this system in the special boundary value problem, which is an analogue of the normal form. The main result is that the analytical methods of nonlinear dynamics explored the interaction of waves moving in different directions, in the problem of the FPU. It was shown that waves influence on each other is asymptotically small and does not change the shape of waves, contributing only a shift in their speed, which does not change over time.

Keywords: Fermi–Pasta–Ulam model, generalized KdV equation, quasinormal form, boundary value problem

On the authors:
Sergei D. Glyzin, orcid.org/0000-0002-6403-4061, Doctor, Professor,
P.G. Demidov Yaroslavl State University, 14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia,
Scientific Center in Chernogolovka RAS, 9 Lesnaya str., Chernogolovka, Moscow region, 142432, Russia
e-mail: glyzin@uniyar.ac.ru

Sergey A. Kashchenko, Doctor, Professor,
P.G. Demidov Yaroslavl State University, 14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia,
National Research Nuclear University MEPhI, 31 Kashirskoye shosse, Moscow 115409, Russia
e-mail: kasch@uniyar.ac.ru

Anna O. Tolbey, orcid.org/0000-0001-5668-3929, PhD, Associate Professor
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: bekva@yandex.ru

Acknowledgments:
[1]This work was supported by the Russian Science Foundation (project nos. №14-21-00158).