

©Мельникова А.А., Аргун Р.Л., 2016

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-5-559-567

УДК 517.9

Асимптотика стационарного решения с внутренним переходным слоем для системы типа ФитцХью–Нагумо

Мельникова А.А., Аргун Р.Л.

получена 15 июня 2016

Аннотация. Важной частью развития современной биофизики является создание адекватных математических моделей процессов в живой природе. Процессы свертывания крови, распространения нервного импульса, сокращения сердечной мышцы, формирования структур в живой природе относятся к типу автоволновых. Для описания автоволновых процессов в активных средах часто применяется система уравнений ФитцХью–Нагумо. При решении соответствующей математической задачи стандартно используются численные методы. Но автоволновые решения с резкими градиентами требуют применения ресурсоемких алгоритмов. Задачи такого типа целесообразно исследовать аналитическими методами. В данной работе для получения приближенного решения сингулярно возмущенной системы типа ФитцХью–Нагумо применяется асимптотический метод теории контрастных структур. Метод позволяет редуцировать нелинейную систему уравнений к ряду задач, которые решаются аналитически или устойчивыми численными алгоритмами. В работе получено асимптотическое приближение стационарного автоволнового решения нелинейной системы и определена формула, задающая локализацию внутренних переходных слоев. Для оценки результатов проведено сравнение с численным решением. Описанное в работе применение теории контрастных структур к исследованию моделей активных сред может быть использовано для аналитического исследования других подобных систем, совершенствования имеющихся моделей и повышения эффективности численных расчетов.

Ключевые слова: асимптотика, малый параметр, сингулярные возмущения, внутренний переходный слой, система активатор–ингибитор

Для цитирования: Мельникова А.А., Аргун Р.Л., "Асимптотика стационарного решения с внутренним переходным слоем для системы типа ФитцХью–Нагумо", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23:5** (2016), 559–567.

Об авторах:

Мельникова Алина Александровна, orcid.org/0000-0001-9019-0263, канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Физический факультет, 119991, Россия, ГСП–1, г. Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2, e-mail: melnikova@physics.msu.ru

Аргун Рауль Ларинович, orcid.org/0000-0003-3749-1811, студент, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Физический факультет, 119991, Россия, ГСП–1, г. Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2, e-mail: raul96@mail.ru

Благодарности:

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 16-01-00437, 15-01-04619).

Введение

В работе рассматривается сингулярно возмущенная система типа ФитцХью–Нагумо [3]. Система используется в биофизике для моделирования автоволновых процессов, таких как распространение нервного импульса [3], сокращение сердечной мышцы [8], свертывание крови [7], формирование окраски шкур животных [4], формирование урбоэкосистем [2]. В случае формирования структур [2, 4] интерес представляют стационарные решения системы параболических уравнений.

В данной работе аналитическими методами исследованы стационарные решения системы типа ФитцХью–Нагумо с внутренними переходными слоями — так называемые контрастные структуры. Решения типа контрастных структур претерпевают резкое изменение в малой окрестности внутренней точки области определения — так называемой точки перехода. В терминологии численных методов задачи с такими решениями относятся к классу жестких и требуют применения специальных алгоритмов. Аналитическое исследование дает возможность получить априорную информацию о локализации точки перехода. Информация о положении переходного слоя позволяет строить квазиравномерные сетки и применять более эффективные численные алгоритмы. Примеры применения теории контрастных структур для построения асимптотических приближений решений и доказательства теорем существования в различных типах сингулярно возмущенных задач можно найти в работах [1, 5, 6].

В работе для системы уравнений, применяемой для моделирования урбоэкосистемы [2], определены условия существования решений типа контрастных структур, определены точки локализации внутренних слоев и получено асимптотическое приближение решения. Для оценки результата получено численное решение системы на равномерной сетке.

1. Постановка задачи

Рассматривается начально–краевая задача

$$\begin{cases} \varepsilon^4 D_u u_{xx} - \varepsilon^4 u_t = u(u - \alpha(x))(u - 1) + uv, \\ \varepsilon^2 D_v v_{xx} - \varepsilon^2 v_t = \gamma v - u, & x \in (0, L), \quad t \in (0; T] \\ u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0, \quad v_x(0, t) = v_x(L, t) = 0, & t \in [0; T], \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad v(x, 0) = v^0(x), & x \in [0; L], \end{cases} \quad (1)$$

где $u \in I_u \in \mathbb{R}^+$, $v \in I_v \in \mathbb{R}^+$ — неизвестные функции, $\varepsilon \in (0; 1)$ — малый параметр, $\gamma > 0$ — параметр системы, функция $\alpha(x) \in (0; 1)$ при $x \in [0; L]$. Система (1) применяется для моделирования экосистемы города [2]. В данной работе рассматриваются стационарные решения системы (1) с внутренними переходными слоями.

Краевая задача, соответствующая системе (1)

$$\begin{cases} \varepsilon^4 D_u u_{xx} = u(u - \alpha(x))(u - 1) + uv, \\ \varepsilon^2 D_v v_{xx} = \gamma v - u, & x \in (0, L), \\ u_x(0) = u_x(L) = 0, \quad v_x(0) = v_x(L) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

В работе [1] доказана теорема существования решения с внутренним переходным слоем для задачи типа (2). Одним из условий существования решения типа

контрастной структуры является наличие у системы (2) при $\varepsilon = 0$ двух устойчивых решений для каждой из компонент. Контрастная структура образуется как переход от одного устойчивого корня вырожденной системы к другому. Запишем вырожденную систему задачи (2)

$$f(u, v, x) := u(u - \alpha(x))(u - 1) + uv = 0, \quad g(u, v, x) := \gamma v - u = 0. \quad (3)$$

Предполагается, что параметр γ и значения функции $\alpha(x)$ таковы, что первое уравнение (3) имеет три решения:

$$\varphi_1(v, x) = 0, \quad \varphi_{2,3}(v, x) = 0.5(\alpha(x) + 1 \mp \sqrt{(\alpha(x) - 1)^2 - 4v}).$$

Подставим устойчивые корни $\varphi_{1,3}(v, x)$ (для них выполнено условие $f_u(\varphi_{1,3}(v, x), v, x) > 0$) во второе уравнение (3) и разрешим полученные уравнения относительно переменной v :

$$v_1(x) = 0, \quad v_3(x) = 0.5\gamma^{-1} \left(\alpha(x) + 1 - \gamma^{-1} + \sqrt{(\alpha(x) + 1 - \gamma^{-1})^2 - 4\alpha(x)} \right).$$

Функция $v_3(x)$ определена, если выполнены неравенства

$$v_3(x) \geq 0.5\gamma^{-1}(\alpha(x) + 1), \quad (\alpha(x) + 1 - \gamma^{-1})^2 - 4\alpha(x) > 0.$$

Первое неравенство следует из уравнения $g(\varphi_3(v, x), v, x) = 0$, а второе – из требования неотрицательности выражения под радикалом у функции $v_3(x)$. Разрешим неравенства относительно функции $\alpha(x)$:

$$\alpha(x) \leq 1 + \gamma^{-1} - \gamma^{-1}\sqrt{\gamma^{-1} + 4}, \quad \alpha(x) \leq 1 + \gamma^{-1} - 2\sqrt{\gamma^{-1}}. \quad (4)$$

На графике Рис. 1 римской цифрой *I* обозначена область параметров, в которой определены функции $v_1(x)$, $v_3(x)$, $\varphi_1(v, x)$ и $\varphi_3(v, x)$, $x \in [0; L]$, $v \in I_v$.

Система уравнений (2) рассматривается при параметрах из области *I*.

1.1. Метод решения

Асимптотическое приближение решения задачи (2) строится по методу Васильевой [1, 9] отдельно слева и справа от предполагаемой точки перехода $x_0 \in (0; L)$:

$$u = \begin{cases} \bar{u}_0^{(-)}(x) + Q_0^{(-)}u(\xi) + M_0^{(-)}u(\sigma), & x \in [0; x_0], \\ \bar{u}_0^{(+)}(x) + Q_0^{(+)}u(\xi) + M_0^{(+)}u(\sigma), & x \in [x_0; L]; \end{cases} \quad (5)$$

$$v = \begin{cases} \bar{v}_0^{(-)}(x) + Q_0^{(-)}v(\xi) + M_0^{(-)}v(\sigma), & x \in [0; x_0], \\ \bar{v}_0^{(+)}(x) + Q_0^{(+)}v(\xi) + M_0^{(+)}v(\sigma), & x \in [x_0; L]. \end{cases} \quad (6)$$

Здесь $\bar{u}_0^{(\mp)}(x)$, $\bar{v}_0^{(\mp)}(x)$ – регулярные члены асимптотики; $Q_0^{(\mp)}u(\xi)$, $Q_0^{(\mp)}v(\xi)$, $M_0^{(\mp)}u(\sigma)$, $M_0^{(\mp)}v(\sigma)$ – функции, описывающие решение в переходном слое, а $\xi = (x - x_0)/\varepsilon$, $\sigma = (x - x_0)/\varepsilon^2$ – растянутые переменные в окрестности x_0 . Функции переходного

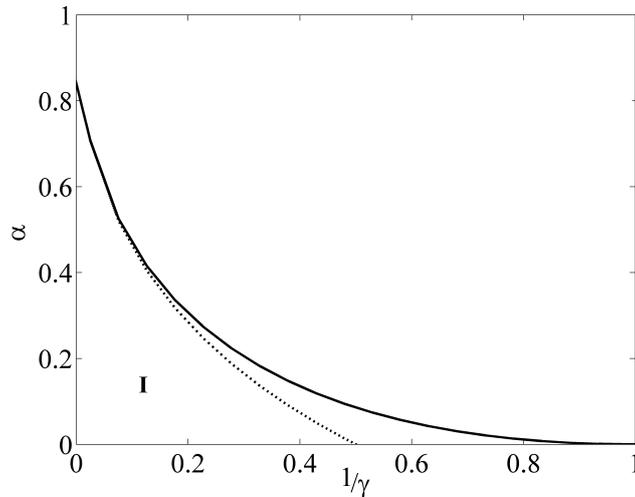


Рис. 1. Графическое решение неравенств (4). Сплошной линией отмечен график, соответствующий первому неравенству, пунктирной – второму
 Fig. 1. Graphical solution of inequalities (4). The solid line shows a graph corresponding to the first inequality and the dotted line shows a graph corresponding to the second inequality

слоя удовлетворяют условию убывания к нулю при $\xi \rightarrow \mp\infty$, $\sigma \rightarrow \mp\infty$. Если решение имеет несколько переходных слоев, то для каждого из них вводятся отдельные функции переходного слоя.

Функции $u(x)$ и $v(x)$ сшиваются в точке x_0 непрерывно и гладко. Предположим, что в точке x_0 компоненты решения принимают значения:

$$v(x_0) = v_0, \quad u(x_0) = \varphi_2(v_0, x_0), \quad (7)$$

где величина $v_0 \in (v_1(x_0); v_3(x_0))$ будет определена ниже.

Искомые функции $u(x)$, $v(x)$ описывают решение задачи (2) с точностью $O(\varepsilon)$. При малых ε такая точность приемлема для использования в приложениях.

Согласно методу Васильевой [1, 9] уравнения для регулярной части и функций переходного слоя получают подстановкой сумм (5), (6) в систему (2) и разделением ее специальным образом на части, зависящие от переменных x , ξ и σ . Уравнения для функций нулевого порядка асимптотики получают выделением в системах коэффициентов при ε^0 .

1.1.1. Регулярная часть асимптотики и функции пограничного слоя

Предполагается, что контрастная структура – слева от x_0 близка к решениям $v_1(x)$, $\varphi_1(v_1(x), x)$, а справа – к решениям $v_3(x)$, $\varphi_3(v_3(x), x)$ вырожденной системы. Система уравнений для функций $\bar{u}_0^{(\mp)}$, $\bar{v}_0^{(\mp)}$ регулярной части совпадает с вырожденной системой (3), поэтому

$$\bar{v}_0^{(-)}(x) = v_1(x) = 0, \quad \bar{v}_0^{(+)}(x) = v_3(x), \quad (8)$$

$$\bar{u}_0^{(-)}(x) = \varphi_1(v_1(x), x) = 0, \quad \bar{u}_0^{(+)}(x) = \varphi_3(v_3(x), x). \quad (9)$$

В общем случае асимптотическое представление решения включает функции пограничных слоев, которые в данном случае будут нулевым, поскольку регулярная часть удовлетворяет краевым условиям точно.

1.1.2. Функции переходного слоя

Функции $M_0^{(\mp)}v$ определяются из задач:

$$\frac{\partial^2 M_0^{(\mp)}v}{\partial \sigma^2} = 0, \quad M_0^{(\mp)}v(\mp\infty) = 0. \quad (10)$$

Их решения $M_0^{(\mp)}v(\sigma) = 0$.

Введем обозначения:

$$\tilde{v}_1(\xi) := v_1(x_0) + Q_0^{(-)}v(\xi), \quad \tilde{v}_3(\xi) := v_3(x_0) + Q_0^{(+)}v(\xi). \quad (11)$$

Используя результаты работы [1], можно записать задачи для функций $\tilde{v}_{1,3}$:

$$\begin{aligned} D_v \frac{d^2 \tilde{v}_1}{d\xi^2} &= \gamma \tilde{v}_1, \quad \xi \leq 0, & D_v \frac{d^2 \tilde{v}_3}{d\xi^2} &= \gamma \tilde{v}_3 - \varphi_3(\tilde{v}_3, x_0), \quad \xi \geq 0, \\ \tilde{v}_1(0) &= v_0, & \tilde{v}_3(0) &= v_0, \\ \tilde{v}_1(\xi) &\rightarrow v_1(x_0) \text{ при } \xi \rightarrow -\infty, & \tilde{v}_3(\xi) &\rightarrow v_3(x_0) \text{ при } \xi \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (12)$$

Условия при $\xi = 0$ следуют из условия непрерывности (7), а при $\xi \rightarrow \mp\infty$ из условия убывания функций переходного слоя на бесконечности.

Решение первого уравнения (12) записывается в явном виде:

$$\tilde{v}_1(\xi) = v_0 \exp\left(\sqrt{\gamma D_v^{-1}} \xi\right).$$

В отношении второго уравнения (12) можно применить стандартный метод понижения порядка дифференциального уравнения

$$\frac{d\tilde{v}_3}{d\xi} = \left(\int_{v_3(x_0)}^{\tilde{v}_3} \left(\gamma v - 0.5 \left(\alpha(x) - 1 + \sqrt{(\alpha(x) - 1)^2 - 4v} \right) \right) dv \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (13)$$

Условие непрерывности первой производной функции $v(x)$ при $x = x_0$ в нулевом порядке по малому параметру можно записать как

$$\frac{d\tilde{v}_1}{d\xi}(0) = \frac{d\tilde{v}_3}{d\xi}(0). \quad (14)$$

Подставим в условие (14) выражение для $\tilde{v}_1(\xi)$ и первой производной $\tilde{v}_3(\xi)$ (13) и получим равенство, связывающее величины v_0 и x_0 :

$$\begin{aligned} 6\gamma(v_3(x_0))^2 - 6(\alpha(x_0) + 1)(v_3(x_0) - v_0) + \left((\alpha(x_0) - 1)^2 - 4v_3(x_0) \right)^{3/2} - \\ - \left((\alpha(x_0) - 1)^2 - 4v_0 \right)^{3/2} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Функции $Q_0^{(\mp)}u$ определяются из уравнений

$$f(\bar{u}_0^{(\mp)}(x_0) + Q_0^{(\mp)}u, \bar{v}_0^{(\mp)}(x_0) + Q_0^{(\mp)}v, x_0) = 0.$$

Используя равенства (11) и обозначения (11) можно записать решения:

$$Q_0^{(-)}u(\xi) = 0, \quad \xi \leq 0, \quad Q_0^{(+)}u(\xi) = \varphi_3(\tilde{v}_3(\xi), x_0) - \varphi_3(v_3(x_0), x_0), \quad \xi \geq 0. \quad (16)$$

Введем обозначения:

$$\tilde{u}(\sigma) = \begin{cases} \varphi_1(v_0, x_0) + M_0^{(-)}u(\sigma), & \sigma \leq 0, \\ \varphi_3(v_0, x_0) + M_0^{(+)}u(\sigma), & \sigma \geq 0. \end{cases} \quad (17)$$

Используя результаты работы [1], можно записать задачу для функции \tilde{u} :

$$D_u \frac{d^2 \tilde{u}}{d\sigma^2} = \tilde{u}(\tilde{u} - \alpha(x_0))(\tilde{u} - 1) + \tilde{u}v_0, \quad (18)$$

$$\tilde{u}(0) = \varphi_2(v_0, x_0), \quad \tilde{u}(-\infty) = \varphi_1(v_0, x_0), \quad \tilde{u}(+\infty) = \varphi_3(v_0, x_0).$$

Условия при $\sigma = 0$ следуют из условия непрерывности (7), а при $\sigma \rightarrow \mp\infty$ – из условия убывания функций переходного слоя на бесконечности.

Применим стандартный метод понижения порядка дифференциального уравнения для задачи (18) и получим уравнения первого порядка с дополнительным условием $\tilde{u}(0) = \varphi_2(v_0, x_0)$:

$$\frac{d\tilde{u}}{d\sigma}(\sigma) = \left(\int_{\varphi_1(v_0, x_0)}^{\tilde{u}(\sigma)} (u(u - \alpha(x_0))(u - 1) + uv_0) du \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \sigma \leq 0, \quad (19)$$

$$\frac{d\tilde{u}}{d\sigma}(\sigma) = \left(\int_{\varphi_3(v_0, x_0)}^{\tilde{u}(\sigma)} (u(u - \alpha(x_0))(u - 1) + uv_0) du \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \sigma \geq 0.$$

Условие непрерывности первой производной функции $u(x)$ при $x = x_0$ в нулевом порядке по малому параметру можно записать как

$$\frac{d\tilde{u}}{d\sigma}(-0) = \frac{d\tilde{u}}{d\sigma}(+0). \quad (20)$$

Подставим выражения (19) в условие (20) и получим второе равенство, связывающее v_0 и x_0 :

$$36v_0 = 9(\alpha(x_0) - 1)^2 - (\alpha(x_0) + 1)^2. \quad (21)$$

Из системы уравнений (15), (21) при заданном значении γ можно определить v_0 и $\alpha(x_0)$, а по известному виду функции $\alpha(x)$ найти точку перехода x_0 .

Выпишем нулевой порядок асимптотического приближения решения задачи (2) с учетом $v_1(x) = 0$, $\varphi_1(v, x) = 0$:

$$v(x) = \begin{cases} v_0 \exp\left(\sqrt{\gamma D_v^{-1}}(x - x_0)/\varepsilon\right) + O(\varepsilon), & x \leq x_0, \\ \tilde{v}_3((x - x_0)/\varepsilon) + O(\varepsilon), & x \geq x_0. \end{cases} \quad (22)$$

$$u(x) = \begin{cases} \tilde{u}((x - x_0)/\varepsilon^2) + O(\varepsilon), & x \leq x_0, \\ \tilde{u}((x - x_0)/\varepsilon^2) - \varphi_3(v_0, x_0) + \varphi_3(\tilde{v}_3((x - x_0)/\varepsilon), x_0) + O(\varepsilon), & x \geq x_0. \end{cases} \quad (23)$$

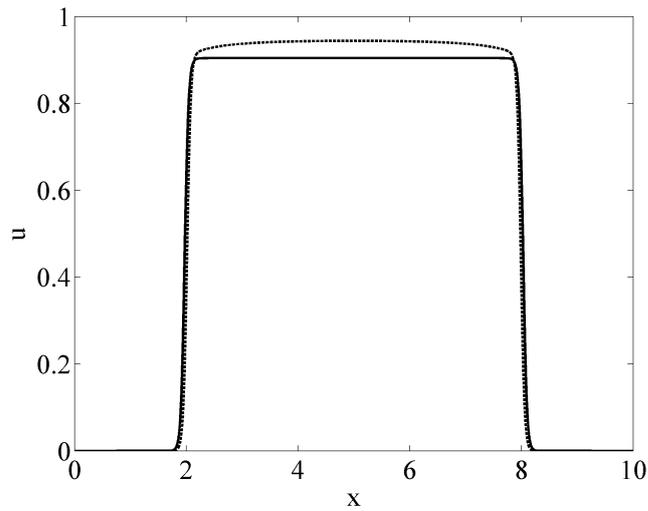


Рис. 2. График u -компоненты. Сплошная линия – график асимптотики нулевого порядка, штриховая линия – график численного решения
Fig. 2. u -component of the solution. The solid line shows a graph of zero order asymptotic approximation of the solution and the dotted line shows a graph of numerical solution

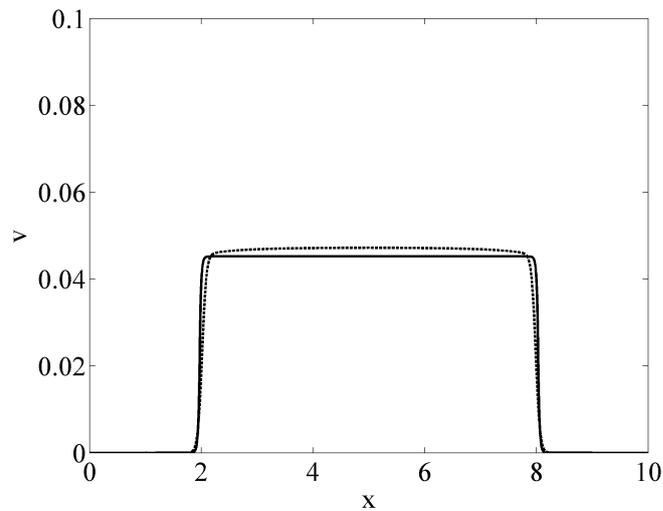


Рис. 3. График v -компоненты. Сплошная линия – график асимптотики нулевого порядка, штриховая линия – график численного решения
Fig. 3. v -component of the solution. The solid line shows a graph of zero order asymptotic approximation of the solution and the dotted line shows a graph of numerical solution

На Рис. 2 и Рис. 3 приведены графики функций $u(x)$ и $v(x)$ асимптотического приближения решения и графики численного решения для примера. Численный счет системы проводился по схеме Крэнка–Николсона методом счета на установление для параболической задачи (1) на равномерной сетке. Задачи для функций \tilde{v}_3 , \tilde{u} решались по схеме Розенброка с комплексным коэффициентом (CROS1) [10]. Параметры примера: $\varepsilon = 0.1$, $\gamma = 20$, $L = 10$, $D_v = 1$, $D_u = 5$, $\alpha = \alpha_0 \exp((x - x_{00})d^{-2})$,

$x_{00} = 5$, $d = 2.5$, $\alpha_0 = 0.1$. Параметры схемы Крэнка–Николсона: число узлов сетки по координате $N_x = 10^4$, шаг сетки $h_x = 10^{-3}$, число узлов сетки по времени $N_t = 1.5 \cdot 10^3$, шаг сетки $h_t = 4 \cdot 10^{-4}$. Решение системы уравнений (15), (21) дает следующие значения координат точек перехода для примера: $x_0 = 1.97$ для левого слоя и $x_0 = 8.02$ для правого слоя.

Оценим разницу численного решения и асимптотики нулевого порядка в области вне переходных слоев: для v -компоненты $\max |v_{as}(x) - v_{num}(x)| = 0,004 = O(\varepsilon)$, для u -компоненты $\max |u_{as}(x) - u_{num}(x)| = 0,04 = O(\varepsilon)$.

Список литературы / References

- [1] Бутузов В. Ф., Левашова Н. Т., Мельникова А. А., “Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе уравнений с различными степенями малого параметра”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **52**:11 (2012), 1983–2003; [Butuzov V. F., Levashova N. T., Mel’nikova A. A., “Steplike contrast structure in a singularly perturbed system of equations with different powers of small parameter”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **52**:11 (2012), 1526–1546]
- [2] Сидорова А. Э., Левашова Н. Т., Мельникова А. А., Яковенко Л. В., “Популяционная модель урбоэкосистем в представлениях активных сред”, *Биофизика*, **60**:3 (2015), 574–582; [Sidorova A. E., Levashova N. T., Mel’nikova A. A., Yakovenko L. V., “A model of a human dominated urban ecosystem as an active medium”, *Biophysics*, **60**:3 (2015), 466–473]
- [3] FitzHugh R., “Impulses and physiological states in theoretical model of nerve membrane”, *Biophys. J.*, **1**:1 (1961), 445–466.
- [4] Murray J., *Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications*, Springer-Verlag, New York, 2003.
- [5] Левашова Н. Т., Нефёдов Н. Н., Ягремцев А. В., “Контрастные структуры в уравнениях реакция–диффузия–адвекция в случае сбалансированной адвекции”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **53**:3 (2013), 365–376; [*Comput. Math. Math. Phys.*, **53**:3 (2013), 273–283]
- [6] Nefedov N. N., Recke L., Schneider K. R., “Existence and asymptotic stability of periodic solutions with an interior layer of reaction-advection-diffusion equations”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **405**:1 (2013), 90–103.
- [7] Zarnitsina V. I., Ataulakhanov F. I., Lobanov A. I., Morozova O. L., “Dynamics of spatially nonuniform patterning in the model of blood coagulation”, *Chaos*, **11**:1 (2001), 57–70.
- [8] Aliev R. R., Panfilov A. V., “A simple two-variable model of cardiac excitation”, *Chaos, Solitons and Fractals*, **7**:3 (1996), 293–301.
- [9] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., *Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений*, Высш. школа, Москва, 1990; [Vasil’eva A. B., Butuzov V. F., *Asimptoticheskie metody v teorii singulyarnikh vozmuchenii*, Vysh. shkola, Moscow, 1990, (in Russian)]
- [10] Al’shin A. B., Al’shina E. A., Kalitkin N. N., Koryagina A. B., “Rosenbrock schemes with complex coefficients for stiff and differential algebraic systems”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **46**:8 (2006), 1320–1340.

Melnikova A. A., Argun R.L., "Asymptotic Approximation of the Stationary Solution with Internal Layer for FitzHugh–Nagumo System", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:5 (2016), 559–567.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-5-559-567

Abstract. Creating adequate mathematical models of processes in living nature is an important task of modern biophysics. Blood clotting, nerve impulse propagation, reduction of the heart muscle, the pattern-formation in nature are auto-wave processes. FitzHugh–Nagumo system of equations is used to describe the auto-wave processes in active media. Such math problems are usually solved by numerical methods. The use of resource-intensive algorithms is required in the case of auto-wave solutions with sharp gradients. Therefore, it is appropriate to use the analytical methods for this type of problems. In this paper, the asymptotic method of contrast structures theory is used to obtain an approximate solution of a singularly perturbed system of FitzHugh–Nagumo type. The method allows to reduce the non-linear system of equations to a number of problems that can be solved analytically or with a stable numerical algorithm. This study presents the asymptotic approximation of a stationary auto-wave solution of the considered system. Additionally, this paper provides a formula that specifies the location of internal transition layers. The results were compared with the numerical solution. The application of contrast structures theory to the study of active media models can be used for analytical studies of other such systems, improving existing models and increasing the efficiency of the numerical calculations.

Keywords: asymptotic approximation, small parameter, singular perturbation, inner transition layer, activator-inhibitor system

On the authors:

Alina A. Melnikova, [orcid.org//0000-0001-9019-0263](https://orcid.org/0000-0001-9019-0263), PhD,
Lomonosov Moscow State University, GSP-1, Leninskie Gory, Moscow 119991, Russian Federation
e-mail: melnikova@physics.msu.ru

Raul L. Argun, orcid.org/0000-0003-3749-1811, undergraduate student,
Lomonosov Moscow State University, GSP-1, Leninskie Gory, Moscow 119991, Russian Federation
e-mail: raul96@mail.ru

Acknowledgments:

This study was supported by grants of the Russian Foundation for Basic Research projects No. 16-01-00437, 15-01-04619.