

©Шишкина Л. П., 2016

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-5-568-576

УДК 519.63

Численное исследование начально-краевой задачи Неймана для сингулярно возмущенного параболического уравнения

Шишкина Л. П.

получена 15 июня 2016

Аннотация. Для одномерного сингулярно возмущенного параболического уравнения с возмущающим параметром ε при старшей производной, $\varepsilon \in (0, 1]$, рассматривается начально-краевая задача на отрезке с условием Неймана на границе. В этой задаче, когда параметр ε стремится к нулю, в окрестностях боковой границы появляются пограничные слои.

В работе исследуется сходимость решения и его регулярной и сингулярной компонент. Показано, что стандартные разностные схемы на равномерных сетках, используемые для численного решения этой задачи, не сходятся ε -равномерно. Ошибка сеточного решения неограниченно растет, когда параметр $\varepsilon \rightarrow 0$. Использование специальной разностной схемы на сетке Шишкина — кусочно-равномерной по x сетке, сгущающейся в окрестностях пограничных слоев, и равномерной по t , построенных с использованием монотонных сеточных аппроксимаций дифференциальной задачи — позволяет найти численное решение этой задачи, сходящееся в равномерной норме ε -равномерно. Результаты численных экспериментов подтверждают теоретические результаты.

Ключевые слова: начально-краевая задача Неймана, сингулярно возмущенное параболическое уравнение, кусочно-равномерная сетка, равномерная норма, ε -равномерная сходимость

Для цитирования: Шишкина Л. П., "Численное исследование начально-краевой задачи Неймана для сингулярно возмущенного параболического уравнения", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:5 (2016), 568–576.

Об авторах:

Шишкина Лидия Павловна, orcid.org/0000-0002-8489-5432, математик 1-й категории, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, ул. С. Ковалевской, 16, г. Екатеринбург, 620990 Россия, e-mail: lida@convex.ru

Благодарности:

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00727).

Введение

Хорошо известно о вычислительных проблемах, которые возникают при численном решении сингулярно возмущенных задач. Стремление возмущающего параметра ε (т.е. параметра при старших производных, $\varepsilon \in (0, 1]$) к нулю приводит к появлению пограничных слоев, т.е. небольших зон в области определения решения, в которых решение резко меняется. Их ширина — величина того же порядка, что и параметр ε . В настоящей работе, на модельной краевой задаче Неймана для сингулярно

возмущенного параболического уравнения, мы изучаем природу ошибки в приближенном решении и его регулярной и сингулярной компонентах для стандартной (классической) разностной схемы на равномерных сетках и для специальной разностной схемы на сетке Шишкина — кусочно-равномерной по x сетке, сгущающейся в окрестностях пограничных слоев, и равномерной по t (см., например, [2]).

1. Постановка задачи

Пусть требуется найти решение задачи Неймана для сингулярно возмущенного параболического уравнения диффузии¹

$$L_{(1)}u(x, t) \equiv \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in G, \quad (1a)$$

$$\ell_{(1)}u(x, t) \equiv \varepsilon \frac{\partial}{\partial n} u(x, t) = \psi(x, t), \quad (x, t) \in S^\ell, \quad (1b)$$

$$u(x, t) = \phi(x), \quad (x, t) \in S_0. \quad (1c)$$

Здесь диффузионный поток задается на границе области.

Область определения уравнения (1a):

$$G = D \times (0, T], \quad D = (0, 1), \quad (2)$$

где S — граница области G , $S = \overline{G} \setminus G$, S^ℓ и S_0 — боковые и нижняя границы множества G , а $f(x, t)$, $(x, t) \in \overline{G}$, $\psi(x, t)$, $(x, t) \in S^\ell$, и $\phi(x)$, $x \in \overline{D}$ — заданные функции.

Для численных экспериментов мы определяем функции $f(x, t)$, $\psi(0, t)$, $\psi(1, t)$ и $\phi(x)$ следующим образом:

$$f(x, t) = -2t, \quad (x, t) \in \overline{G}, \quad (3)$$

$$\psi(0, t) = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} t^{3/2}, \quad \psi(1, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad T = 1, \quad \phi(x) = \cos(\pi x), \quad x \in \overline{D}.$$

В этой задаче при $\varepsilon \rightarrow 0$ в окрестности боковой границы появляются пограничные слои. Таким образом, мы рассматриваем начально-краевую задачу для сингулярно возмущенного уравнения диффузии (не содержащего реакционного и конвективного членов). Эта задача аппроксимируется монотонной разностной схемой (см., например, [1]) на сетках равномерной по t и равномерной либо кусочно-равномерной по x .

Цель исследования — для модельной сингулярно возмущенной задачи Неймана (1)–(3), с использованием декомпозиции решения дифференциальной задачи, исследовать влияние возмущающего параметра ε на поведение ошибок сеточного решения для регулярной и сингулярной компонент решения.

¹ Запись $D_{(i,j)}$ ($L_{(i,j)}$, $m_{(i,j)}$, $M_{(i,j)}$, $D_{h(i,j)}$) означает, что эти множества (операторы, постоянные, сетки) введены в формуле (i,j) .

2. Декомпозиция решения задачи (1)–(3)

Согласно теории (см., например, [2]), решение дифференциальной модельной задачи (1)–(3) может быть представлено в виде суммы двух функций

$$u(x, t) = U(x, t) + V(x, t), \quad (x, t) \in \overline{G}.$$

Здесь $U(x, t)$ и $V(x, t)$ — соответственно регулярная и сингулярная части решения.

Функция $U(x, t)$ — решение следующей задачи:

$$L_{(1)}U(x, t) = -2t, \quad (x, t) \in G, \quad (4)$$

$$\ell_{(1)}U(x, t) = 0, \quad (x, t) \in S^\ell, \quad U(x, t) = \cos(\pi x), \quad (x, t) \in S_0,$$

для которой известно следующее аналитическое решение:

$$U(x, t) = t^2 + \cos(\pi x) \exp(-\varepsilon^2 \pi^2 t), \quad (x, t) \in \overline{G}.$$

Функция $V(x, t)$ — решение следующей задачи:

$$\begin{aligned} L_{(1)}V(x, t) &= 0, \quad (x, t) \in G, \\ \ell_{(1)}V(x, t) &= \begin{cases} \frac{8}{3\sqrt{\pi}} t^{3/2}, & x = 0, \\ 0, & x = 1 \end{cases}, \quad (x, t) \in S^\ell, \\ V(x, t) &= 0, \quad (x, t) \in S_0. \end{aligned} \quad (5)$$

Удобно представить функцию $V(x, t)$ в виде суммы функций

$$V(x, t) = W(x, t) + v(x, t), \quad (x, t) \in \overline{G},$$

где $v(x, t)$ — остаточный член, а главный член разложения — функция $W(x, t)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} W(x, t) &= \left(\frac{x^4}{12\varepsilon^4} + \frac{x^2}{\varepsilon^2} t + t^2 \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\varepsilon\sqrt{t}} \right) - \\ &- \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{x^3}{6\varepsilon^3} t^{1/2} + \frac{5x}{3\varepsilon} t^{3/2} \right) \exp \left(-\frac{x^2}{4\varepsilon^2 t} \right), \quad 0 \leq x < \infty, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Для функции $v(x, t)$ и ее производной справедливы следующие оценки²:

$$\max_{\overline{G}} |v(x, t)|, \quad \max_{\overline{G}} \left| \frac{\partial}{\partial x} v(x, t) \right| \leq M \varepsilon^n,$$

где целое число n может быть выбрано сколь угодно большим, константа M не зависит от x , t и ε . Таким образом, функция $V(x, t)$ приближает функцию $W(x, t)$ с точностью до $M\varepsilon^n$.

² Через M (через m) обозначаем достаточно большие (малые) положительные постоянные, не зависящие от величины параметра ε . В случае сеточных задач эти постоянные не зависят и от шаблонов разностных схем.

Аналогичные оценки имеем для функции $W(x, t)$

$$\left| W(x, t) \right|, \quad \varepsilon \left| \frac{\partial}{\partial x} W(x, t) \right| \leq M \varepsilon^n.$$

Когда ε уменьшается, функция $W(x, t)$ и произведение $\varepsilon (\partial/\partial x)W(x, t)$ стремятся к нулю при $x \geq x_0 \geq m$, $0 \leq t \leq 1$ быстрее любой степени параметра ε .

Таким образом, для решения задачи (1)–(3) — функции $u(x, t)$ — мы получаем представление

$$u(x, t) = U(x, t) + W(x, t) + v(x, t), \quad (x, t) \in \overline{G}. \quad (7)$$

Есть явные аналитические представления для функций $U(x, t)$ и $W(x, t)$; функция $v(x, t)$ вместе со своими производными мала при малых значениях параметра.

Функция $W(x, t)$ является решением следующей задачи:

$$L_{(1)} W(x, t) = 0, \quad (x, t) \in G, \quad (8)$$

$$\ell_{(1)} W(x, t) = \begin{cases} \frac{8}{3\sqrt{\pi}} t^{3/2}, & x = 0, \\ \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} W_{(6)}(1, t), & x = 1 \end{cases}, \quad (x, t) \in S^\ell,$$

$$W(x, t) = 0, \quad (x, t) \in S_0.$$

Остаточный член сингулярной компоненты — функция $v(x, t)$ — решение задачи

$$L_{(1)} v(x, t) = 0, \quad (x, t) \in G, \quad (9)$$

$$\ell_{(1)} v(x, t) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ -\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} W_{(6)}(1, t), & x = 1 \end{cases}, \quad (x, t) \in S^\ell,$$

$$v(x, t) = 0, \quad (x, t) \in S_0.$$

Здесь произведение $\varepsilon (\partial/\partial x)W(x, t)$ может быть выписано в явном виде в соответствии с формулой (6).

3. Априорные оценки

Задача Неймана для начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного параболического уравнения диффузии исследуется подобно задаче для параболического уравнения реакции-диффузии и конвекции-диффузии (см., например, [2]).

Справедлива следующая Теорема об априорных оценках.

Теорема 1. Пусть данные начально-краевой задачи Неймана (1)–(3) для сингулярно возмущенного параболического уравнения на множестве $\overline{G}$, а также начальные и краевые условия соответственно на множествах $\overline{S}_0$ и S^ℓ являются достаточно гладкими и удовлетворяющими условию согласования на множестве угловых точек S^c , обеспечивающие включение $u \in C^{4,2}(\overline{G})$. Тогда для решения $u(x, t)$, $(x, t) \in \overline{G}$

и его регулярной и сингулярной компонент $U(x, t)$ и $V(x, t)$, $(x, t) \in \overline{G}$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^{k+k_0}}{\partial x^k \partial t^{k_0}} u(x, t) \right| &\leq M \varepsilon^{-k}, \quad (x, t) \in \overline{G}, \\ \left| \frac{\partial^{k+k_0}}{\partial x^k \partial t^{k_0}} U(x, t) \right| &\leq M, \quad (x, t) \in \overline{G}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\left| \frac{\partial^{k+k_0}}{\partial x^k \partial t^{k_0}} V(x, t) \right| \leq M \varepsilon^{-k} \{ \exp^{-m \varepsilon^{-1} x} + \exp^{-m \varepsilon^{-1} (d-x)} \}, \quad (x, t) \in \overline{G}, \quad k + 2k_0 \leq 4.$$

4. Стандартная и специальная разностные схемы

Для численного решения краевой задачи (1)–(3) мы строим стандартную (классическую) и специальную разностные схемы.

На множестве $\overline{G}_{(2)}$ введем прямоугольную сетку

$$\overline{G}_h = \overline{D}_h \times \overline{\omega}_0 = \overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_0, \quad (11)$$

где $\overline{\omega}_1$ — сетка на $\overline{D} = [0, 1]$ с произвольным распределением узлов и с их числом $N + 1$; $\overline{\omega}_0$ — равномерная сетка на отрезке $[0, T]$ с шагом $h_0 = N_0^{-1}$ и числом узлов $N_0 + 1$.

Замечание 1. Далее будем называть сетку $\overline{G}_{h(11)}$

- стандартной, если сетка $\overline{\omega}_1$ в (11) — равномерная;
- специальной, если сетка $\overline{\omega}_1$ в (11) — кусочно-равномерная сетка Шишкина, сгущающаяся в окрестностях пограничных слоев; для нее

$$\overline{D}_h = \overline{D}_h^{sp} = \overline{\omega}_1^{sp} [\sigma(\varepsilon, N, 0, 1, m), N_* = 4^{-1}N, N, 0, 1].$$

На произвольной сетке $\overline{G}_h$ задача аппроксимируется разностной схемой

$$\begin{aligned} \Lambda_{(12)} z(x, t) &\equiv \varepsilon^2 \delta_{x\overline{x}} z(x, t) - \delta_{\overline{t}} z(x, t) = f_{(3)}(x, t), \quad (x, t) \in G_h, \\ \lambda_{(12)} z(x, t) &= \psi_{(3)}(x, t), \quad (x, t) \in S_h^\ell, \\ z(x, t) &= \phi_{(3)}(x), \quad (x, t) \in S_{0h}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $G_h = G \cap \overline{G}_h$, $S_h^\ell = S^\ell \cap \overline{G}_h$, $S_{0h} = S_0 \cap \overline{G}_h$,

$$\lambda_{(12)} z(x, t) = \begin{cases} -\varepsilon \delta_x z(x, t), & x = 0, \\ \varepsilon \delta_{\overline{x}} z(x, t), & x = 1, \end{cases}$$

$\delta_x z(x, t)$, $\delta_{\overline{x}} z(x, t)$ — первые вперед и назад разностные производные.

В соответствии с **Замечанием 1**, мы будем называть разностную схему (12), (11) стандартной схемой, если сетка (11) — равномерная, и специальной, если сетка

(11) — кусочно-равномерная сетка Шишкина, сгущающаяся в окрестностях граничных слоев. Заметим, что сетка по t всегда равномерная.

Из теории разностных схем, с учетом априорных оценок 10, устанавливаем, что при достаточно гладких данных задачи (1)–(3) решение конечно-разностной схемы (12), (11) сходится к решению краевой задачи (1)–(3), когда $N, N_0 \rightarrow \infty$, с оценкой

$$\max_{\overline{G}_h} |u(x, t) - z(x, t)| \leq Q(\varepsilon) [N^{-1} + N_0^{-1}]$$

при фиксированных значениях параметра ε на произвольной сетке $\overline{G}_h$ и со следующей ε -равномерной оценкой на специальной сетке $\overline{G}^{sp}$:

$$\max_{\overline{G}_h^{sp}} |u(x, t) - z(x, t)| \leq M [N^{-1} \ln N + N_0^{-1}].$$

Для краевой задачи Неймана (1)–(3) нас интересует поведение величин $E(\varepsilon, N)$ и $\overline{E}(N)$, где

$$E(\varepsilon, N) = E(\varepsilon, N; u(\cdot)) \equiv E(\varepsilon, N, N), \quad \overline{E}(N) = \overline{E}(N; u(\cdot)) \equiv \overline{E}(N, N),$$

$$E(\varepsilon, N, N_0) = E(\varepsilon, N, N_0; u(\cdot)) = \max_{\overline{G}_h} |u(x, t; \varepsilon) - z(x, t; \varepsilon, N, N_0)|,$$

$$\overline{E}(N, N_0) = \overline{E}(N, N_0; u(\cdot)) = \max_{\varepsilon} E(\varepsilon, N, N_0),$$

$u(x, t) = u(x, t; \varepsilon)$ и $z(x, t) = z(x, t; \varepsilon, N, N_0)$ — решения задач (1)–(3) и (12), (11) соответственно. Кроме того, мы также заинтересованы в поведении ошибок $E(\varepsilon, N)$ и $\overline{E}(N)$ для каждой компоненты из представления (7) решения краевой задачи (1)–(3). Мы хотим проанализировать значения $E(\varepsilon, N; U(\cdot))$, $\overline{E}(N; U(\cdot))$, $E(\varepsilon, N; W(\cdot))$, $\overline{E}(N; W(\cdot))$, $E(\varepsilon, N; v(\cdot))$, $\overline{E}(N; v(\cdot))$. Для этого мы строим разностные схемы

$$\begin{aligned} \Lambda_{(12)} z(x, t) &= f(x, t), & (x, t) \in G_h, \\ \lambda_{(12)} z(x, t) &= 0, & (x, t) \in S_h^\ell, \\ z(x, t) &= \phi(x), & (x, t) \in S_{0h}; \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{(12)} z(x, t) &= 0, & (x, t) \in G_h, \\ \lambda_{(12)} z(x, t) &= \ell_{(1)} W(x, t), & (x, t) \in S_h^\ell, \\ z(x, t) &= 0, & (x, t) \in S_{0h}; \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{(12)} z(x, t) &= 0, & (x, t) \in G_h, \\ \lambda_{(12)} z(x, t) &= \ell_{(1)} v(x, t), & (x, t) \in S_h^\ell, \\ z(x, t) &= 0, & (x, t) \in S_{0h} \end{aligned} \tag{15}$$

для краевых задач (4), (8) и (9) для компонент U , W и v соответственно. Согласно (7), мы получаем сеточное решение для краевой задачи (12) в виде

$$z_{(12)}(x, t) = z_{(13)}(x, t) + z_{(14)}(x, t) + z_{(15)}(x, t), \quad (x, t) \in \overline{G}_h.$$

5. Численные эксперименты

В представленных здесь таблицах приведены значения ошибок $E(\varepsilon, N)$ и $\bar{E}(N)$, вычисленные для различных значений ε и N при $N_0 = N$ для разностных схем (13), (14) и (15) — либо на стандартной сетке, либо на специальной — для задач (4), (8) и (9) соответственно.

Таблица 1. Ошибки $E(\varepsilon, N)$ на стандартной схеме (13) для задачи (4) для U

$\varepsilon \setminus N$	4	16	64	256	1024
1	2.511e-1	6.265e-2	1.636e-2	4.259e-3	1.076e-3
2^{-2}	5.000e-1	1.175e-1	2.882e-2	7.168e-3	1.790e-3
2^{-4}	5.476e-1	9.389e-2	2.149e-2	5.264e-3	1.309e-3
2^{-6}	5.432e-1	8.282e-2	1.767e-2	4.284e-3	1.064e-3
2^{-8}	5.429e-1	8.179e-2	1.690e-2	4.034e-3	1.000e-3
2^{-10}	5.429e-1	8.172e-2	1.683e-2	3.986e-3	9.846e-4
2^{-12}	5.429e-1	8.171e-2	1.683e-2	3.982e-3	9.816e-4
$\bar{E}(N)$	5.476e-1	1.175e-1	2.882e-2	7.168e-3	1.790e-3
q		1.114	1.017	1.007	1.004

Из Таблицы 1 видно, что ошибка $E(\varepsilon, N)$ уменьшается при каждом фиксированном значении параметра ε , когда N увеличивается, и эта ошибка также уменьшается, либо стабилизируется при фиксированном значении N , когда ε уменьшается. То есть приближенное решение $z_{(13)}(x, t)$ сходится к функции $U(x, t)$ и при фиксированных значениях параметра ε , и ε -равномерно. Аналогичный результат мы получаем и на специальной схеме.

Таблица 2. Ошибки $E(\varepsilon, N)$ на стандартной схеме (14) для задачи (8) для W

$\varepsilon \setminus N$	4	16	64	256	1024
1	4.736e-1	9.723e-2	2.332e-2	5.771e-3	1.439e-3
2^{-2}	1.098e+0	2.347e-1	5.581e-2	1.377e-2	3.431e-3
2^{-4}	5.213e+0	1.014e+0	2.114e-1	4.994e-2	1.230e-2
2^{-6}	2.312e+1	5.177e+0	9.935e-1	2.056e-1	4.848e-2
2^{-8}	9.530e+1	2.311e+1	5.169e+0	9.884e-1	2.041e-1
2^{-10}	3.842e+2	9.530e+1	2.311e+1	5.167e+0	9.871e-1
2^{-12}	1.540e+3	3.842e+2	9.530e+1	2.311e+1	5.166e+0
$\bar{E}(N)$	1.540e+3	3.842e+2	9.530e+1	2.311e+1	5.166e+0

Из Таблицы 2 видно, что ошибка $E(\varepsilon, N)$ уменьшается при каждом фиксированном значении параметра ε , когда N увеличивается, и возрастает при фиксированном значении N , когда ε уменьшается. Ошибка $E(\varepsilon, N)$ неограниченно возрастает, когда произведение $\varepsilon N \rightarrow 0$, например, $E(\varepsilon, N) \geq 1000$ (т.е. ошибка больше, чем в 1000 раз, максимального значения самого решения $W(x, t)$) при $\varepsilon N \leq 2^{-10} = 1/1024$. Таким образом, при $N_0 = N$ приближенное решение $z_{(14)}(x, t)$ не сходится к функции $W(x, t)$ ε -равномерно, когда N растет.

Совершенно иной результат мы видим в приводимой далее Таблице 3, где приводятся ошибки $E(\varepsilon, N)$ для задачи (8) для W на специальной схеме (14).

Таблица 3. Ошибки $E(\varepsilon, N)$ на специальной схеме (14) для задачи (8) для W

$\varepsilon \setminus N$	4	16	64	256	1024
1	4.736e-1	9.723e-2	2.332e-2	5.771e-3	1.439e-3
2^{-2}	1.098e+0	2.347e-1	5.581e-2	1.377e-2	3.431e-3
2^{-4}	3.367e+0	1.014e+0	2.114e-1	4.994e-2	1.230e-2
2^{-6}	3.221e+0	1.492e+0	4.650e-1	1.398e-1	4.196e-2
2^{-8}	3.184e+0	1.492e+0	4.650e-1	1.398e-1	4.196e-2
2^{-10}	3.175e+0	1.492e+0	4.650e-1	1.398e-1	4.196e-2
2^{-12}	3.172e+0	1.492e+0	4.650e-1	1.398e-1	4.196e-2
$\bar{E}(N)$	3.367e+0	1.492e+0	4.650e-1	1.398e-1	4.196e-2
q		0.589	0.844	0.870	0.871

Из Таблицы 3 видно, что с ростом N приближенное решение $z(x, t)$ сходится к функции $W(x, t)$ ε -равномерно.

Таблица 4. Ошибки $E_{1024,1024}(\varepsilon, N)$ на стандартной схеме (15) для задачи (9) для v

$\varepsilon \setminus N$	4	16	64	256
1	1.260e-01	2.511e-02	5.713e-03	1.130e-03
2^{-2}	4.944e-04	1.043e-04	2.295e-05	4.485e-06
2^{-4}	1.565e-31	3.698e-32	7.664e-33	1.315e-33
2^{-6}	0.000e-00	0.000e-00	0.000e-00	0.000e-00
$E(N)$	1.260e-01	2.511e-02	5.713e-03	1.130e-03

Таблица на специальной схеме аналогична. Из Таблицы 4 видно, что с ростом N решение $z(x, t)$ сходится к функции $v(x, t)$ ε -равномерно.

Заметим, что мы не можем вычислить значения $E(\varepsilon, N, N_0; v(\cdot))$ и $\bar{E}(N, N_0; v(\cdot))$, потому что мы не имеем аналитического представления функции $v(x, t)$. В качестве точного решения мы используем непрерывную функцию $v_{N^*, N_0^*}(x, t)$, $(x, t) \in \bar{G}$, построенную линейной интерполяцией по x и t из значений функции $z(x, t; \varepsilon, N^*, N_0^*)$, то есть решения задачи (15) на специальной сетке (11) при $N = N^*$, $N_0 = N_0^*$; значения N^* , N_0^* существенно превышают N , N_0 . Здесь $N^* = N_0^* = 1024$.

6. Заключение

Как следует из анализа таблиц, при использовании стандартных разностных схем наибольшая ошибка в приближенном решении $z_{(12)}(x, t)$, т.е. решении задачи (12), (11), вводится ошибкой, связанной с сингулярной частью решения. Функция $z_{(12)}(x, t)$ сходится к решению краевой задачи (1)–(3) при фиксированных значениях параметра ε , когда N и N_0 растут. Однако функция $z_{(12)}(x, t)$ не сходится ε -равномерно. Более того, ошибка в приближенном решении может во много раз превышать мак-

симальное значение точного решения. Ошибка в приближенном решении неограниченно растет, когда произведение εN (at $N_0 = N$) стремится к нулю. Таким образом, в случае стандартных разностных схем, из-за большой ошибки сингулярной компоненты, приближенное решение даже качественно не аппроксимирует неизвестное решение ε -равномерно.

Решения специальных разностных схем (13), (14) и (15) — на специальной сетке Шишкина, — используемых для решения задач (4), (8) и (9) соответственно, сходятся ε -равномерно в равномерной норме. Отсюда следует, что и решение разностной схемы (12) — функция $z_{(12)}(x, t)$ — на специальной сетке Шишкина (11) сходится к решению $u(x, t)$ краевой задачи (1)–(3) ε -равномерно в равномерной норме при $N, N_0 \rightarrow \infty$.

Список литературы / References

- [1] Samarskii A. A., *Theory of Difference Schemes*, Nauka (in Russian), Moscow, 1989.
- [2] Shishkin G. I., Shishkina L. P., *Difference Methods for Singular Perturbation Problems*, CRC Press, Boca Raton, 2009.

Shishkina L. P., "Numerical Study of an Initial-Boundary Value Neumann Problem for a Singularly Perturbed Parabolic Equation", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:5 (2016), 568–576.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-5-568-576

Abstract. For a singularly perturbed one-dimensional parabolic equation with a perturbation parameter ε multiplying the highest-order derivative in the equation, $\varepsilon \in (0, 1]$, an initial-boundary value Neumann problem is considered on a segment. In this problem, when the parameter ε tends to zero, boundary layers appear in neighborhoods of the lateral boundary. In the paper, convergence of the problem solution and its regular and singular components are studied. It is shown that standard finite difference schemes on uniform grids used to numerically solve this problem do not converge ε -uniformly. The error in the grid solution grows unboundedly when the parameter $\varepsilon \rightarrow 0$. The use of a special difference scheme on Shishkin grid which is a piecewise-uniform mesh with respect to x condensing in neighborhoods of boundary layers and a uniform mesh in t , constructed by using monotone grid approximations of the differential problems, allows us to find a numerical solution of this problem convergent in the maximum norm ε -uniformly. The results of the numerical experiments confirm the theoretical results.

Keywords: initial-boundary value Neumann problem, singularly perturbed parabolic equation, piecewise-uniform grid, maximum norm, ε -uniform convergence

On the authors:

Lidia P. Shishkina, orcid.org/0000-0002-8489-5432,

N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 16 S. Kovalevskaya str., Yekaterinburg 620990, Russia, e-mail: lida@convex.ru

Acknowledgments:

This research was partially supported by the Russian Foundation for Basic Research under grant № 16-01-00727.