Моделирование и анализ информационных систем. Т. 23, № 5 (2016), с. 577–586
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 23, No 5 (2016), pp. 577–586

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-5-577-586

УДК 519.633

Компьютерная разностная схема для сингулярно возмущенного параболического уравнения реакции-диффузии при наличии компьютерных возмущений

Шишкин Г. И.

получена 15 марта 2016

Аннотация. Для сингулярно возмущенного параболического уравнения реакции-диффузии с возмущающим параметром ε^2, $\varepsilon \in (0, 1]$, при старшей производной рассматривается начально-краевая задача Дирихле. Для этой задачи исследуется стандартная разностная схема, построенная на основе монотонных сеточных аппроксимаций задачи на равномерных сетках, при наличии компьютерных возмущений. Исследуются возмущения сеточных решений, порождаемые компьютерными возмущениями, то есть вычислениями на компьютере. Получены условия, накладываемые на допустимые компьютерные возмущения, при которых точность возмущенного компьютерного решения по порядку такая же, как у решения невозмущенной разностной схемы, то есть стандартной схемы при отсутствии возмущений. Такого типа схемы с контролируемыми компьютерными возмущениями относятся к компьютерным разностным схемам, называемым также надежными разностными схемами.

Ключевые слова: начально-краевая задача, сингулярно возмущенное параболическое уравнение, уравнение реакции-диффузии, стандартная разностная схема, равномерная сетка, компьютерные возмущения, компьютерная разностная схема

Для цитирования: Шишкин Г. И., "Компьютерная разностная схема для сингулярно возмущенного параболического уравнения реакции-диффузии при наличии компьютерных возмущений", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:5 (2016), 577–586.

Об авторах:
Шишкин Григорий Иванович, orcid.org/0000-0002-6886-8979, доктор физ.-мат. наук,
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук,
ул. С. Ковалевской, 16, г. Екатеринбург, 620990 Россия, e-mail: shishkin@imm.uran.ru

Благодарности:
Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00727).

Введение

При численном моделировании достаточно сложных процессов, характеризующихся наличием пограничных и/или переходных слоев, нередко используются сеточные аппроксимации на основе стандартных разностных схем на равномерных сетках [1].

Отметим, что стандартные разностные схемы на равномерных сетках для *сингулярно возмущенных уравнений конвекции-диффузии* в случае компьютерных возмущений изучались в работах [2], [3] и [4]. В [2] показано, что уже в случае сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения конвекции-диффузии монотонные стандартные разностные схемы на равномерных сетках не являются ε-равномерно хорошо обусловленными и устойчивыми к возмущениям, в частности, к возмущениям, возникающим при компьютерных вычислениях, что делает их непригодными для практического использования. Подобная ситуация возникает в случае сингулярно возмущенных параболических уравнений конвекции-диффузии [2], [3] и [4]. Таким образом, в случае сингулярно возмущенных задач возникает интерес к разработке численных методов, *пригодных для компьютерных вычислений*, для других классов задач, в частности, реакции-диффузии. В работах [2], [3] и [4] построены *компьютерные разностные схемы* – стандартные разностные схемы на равномерных сетках в случае контролируемых компьютерных возмущений – сходящиеся в равномерной норме при фиксированных значениях ε, $\varepsilon \in (0,1]$ с такой же скоростью, как при отсутствии возмущений.

В настоящей работе для начально-краевой задачи для *сингулярно возмущенного параболического уравнения реакции-диффузии* изучается влияние компьютерных возмущений на точность решения стандартной разностной схемы и строится *компьютерная разностная схема*. Установлены условия, налагаемые на допустимые компьютерные возмущения, при которых *компьютерная разностная схема* сходится в равномерной норме со скоростью невозмущенной разностной схемы.

1. Постановка задачи. Цель исследования

На множестве

$$\overline{G} = G \bigcup S, \; G = D \times (0,T], \quad D = (0,d) \tag{1}$$

рассмотрим начально-краевую задачу для сингулярно возмущенного параболического уравнения реакции-диффузии[1]

$$L_{(2)} u(x,t) = f(x,t), \; (x,t) \in G, \; u(x,t) = \varphi(x,t), \; (x,t) \in S. \tag{2}$$

Здесь $L_{(2)} = \varepsilon^2 \, a(x,t) \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - c(x,t) - p(x,t) \dfrac{\partial}{\partial t}, \quad (x,t) \in G, \; S = S^L \cup S_0, S^L = S_1 \cup S_2$, S_1 и S_2 — левая и правая части границы S^L, $S_0 = \{(x,t) : 0 \le x \le d, \; t = 0\}$ – нижняя часть границы S; функции $a(x,t)$, $c(x,t)$, $p(x,t)$, $f(x,t)$ и $\varphi(x,t)$ предполагаются достаточно гладкими на $\overline{G}$ и S соответственно, причем[2] $m \le a(x,t), p(x,t) \le M$, $0 \le c(x,t) \le M$, $|f(x,t)| \le M, (x,t) \in \overline{G}$, $|\varphi(x,t)| \le M, (x,t) \in S$; параметр ε принимает произвольные значения из полуинтервала $(0,1]$. Считаем, что на множестве угловых точек S^c выполняются условия согласования, обеспечивающие требуемую гладкость

[1] Запись $L_{(k)}$ ($m_{(k)}$, $M_{(k)}$, $G_{h(k)}$)) означает, что эти операторы (постоянные, сетки) введены в формуле (k).

[2] Через M (через m) обозначаем достаточно большие (малые) положительные постоянные, не зависящие от величины параметра ε. В случае сеточных задач эти постоянные не зависят и от шаблонов разностных схем.

решения задачи на множестве $\overline{G}$. При малых значениях параметра ε в окрестности множества S^L появляется пограничный слой [5].

Стандартные схемы на равномерных сетках (см., например, [1]) сходятся, когда шаг сетки поперек слоя много меньше параметра ε.

Наша цель – для задачи (2), (1) исследовать влияние возмущений данных разностной схемы на точность решения сеточной задачи.

Задачу (2), (1) аппроксимируем стандартной разностной схемой на равномерной сетке $\overline{G}_h = \overline{G}_h^u \equiv \overline{\omega} \times \overline{\omega}_0$ с шагами $h = d/N$ и $\tau = T/N_0$ по x и t, где $N+1$, N_0+1 — число узлов $x = x^i$, $t = t^k$ сетки $\overline{G}_h^u$, $i = 0, 1, \ldots, N$, $k = 0, 1, \ldots, N_0$:

$$\Lambda z(x,t) = f(x,t,),\ (x,t) \in G_h, \quad z(x,t) = \varphi(x,t),\ (x,t) \in S_h. \tag{3}$$

Здесь $\Lambda_{(3)} \equiv \varepsilon^2\, a(x,t)\, \delta_{\overline{x}\widehat{x}} - c(x,t) - p(x,t)\, \delta_{\overline{t}}$, $G_h = G \cap \overline{G}_h$, $S_h = S \cap \overline{G}_h$, $\delta_{\overline{x}\widehat{x}}\, z(x,t)$ — вторая центральная разностная производная, $\delta_x\, z(x,t)$ и $\delta_{\overline{x}}\, z(x,t)$, $\delta_{\overline{t}}\, z(x,t)$ — первые (вперед и назад) разностные производные.

Для решения схемы (3) выполняется оценка [5]

$$\|u - z\|_{\overline{G}_h} \le M\,(\delta_1 + \delta_0), \quad \delta_1 = \delta_1(\varepsilon, N) = \min\{\varepsilon^{-2}\, N^{-2}, 1\}, \quad \delta_0 = N_0^{-1}; \tag{4}$$

схема (3) сходится при условии $\delta_1,\ \delta_0 \to 0$.

Теорема 1. *Пусть для решения $u(x,t)$ задачи (2) выполняется оценка*

$$|\partial^{k+k_0}/\partial x^k \partial t^{k_0}\, u(x,t)| \le M\, \varepsilon^{-k}, \quad (x,t) \in \overline{G}, \quad k + 2k_0 \le K, \quad K = 4.$$

Тогда для решения разностной схемы (3) справедлива оценка (4).

Схема (3) не сходится ε-равномерно при $N, N_0 \to \infty$; для ее сходимости требуется использовать сетки по x при $N \gg \varepsilon^{-1}$.

2. Обусловленность разностной схемы (3)

Пусть $N+1$ компонентам функции $z(x,t)$ в узлах $x \in \overline{\omega}$ при $t = t^{k-1}$, $(x,t) \in \overline{G}_h$ отвечает $(N+1)$-мерный вектор $Y = Y_k, k = 1, \ldots, N_0+1$. Упорядочив элементы $z(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}_h$, в схеме (3), приходим к системе

$$\mathbf{A}\,\mathbf{Y} = \mathbf{F}. \tag{5a}$$

Здесь $\mathbf{A}$ — $\{(N+1)(N_0+1)\} \times \{(N+1)(N_0+1)\}$-матрица, $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{F}$ — $\{(N+1)(N_0+1)\}$-мерные вектора из нормированного пространства $R^{(N+1)(N_0+1)}$ с равномерной нормой $\|\cdot\|$.

Матрица $\mathbf{A}$ — клеточная матрица с клетками (A_{kl}) размерности $(N+1)\times(N+1)$, где k и l — номер клеточных строки и столбца, содержащих элемент A_{kl}, $k, l = 1, \ldots, N_0+1$; лишь клетки A_{kk} и $A_{k,k-1}$ ненулевые, матрицы A_{kk}, $k \ge 2, \ldots, N_0+1$ — трехдиагональные, матрицы A_{11}, $A_{k,k-1}$ — диагональные. Векторы $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{F}$ образованы клеточными векторами $Y = Y_k$, $F = F_k$, $k = 1, \ldots, N_0+1$.

Схеме (3) соответствует “клеточная” матричная запись

$$A_{kk}Y_k + A_{k,k-1}Y_{k-1} = F_k,\ k = 2, \ldots, N_0+1; \quad Y_k = F_k,\ k = 1. \tag{5b}$$

Компоненты матриц A_{kk}, $A_{k,k-1}$ и векторов Y_k и F_k, где $Y_k = (y_1^k, \dots, y_{N+1}^k)'$, $F_k = (f_1^k, \dots, f_{N+1}^k)'$, определяются соотношениями

$$a_{ij}^{kk} = 1, \quad y_i^k = z(x_i, t_1), \quad f_i^k = \varphi(x_i, t_1), \quad i, j = 1, \dots, N+1 \quad \text{при } k = 1;$$

$$a_{11}^{kk} = 1, \; a_{i,i-1}^{kk} = -\varepsilon^2 h^{-2} a(x_i, t_k), \; a_{i,i+1}^{kk} = a_{i,i-1}^{kk},$$

$$a_{ii}^{kk} = 2\,\varepsilon^2 h^{-2} a(x_i, t_k) + c(x_i, t_k) + \tau^{-1} p(x_i, t_k),$$

$$a_{N,N}^{kk} = 1, \quad a_{ii}^{k,k-1} = -\tau^{-1} p(x_i, t_k), \quad i = 2, \dots, N;$$

$$y_i^k = z(x_i, t_k), \; i = 1, \dots, N+1; \quad f_1^k = \varphi(x_1, t_k),$$

$$f_i^k = -f(x_i, t_k), \; i = 2, \dots, N, \quad f_{N+1}^k = \varphi(x_{N+1}, t_k) \quad \text{при } k = 2, \dots, N_0 + 1.$$

Здесь $x_{i\,(5)} = x^{i-1}$, $t_{k\,(5)} = t^{k-1}$, $(x^{i-1}, t^{k-1}) \in \overline{G}_h$, $i = 1, \dots, N+1$, $k = 1, \dots, N_0 + 1$.

Для нормы матрицы $\mathbf{A}_{(5)}$ и *числа обусловленности матрицы* $æ(\mathbf{A})$, где $æ(\mathbf{A}) = æ_M(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{A}^{-1}\|$, на сетке $\overline{G}_h^u$ получается оценка

$$\|\mathbf{A}(\overline{G}_h^u)\|, \; æ_M(\mathbf{A};\, \overline{G}_h^u) \;\le\; M\,\left[\left(1 + \varepsilon^2 N^2\right) + N_0\right]$$

в *примитивных* переменных ε, N, N_0 (см. [5], гл. 12, и [6, 7]). В *информативных* переменных ε, δ_1, δ_0 для матрицы $\mathbf{A}$ и ее числа обусловленности $æ_M$ получается оценка

$$\|\,\mathbf{A}(\overline{G}_h^u)\,\|, \; æ_M(\mathbf{A};\, \overline{G}_h^u) \;\le\; M\,[\delta_1^{-1} + \delta_0^{-1}]. \tag{6}$$

Таким образом, матрица стандартной схемы является ε-равномерно хорошо обусловленной.

Теорема 2. *Для числа обусловленности* $æ_M(\mathbf{A};\, \overline{G}_h^u)$ *матрицы разностной схемы* (3) *справедлива оценка* (6).

Рассмотрим возмущенную задачу, соответствующую задаче (5)

$$\mathbf{A}^*\,\mathbf{Y}^* = \mathbf{F}^*. \tag{7}$$

Здесь $\mathbf{A}^* = \mathbf{A} + \delta\mathbf{A}$ — возмущенная матрица, $\mathbf{Y}^* = \mathbf{Y} + \delta\mathbf{Y}$ и $\mathbf{F}^* = \mathbf{F} + \delta\mathbf{F}$ — возмущенные векторы. Возмущения коэффициента $a(x_i, t_k)$, входящего в компоненты a_{ij}^{kk}, $j = i-1, i, i+1$, $i = 2, \dots, N$ матрицы $A_{kk\,(5)}$, вообще говоря, различаются; обозначим эти возмущения коэффициента $a(x_i, t_k)$ в возмущенных компонентах $a_{ij}^{kk\,*}$ через $\delta a_i^{kk;j}$. Подобным образом возмущения коэффициента $c(x_i, t_k)$ в компонентах a_{ii}^{kk} обозначим через $\delta c_i^{kk;i}$; $i = 2, \dots, N$. Возмущения коэффициента $p(x_i, t_k)$ в компонентах a_{ii}^{kk} и $a_{ii}^{k,k-1}$ матриц $A_{kk\,(5)}$, $A_{k,k-1\,(5)}$ обозначим через $\delta p_i^{kk;i}$ и $\delta p_i^{k,k-1;i}$ соответственно.

Таким образом, в покомпонентной записи клеточных матриц δA_{kk}, $\delta A_{k,k-1}$ и векторов δF_k и δY_k имеем

$$\delta a_{ij}^{kk} = 0, \; \delta f_i^k = \delta\varphi_{i,1}, \; \delta y_i^k = \delta z(x_i, t_1), \; i, j = 1, \dots, N+1 \text{ при } \; k = 1; \tag{8}$$

$$\delta a_{11}^{kk} = 0, \quad \delta a_{i,i-1}^{kk} = -\varepsilon^2 h^{-2}\, \delta a_i^{kk;i-1}, \quad \delta a_{ii}^{kk} = 2\,\varepsilon^2 h^{-2}\, \delta a_i^{kk;i} + \delta c_i^{kk;i} + \tau^{-1}\, \delta p_i^{kk;i},$$

$$\delta a_{i,i+1}^{kk} = -\varepsilon^2 h^{-2}\, \delta a_i^{kk;i+1}, \quad \delta a_{N+1,N+1}^{kk} = 0, \quad \delta a_{ii}^{k,k-1} = -\tau^{-1}\, \delta p_i^{k,k-1;i}, \quad i = 2, \dots, N;$$

$$\delta f_1^k = \delta\varphi_{1,k},\ \delta f_i^k = -\delta f_{i,k},\ i = 2,\dots,N,\ \delta f_{N+1}^k = \delta\varphi_{N+1,k};$$
$$\delta y_i^k = \delta z(x_i, t_k),\ i = 1,\dots,N+1 \ \ \textit{при} \ \ k = 2,\dots,N+1,$$

где $\varphi_{ik} = \varphi(x_i, t_k)$, $f_{ik} = f(x_i, t_k)$.

Возмущенной матричной задаче (7) соответствует следующая возмущенная разностная схема

$$\begin{aligned} \Lambda^* z^*(x,t) \ &\equiv\ \left[\varepsilon^2 a^*(x,t)\,\delta_{\overline{x}\widehat{x}} - c^*(x,t) - p^*(x,t)\,\delta_{\overline{t}}\right] z^*(x,t) = f^*(x,t),\ (x,t)\in G_h, \\ z^*(x,t) \ &=\ \varphi^*(x,t), \quad (x,t)\in S_h. \end{aligned} \tag{9}$$

Принимая во внимание соотношения (8), для возмущения сеточного решения $z^*(x,t) - z(x,t)$, где $z^*(x^i,t^k) - z(x^i,t^k) = \delta Y_{i+1}^{k+1}$, $(x^i,t^k)\in \overline{G}_h$, $i = 1,\dots,N+1$, $k = 1,\dots,N_0+1$, $z^*(x,t) = z^*_{(9)}(x,t)$, $(x,t)\in\overline{G}_h$, получаем оценку

$$\|\ z^* - z\ \|_{\overline{G}_h} \le M\left[\varepsilon^2 N^2 \max_{i,j,k;i\ne 1,N+1,k\ne 1} |\delta a_i^{kk;j}| + N_0 \max_{i,k,l}|\delta p_i^{kl;i}| + \max_{i,k}\widehat{\psi}_{ik}\right], \tag{10}$$

где $\max_{i,k}\widehat{\psi}_{ik} = \max\left[\max_{i,k}|\delta c_i^{kk;i}|,\ \max_{i,k}|\delta f_{ik}|,\ \max_{i,k}|\delta\varphi_{ik}|\right]$, $j = i-1, i, i+1$, $l = k-1$, k и $i = 1,\dots,N+1$, $k = 1,\dots,N_0+1$.

С учетом оценки (10) имеем следующую оценку, неулучшаемую по вхождению величин ε, δ_1, δ_0:

$$\|\ z^* - z\ \|_{\overline{G}_h} \le M\left[\delta_1^{-1} \max_{i,j,k;i\ne 1,N+1,k\ne 1} |\delta a_i^{kk;j}| + \delta_0^{-1}\max_{i,k,l}|\delta p_i^{kl;i}| + \max_{ik}\widehat{\psi}_{ik}\right], \tag{11}$$

где $\max_{ik}\widehat{\psi}_{ik} = \max_{ik}\widehat{\psi}_{ik\,(10)}$, $\delta_1 = \delta_{1\,(4)}(\varepsilon, N)$, $\delta_0 = \delta_{0\,(4)}(N_0)$. Для числа обусловленности разностной схемы (3) получаем оценку $æ_P(\mathbf{A};\overline{G}_h) \le M\,(\,\delta_1^{-1} + \delta_0^{-1}\,)$, т.е. *схема* (3) *является ε-равномерно хорошо обусловленной.*

С учетом (10), (11) получаем *оценку ошибки решения возмущенной разностной схемы в информативных переменных*

$$\begin{aligned} \|u - z^*\|_{\overline{G}_h} \le M\,\Big[\,\delta_1 + \delta_0 + \delta_1^{-1} &\max_{i,j,k;i\ne 1,N+1,k\ne 1}|\delta a_i^{kk;j}| \\ &+\delta_0^{-1}\max_{i,k,l}|\delta p_i^{kl;i}| + \max_{ik}\widehat{\psi}_{ik}\,\Big]. \end{aligned} \tag{12}$$

Теорема 3. *Пусть для решения $u(x,t)$ задачи* (2) *выполняется условие Теоремы* 1. *Тогда для решения возмущенной разностной схемы* (9) *справедлива оценка* (12).

3. Компьютерная разностная схема

Через $\triangle$ обозначим возмущения, вносимые при компьютерных вычислениях. Пусть $z^*_\triangle(x,t)$ — решение возмущенной разностной схемы в матричной записи (7), (8) при условии

$$|\delta a_i^{kk;j}|,\ |\delta c_i^{kk;i}|,\ |\delta p_i^{kl;i}|,\ |\delta f_{ik}|,\ |\delta\varphi_{ik}| \le \triangle\ . \tag{13}$$

Тогда для функции $z^*_\triangle(x,t)$ получается оценка

$$\|\ z^*_\triangle - z\ \|_{\overline{G}_h} \le M\,(\,\delta_1^{-1} + \delta_0^{-1}\,)\ \triangle,$$

эквивалентная оценке $\| \ z^*_\triangle - z \ \|_{\overline{G}_h} \leq \ M\,(\,\varepsilon^2\, N^2 \ + N_0\,) \ \triangle$. Ошибка компьютерного решения в переменных ε, δ_1, δ_0, $\triangle$, в силу (12), (13), является ε-равномерно ограниченной

$$\| \ u - z^*_\triangle \ \|_{\overline{G}_h} \leq M \, [\ \delta_1 + \delta_0 + (\, \delta_1^{-1} + \delta_0^{-1}) \ \triangle \ ]. \tag{14}$$

Теорема 4. *Пусть для решения $u(x,t)$ задачи (2) выполняется условие Теоремы 1 и пусть для компьютерных возмущений выполняется условие (13). Тогда для решения возмущенной разностной схемы (9) справедлива оценка (14).*

При фиксированных значениях компьютерного параметра $\triangle$ ошибка компьютерного решения неограниченно растет при $\delta_1, \ \delta_0 \to 0$. Нас интересуют условия, накладываемые на допустимые компьютерные возмущения и на величины N, N_0, при которых компьютерная разностная схема сходится при $N, N_0 \to \infty$.

Определение 1. *Вычислительную систему, а именно, совокупность стандартной разностной схемы (определяемой величинами N, N_0 и параметром ε) и “согласованного” компьютера (с компьютерными параметрами, определяемыми величинами N, N_0 и параметром $\triangle$ — допустимым компьютерным возмущением, $\triangle{=}\triangle \ (\varepsilon, \, \delta_1, \, \delta_0)$), для которых точность компьютерного решения по порядку такая же, как у решения невозмущенной стандартной разностной схемы, назовем компьютерной разностной схемой.*

Согласно (14), при условии

$$\triangle \leq M \ \min[\, \delta_1^2, \ \delta_0^2], \tag{15}$$

эквивалентном условию $\triangle \leq \ M \ \min[\,\varepsilon^{-4}\, N^{-4}, N_0^{-2}]$, имеем оценку для $\| \ u - z^*_\triangle \ \|_{\overline{G}_h}$, подобную (4):

$$\| \ u - z^*_\triangle \ \|_{\overline{G}_h} \leq M \, (\delta_1 + \delta_0). \tag{16}$$

Таким образом, схема $\{(3), (13); (15)\}$ (т.е. схема (3) при условии (13) в случае дополнительного условия (15)) является компьютерной разностной схемой. Если же $\triangle \gg \ \delta_1^2$, либо $\triangle \gg \ \delta_0^2$, то $\|u - z^*_\triangle\|_{\overline{G}_h} \gg \delta_1$, либо $\|u - z^*_\triangle\|_{\overline{G}_h} \gg \delta_0$ соответственно, т.е. оценка (16) нарушается.

Теорема 5. *Решение $z^*_\triangle(x,t)$ компьютерной разностной схемы $\{(3), (13); (15)\}$ сходится с оценкой (16).*

4. Иллюстрации

Обсудим *качественное поведение* главной части ошибки $\|u - z^*_\triangle\|_{\overline{G}_h}$ компьютерного решения $z^*_\triangle$ и ее компонент $\|u - z\|_{\overline{G}_h}$, $\|z^*_\triangle - z\|_{\overline{G}_h}$.

Из явного вида компонент δ_0, δ_1 из оценки (4) следует, что компонента $\delta_0 = N_0^{-1}$ зависит лишь от N_0 и быстро убывает с ростом N_0, однако компонента $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon, N_1)$, зависящая от ε и N_1, может принимать значения от малых до конечных. Таким образом, для простоты, при качественном анализе ошибок сеточного решения далее будем рассматривать лишь влияние величин ε, N_1, $\triangle$ на ошибки $\|u - z\|$, $\|z^*_\triangle - z\|$, $\|u - z^*_\triangle\|$, пренебрегая ошибками, зависящими от N_0.

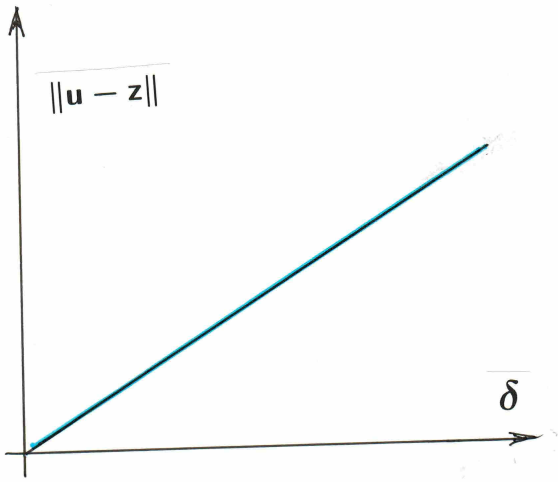

Рис. 1. Ошибка $\| \ u - z \ \|_{\overline{D}_h}$ невозмущенного сеточного решения z
Fig. 1. Error $\| \ u - z \ \|_{\overline{D}_h}$ of the unperturbed grid solution z

На Рис. 1 дается поведение ошибки $\|u-z\|_{\overline{D}_h}$ сеточного решения z в зависимости от значений величины δ; ошибка растет линейно с ростом параметра точности δ.

На Рис. 2 приводится поведение возмущения $\|z^*_\triangle - z\|_{\overline{D}_h}$ сеточного решения z в случае фиксированных компьютерных возмущений (величины $\triangle$); с ростом параметра точности δ возмущения $\|z^*_\triangle - z\|_{\overline{D}_h}$ убывают, стремясь к нулю.

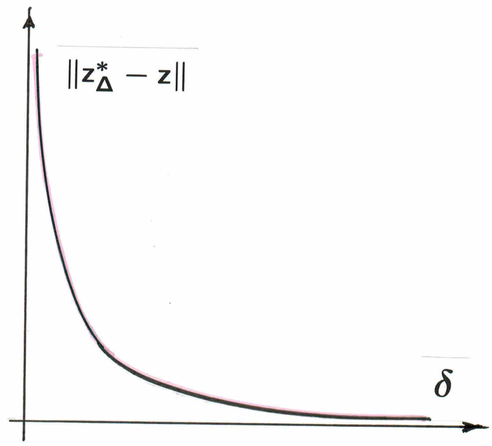

Рис. 2. Возмущение $\| \ z^*_\triangle - z \ \|_{\overline{D}_h}$ сеточного решения z
Fig. 2. The perturbation $\| \ z^*_\triangle - z \ \|_{\overline{D}_h}$ of the grid solution z

На Рис. 3 приводится ошибка $\|u - z^*_\triangle\|_{\overline{D}_h}$ (жирная линия) компьютерного решения $z^*_\triangle$ и ее компоненты $\|u - z\|_{\overline{D}_h}$ и $\|z^*_\triangle - z\|_{\overline{D}_h}$ (пунктирные линии) в зависимости от величины δ.

На Рис. 4 даются ошибки $\|u - z^*_\triangle\|_{\overline{D}_h}$ компьютерного решения $z^*_\triangle$ для различ-

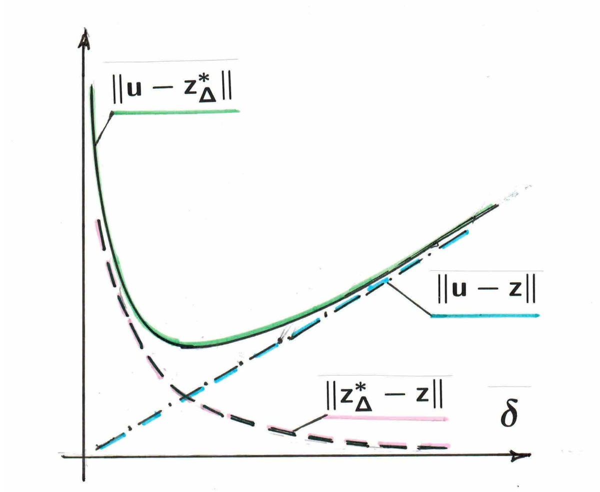

Рис. 3. Ошибки $\| u - z^*_\triangle \|_{\overline{D}_h}$ компьютерного решения $z^*_\triangle$
Fig. 3. Errors $\| u - z^*_\triangle \|_{\overline{D}_h}$ of the computer solution $z^*_\triangle$

ных значений величин $\triangle_1$ и $\triangle_2$ при $\triangle_1 < \triangle_2$ в зависимости от величины δ , а также компоненты $\|u - z\|_{\overline{D}_h}$, $\|z^*_\triangle - z\|_{\overline{D}_h}$ для $\triangle = \triangle_1$.

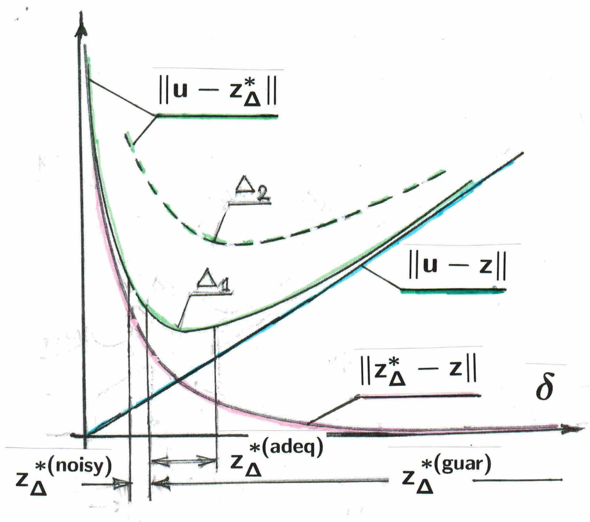

Рис. 4. Ошибка компьютерного решения $z^*_\triangle$ и ее компоненты
Fig. 4. Error of the computer solution $z^*_\triangle$ and its component

Для компьютерных решений удобно ввести классификацию в зависимости от соотношения между ошибкой невозмущенного сеточного решения и возмущением сеточного решения.

Компьютерное решение $z^*_\triangle(x),\ x \in \overline{D}_h$ относим к *адекватным* в том случае, когда ошибка $\|u - z\|_{\overline{D}_h}$ невозмущенного сеточного решения z и возмущение $\|z^*_\triangle - z\|_{\overline{D}_h}$ сеточного решения $z^*_\triangle$ — величины одного порядка (такое компьютерное решение обозначаем $z^{*(adeq)}_\triangle(x)$).

Компьютерное решение $z^*_\Delta(x), x \in \overline{D}_h$ относим к *гарантированным* в том случае, когда возмущение $\|z^*_\Delta - z\|_{\overline{D}_h}$ сеточного решения z^*_Δ не превосходит по порядку ошибки $\|u - z\|_{\overline{D}_h}$ невозмущенного сеточного решения z (такое компьютерное решение обозначаем $z^{*(guar)}_\Delta(x)$).

Компьютерное решение $z^*_\Delta(x), x \in \overline{D}_h$ относим к *зашумленным* в том случае, когда возмущение $\|z^*_\Delta - z\|_{\overline{D}_h}$ сеточного решения z^*_Δ превосходит по порядку ошибку $\|u - z\|_{\overline{D}_h}$ невозмущенного сеточного решения z (такое компьютерное решение обозначаем $z^{*(noisy)}_\Delta(x)$).

Список литературы / References

[1] Samarskii A. A., *Theory of Difference Schemes*, Nauka (in Russian), Moscow, 1989.

[2] Шишкин Г. И., “Компьютерная разностная схема для сингулярно возмущенного уравнения конвекции-диффузии”, *Журн. вычисл. математики и мат. физики*, **54**:8 (2014), 1256–1269; English transl.: Shishkin G. I., “Computer Difference Scheme for a Singularly Perturbed Convection-Diffusion Equation”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **54**:8 (2014), 1221–1233.

[3] Шишкин Г. И., “Стандартная схема для сингулярно возмущенного параболического уравнения конвекции-диффузии при компьютерных возмущениях”, *Доклады Академии наук*, **462**:1 (2015), 26–29; English transl.: Shishkin G. I., “Standard Scheme for a Singularly Perturbed Parabolic Convection-Diffusion Equation under Computer Perturbation”, *Doklady Mathematics*, **91**:3 (2015), 273–276.

[4] Шишкин Г. И., “Разностная схема для сингулярно возмущенного параболического уравнения конвекции-диффузии при наличии возмущений”, *Журн. вычисл. математики и мат. физики*, **55**:11 (2015), 74–90; English transl.: Shishkin G. I., “Difference Scheme for a Singularly Perturbed Parabolic Convection-Diffusion Equation in the Presence of Perturbations”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **55**:11 (2015), 1876–1892.

[5] Shishkin G. I., Shishkina L. P., *Difference Methods for Singular Perturbation Problems*, CRC Press, Boca Raton, 2009.

[6] Шишкин Г. И., “Сеточная аппроксимация сингулярно возмущенных уравнений с конвективными членами при возмущении данных”, *Журн. вычисл. математики и мат. физики*, **41**:5 (2001), 692–707; English transl.: Shishkin G. I., “Grid approximation of singularly perturbed equations with convective terms under perturbation of data”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **41**:5 (2001), 649–664.

[7] Шишкин Г. И., “Обусловленность разностных схем для сингулярно возмущенного параболического уравнения конвекции-диффузии”, *Журн. вычисл. математики и мат. физики*, **48**:5 (2008), 813–830; English transl.: Shishkin G. I., “Conditioning of finite difference schemes for a singularly perturbed convec-tion-diffusion parabolic equation”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **48**:5 (2008), 769–785.

Shishkin G. I., "Computer Difference Scheme for a Singularly Perturbed Reaction-Diffusion Equation in the Presence of Perturbations", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:5 (2016), 577–586.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-5-577-586

Abstract. In this paper, for a singularly perturbed parabolic reaction-diffusion equation with a perturbation parameter ε^2, $\varepsilon \in (0, 1]$, multiplying the highest-order derivative in the equation, an initial-boundary value Dirichlet problem is considered. For this problem, a standard difference scheme constructed by using monotone grid approximations of the differential problem on uniform grids, is studied in the presence of computer perturbations. Perturbations of grid solutions are studied, which are generated by computer perturbations, i.e., the computations on a computer. The conditions imposed on admissible computer perturbations are obtained under which the accuracy of the perturbed computer solution is the same by order as the solution of an unperturbed difference scheme, i.e., a standard scheme in the absence of perturbations. The schemes of this type with controlled computer perturbations belong to computer difference schemes, also named reliable difference schemes.

Keywords: initial–boundary value problem, singularly perturbed parabolic equation, reaction-diffusion equation, standard difference scheme, uniform grid, computer perturbations, computer difference scheme

On the authors:
Grigorii I. Shishkin, orcid.org/0000-0002-6886-8979, doctor of science,
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
16 S. Kovalevskaya str., Yekaterinburg 620990, Russia, e-mail: shishkin@imm.uran.ru

Acknowledgments:
This research was partially supported by the Russian Foundation for Basic Research under grant № 16-01-00727.