*Моделирование и анализ информационных систем.* Т. 23, № 5 (2016), с. 587–594
*Modeling and Analysis of Information Systems.* Vol. 23, No 5 (2016), pp. 587–594



**DOI:** 10.18255/1818-1015-2016-5-587-594

УДК 517.9

# Об отсутствии и разрушении решений в некоторых сингулярно возмущённых задачах со сменой устойчивости

**Терентьев М. А.**

*получена 15 марта 2016*

**Аннотация.** В работе рассматриваются некоторые сингулярно возмущённые задачи в случае пересечения корней вырожденного уравнения (этот случай называют также случаем «смены устойчивости»). Такие задачи нередко встречаются в качестве моделей химической кинетики. Имеется уже немало работ, в которых устанавливается существование и асимптотическое поведение решений задач рассматриваемого класса. Типичное решение вследствие смены устойчивости приближается к негладкому (но непрерывному) составному корню вырожденного уравнения по мере уменьшения параметра возмущения. При этом в ряде задач регулярная компонента возмущения доминирует над сингулярной, что требует дополнительного условия на регулярную компоненту, обеспечивающего устойчивость составного корня в окрестности точки пересечения. Замена этого условия на противоположное приводит к отсутствию или разрушению решения задачи при достаточно малом значении параметра возмущения. В работе доказываются некоторые результаты такого рода с применением метода нелинейной ёмкости и обсуждается их роль в разработке вычислительных алгоритмов для рассматриваемого класса задач.

**Ключевые слова:** малый параметр, сингулярные возмущения, неизолированный корень, смена устойчивости, несуществование, разрушение, нелинейная ёмкость

**Для цитирования:** Терентьев М. А., "Об отсутствии и разрушении решений в некоторых сингулярно возмущённых задачах со сменой устойчивости", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:5 (2016), 587–594.

**Об авторах:**
Терентьев Михаил Анатольевич, orcid.org/0000-0003-0006-4314, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.,
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
119991, Россия, ГСП–1, г. Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2, e-mail: m.terentyev@physics.msu.ru

**Благодарности:**
Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №15-01-04619.

# Введение

В работе [1] рассматривалась задача Неймана для сингулярно возмущённого эллиптического уравнения следующего вида:

$$\begin{aligned} &\varepsilon^{2p}\Delta u = f(u, x, \varepsilon), \quad x \in \Omega, \\ &\frac{\partial u}{\partial n}(x, \varepsilon) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $\Omega$ — ограниченная область в $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, $n$ — внутренняя нормаль к $\partial\Omega$. Правая часть $f(u, x, \varepsilon)$ и граница $\partial\Omega$ (при $N > 1$) предполагаются достаточно гладкими.

Целью работы являлось доказательство существования и изучение асимптотического поведения решения задачи (1) при $\varepsilon \to 0$ в случае $p > 3/4$. Сформулируем условия, при которых проводилось исследование.

**Условие A1.** *Пусть вырожденное уравнение*

$$f(u, x, 0) = 0 \tag{2}$$

*имеет непрерывный при* $x \in \overline{\Omega}$ *корень* $u = \varphi(x)$, *причём существует множество* $\Gamma \subseteq \overline{\Omega}$, *такое, что*

$$f_u(\varphi(x), x, 0) > 0, \quad x \in \overline{\Omega} \setminus \Gamma,$$
$$f_u(\varphi(x), x, 0) = 0, \quad x \in \Gamma.$$

Ввиду непрерывности функции $f_u(\varphi(x), x, 0)$ множество $\Gamma$ является замкнутым.

**Условие A2.** $|\varphi(x) - \varphi(\xi)| \leq L\,||x - \xi||_N$ *при* $x, \xi \in \overline{\Omega}$ *для некоторой постоянной* $L > 0$, *что означает липшицевость* $\varphi$ *(здесь* $||\cdot||_N$ *— евклидова длина в* $\mathbb{R}^N$*).*

**Условие A3.** $f_{uu}(\varphi(x), x, 0) > 0$ *при* $x \in \Gamma$.

**Условие A4.** $f_\epsilon(\varphi(x), x, 0) < 0$ *при* $x \in \Gamma$.

В работе [1] показано, что если выполнены условия A1–A4, то при достаточно малых $\varepsilon > 0$ задача (1) имеет решение $u(x, \varepsilon)$, для которого справедливо следующее асимптотическое представление:

$$u(x, \varepsilon) = \varphi(x) + \Phi(x, \varepsilon), \tag{3}$$

где $\Phi(x, \varepsilon) = O(\varepsilon^{1/2})$ в некоторой окрестности $\Gamma$, $\Phi(x, \varepsilon) = O(\varepsilon^{\min(p,1)})$ в некоторой окрестности $\partial\Omega$, но вне окрестности $\Gamma$, $\Phi(x, \varepsilon) = O(\varepsilon)$ в остальной части $\overline{\Omega}$. Ранее аналогичный результат был получен в [2] для случая $N = 1$ и в [3] для случая $N = 2$ и множества $\Gamma$ простой структуры типа замкнутой гладкой кривой без самопересечений. Известно также [4], что решение задач рассматриваемого типа может быть неединственным в асимптотически малой окрестности поверхности $u = \varphi(x)$.

Условие A1 означает, что вне некоторой окрестности $\Gamma$ корень $\varphi$ является изолированным. Внутри этой окрестности, как следует из условий A1 и A3, уравнение (2) имеет ещё один – и только один – корень, совпадающий с $\varphi(x)$ при $x \in \Gamma$ и меньший $\varphi(x)$ при остальных $x$. Например, такая ситуация возникает, когда уравнение (2) имеет два гладких пересекающихся корня. Это не исключает возможности $\Gamma = \overline{\Omega}$, когда $\varphi$ является двукратным гладким корнем уравнения (2).

Случай пересечения корней вырожденного уравнения в теории сингулярных возмущений часто называют случаем смены устойчивости [2], так как при движении через множество (точку, кривую, поверхность, ...) пересечения каждый из корней меняет тип устойчивости (устойчивый корень становится неустойчивым и наоборот). Устойчивые ветви корней и образуют $\varphi(x)$. При этом условия типа A3 и A4 связаны с необходимостью обеспечить устойчивость корня $\varphi(x)$ в окрестности $\Gamma$, поскольку классическое условие устойчивости $f_u(\varphi(x), x, 0) > 0$ нарушается в этой окрестности.

# 1. Отсутствие решений эллиптической задачи

Условие A3 типично для квадратичной нелинейности, положительный знак $f_{uu}$ выбран для определённости (в противном случае достаточно сделать замену $v = -u$). Более интересна роль условия A4. Если заменить A4 на противоположное ему

**Условие A5.** $f_\varepsilon(\varphi(x_0), x_0, 0) > 0$ *при некотором* $x_0 \in \Gamma \cap \Omega$,

то, как было показано в [2] на примере конкретного уравнения, решение (1) не может иметь асимптотику вида (3) в окрестности точки $x_0$, если вообще существует.

В общем случае существование решения (1), в частности, имеющего асимптотику вида (3), зависит от наличия других корней у вырожденного уравнения и поведения $f(u, x, \varepsilon)$ при $u \to \infty$. Остановимся на случае $N = 1$ и $\Omega = (0, 1)$.

**Условие A6.** *Пусть уравнение* $f(u, x_0, 0) = 0$ *имеет единственный корень* $u = \varphi(x_0)$ *и* $f(u, x, \varepsilon) \geq c_1(u - \varphi(x_0))^2 + c_2\varepsilon$ *при* $u \in \mathbb{R}$, $|x - x_0| \leq c_3\varepsilon^{1/2}$ *и достаточно малых* $\varepsilon$, *где* $c_i > 0$ *— некоторые постоянные.*

Введённое условие согласовано с условиями A1–A3 и A5 в том смысле, что оно следует из них при $|u - \varphi(x_0)| \leq c_4$ с некоторой постоянной $c_4 > 0$. Например, A6 выполнено для $f = (u - \varphi_1(x))(u - \varphi_2(x)) + \varepsilon f_1(x)$, где $\varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0)$ и $f_1(x_0) > 0$.

**Теорема 1.** *Пусть выполнены условия A1–A3, A5 и A6 и* $p > 3/4$, *тогда при достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *задача (1) не имеет решения.*

Требование достаточной малости $\varepsilon$ существенно для факта отсутствия решения задачи (1). При этом результат имеет локальный характер и не зависит от типа применяемых граничных условий.

**Доказательство** теоремы о несуществовании решения основано на методе нелинейной ёмкости, развитом в [5] для исследования отсутствия и разрушения глобальных решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных. В данной работе этот метод впервые применяется для сингулярно возмущенного уравнения в асимптотически малой окрестности точки (локально).

Допустим, что уравнение $\varepsilon^{2p}u_{xx} = f(u, x, \varepsilon)$ имеет классическое решение $u(x, \varepsilon)$. В силу A6 это решение при достаточно малых $\varepsilon > 0$ удовлетворяет неравенству

$$\varepsilon^{2p}u_{xx} \geq c_1(u - \varphi(x_0))^2 + c_2\varepsilon \text{ при } |x - x_0| \leq c_3\varepsilon^{1/2}.$$

Сделав замену $\xi = (x - x_0)/(c_3\varepsilon^{1/2})$ и $v(\xi, \varepsilon) = (u(x, \varepsilon) - \varphi(x_0))/\varepsilon^{1/2}$ в этом неравенстве, получим для функции $v$ неравенство

$$c_3^{-2}\varepsilon^{2p-3/2}v_{\xi\xi} \geq c_1v^2 + c_2 \text{ при } |\xi| \leq 1. \tag{4}$$

Возьмём гладкую функцию $\psi(\xi)$, такую, что $\psi(\xi) > 0$ при $|\xi| < 1$ и $\psi^{(n)}(\pm 1) = 0$ при $n = 0, 1, 2, 3$. Например, возьмём $\psi(\xi) = (1-\xi^2)^4$. Далее умножим обе части дифференциального неравенства (4) на $\psi$ и проинтегрируем по $\xi \in [-1, 1]$, перебросив производные с $v$ на $\psi$ интегрированием по частям:

$$I_\varepsilon(v) := \int_{-1}^{1} c_3^{-2}\varepsilon^{2p-3/2}v(\xi, \varepsilon)\psi''(\xi)\,d\xi \geq \int_{-1}^{1} c_1v^2(\xi, \varepsilon)\psi(\xi)\,d\xi + \int_{-1}^{1} c_2\psi(\xi)\,d\xi. \tag{5}$$

Оценим $I_\varepsilon(v)$ при помощи неравенства Юнга с параметром $s$:

$$ab \le \frac{s}{2}a^2 + \frac{1}{2s}b^2,$$

положив $a = v$, $b = c_3^{-2}\varepsilon^{2p-3/2}\psi''$ и $s = 2c_1\psi$. Имеем

$$I_\varepsilon(v) \le \int\limits_{-1}^{1} c_1 v^2(\xi,\varepsilon)\psi(\xi)\,d\xi + \frac{\varepsilon^{4p-3}}{4c_1c_3^4}\int\limits_{-1}^{1}\frac{[\psi''(\xi)]^2}{\psi(\xi)}\,d\xi,$$

откуда с учётом (5) получаем

$$\varepsilon^{4p-3}\int\limits_{-1}^{1}\frac{[\psi''(\xi)]^2}{\psi(\xi)}\,d\xi \ge 4c_1c_2c_3^4\int\limits_{-1}^{1}\psi(\xi)\,d\xi. \tag{6}$$

В приведенных выкладках все подынтегральные выражения ограничены, так что интегралы определены. Однако неравенство (6) не выполнено при $p > 3/4$ и достаточно малых $\varepsilon$ ввиду того, что входящие в (6) интегралы суть положительные константы. Получаем противоречие с предположением о существовании решения уравнения $\varepsilon^{2p}u_{xx} = f(u,x,\varepsilon)$. Следовательно, задача (1) не имеет решения. ■

Величина $\inf_\psi \int_{-1}^{1}[\psi''(\xi)]^2/\psi(\xi)\,d\xi$ при условии $\int_{-1}^{1}\psi(\xi)\,d\xi = 1$, $\psi(\xi) > 0$ на $(-1,1)$ и $\psi^{(n)}(\pm 1) = 0$ при $n = 0,1,2,3$, даёт наилучшую верхнюю оценку значений $\varepsilon$, при которых решение задачи (1) отсутствует. Эту величину естественно называть *нелинейной ёмкостью*, индуцированной данной нелинейной задачей (см. [5]).

Полученные достаточные условия отсутствия решения дают основание считать найденные ранее условия существования решения с асимптотикой вида (3) близкими к необходимым. При этом условия существования и отсутствия решения имеют следующий наглядный смысл.

При $p > 3/4$ регулярная часть возмущения $\varepsilon f_1 := f(u,x,\varepsilon) - f(u,x,0)$ в некотором смысле доминирует над сингулярной $\varepsilon^{2p}\Delta u$ в окрестности точки $x_0$. Это значит, что при отыскании начальных членов асимптотики решения (1) в этой окрестности вместо вырожденного уравнения (2) правильнее взять «полувырожденное» уравнение $f(u,x,\varepsilon) = 0$, т.е. оставить регулярную часть возмущения. Условия A1, A3, A4 являются достаточными для существования у этого уравнения двух гладких изолированных корней, один из которых устойчив и переходит в $\varphi(x)$ при $\varepsilon \to 0$, а другой определен по крайней мере в некоторой окрестности $\Gamma$, располагаясь ниже первого, но неустойчив и в рассмотрении не участвует. С другой стороны, из условий A1, A3, A5 и A6 следует, что в некоторой асимптотической окрестности точки $(\varphi(x_0), x_0, 0)$ уравнение $f(u,x,\varepsilon) = 0$ не имеет никаких (тем более устойчивых) корней.

## 2. Разрушение решения параболической задачи

Краевую задачу (1) можно рассматривать как стационарную для следующей начально-краевой задачи для параболического уравнения:

$$\begin{gathered} -u_t + \varepsilon^{2p}\Delta u = f(u,x,\varepsilon), \quad x \in \Omega,\ t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(t,x,\varepsilon) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ u(0,x,\varepsilon) = u^0(x), \quad x \in \overline{\Omega}. \end{gathered} \tag{7}$$

В работе [6] для случая $N = 1$ получены достаточные условия на $u^0$, гарантирующие глобальное существование решения задачи (7) при условиях A1–A4 и предельный переход этого решения при $t \to +\infty$ к стационарному решению с асимптотикой (3). Представляет интерес исследовать поведение решения задачи (7) в случае, когда соответствующая ей стационарная задача не имеет решения. Как и в предыдущем разделе, остановимся на случае $N = 1$ и $\Omega = (0, 1)$.

**Теорема 2.** *Пусть выполнены условия A1–A3, A5 и A6 и $p > 3/4$, тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$ задача (7) не имеет глобального решения; решение существует на промежутке $0 < t < T_\varepsilon$, где $T_\varepsilon = O(\varepsilon^{-1/2})$ — время разрушения.*

**Доказательство** теоремы о разрушении решения основано на методе нелинейной параболической ёмкости [5].

Допустим, что уравнение $-u_t + \varepsilon^{2p} u_{xx} = f(u, x, \varepsilon)$ имеет глобальное классическое решение $u(t, x, \varepsilon)$. В силу A6 это решение при достаточно малых $\varepsilon > 0$ удовлетворяет неравенству

$$-u_t + \varepsilon^{2p} u_{xx} \geq c_1 (u - \varphi(x_0))^2 + c_2 \varepsilon \text{ при } |x - x_0| \leq c_3 \varepsilon^{1/2} \text{ и } t > 0.$$

Сделав замену $\xi = (x - x_0)/(c_3 \varepsilon^{1/2})$, $\tau = a \varepsilon^{1/2} t$ и $v(\tau, \xi, \varepsilon) = (u(t, x, \varepsilon) - \varphi(x_0))/\varepsilon^{1/2}$ в этом неравенстве с параметром $a > 0$, получим для функции $v$ неравенство

$$-a v_\tau + c_3^{-2} \varepsilon^{2p-3/2} v_{\xi\xi} \geq c_1 v^2 + c_2 \text{ при } |\xi| \leq 1 \text{ и } 0 < \tau \leq 1. \tag{8}$$

Умножим обе части дифференциального неравенства (8) на функцию $\chi(\tau)\psi(\xi)$, где $\chi(\tau) = \tau^2(1-\tau)^2$ и $\psi(\xi) = (1-\xi^2)^4$, и проинтегрируем по $(\tau, \xi) \in [0, 1] \times [-1, 1]$, перебросив производные с $v$ на $\chi\psi$ интегрированием по частям:

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(v) := \int_0^1 \int_{-1}^1 v(\tau, \xi, \varepsilon) \left[a\chi'(\tau)\psi(\xi) + c_3^{-2}\varepsilon^{2p-3/2}\chi(\tau)\psi''(\xi)\right] d\tau d\xi \geq \\ \geq \int_0^1 \int_{-1}^1 c_1 v^2(\tau, \xi, \varepsilon)\chi(\tau)\psi(\xi)\, d\tau d\xi + \int_0^1 \int_{-1}^1 c_2 \chi(\tau)\psi(\xi)\, d\tau d\xi. \end{aligned} \tag{9}$$

Оценим $J_\varepsilon(v)$ при помощи неравенства Юнга с параметром $s$:

$$ab \leq \frac{s}{2} a^2 + \frac{1}{2s} b^2,$$

положив $a = v$, $b = a\chi'\psi + c_3^{-2}\varepsilon^{2p-3/2}\chi\psi''$ и $s = 2c_1\chi\psi$. Имеем

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(v) \leq \int_0^1 \int_{-1}^1 c_1 v^2(\tau, \xi, \varepsilon)\chi(\tau)\psi(\xi)\, d\tau d\xi + \\ + \frac{1}{4c_1} \int_0^1 \int_{-1}^1 \frac{\left[a\chi'(\tau)\psi(\xi) + c_3^{-2}\varepsilon^{2p-3/2}\chi(\tau)\psi''(\xi)\right]^2}{\chi(\tau)\psi(\xi)}\, d\tau d\xi, \end{aligned}$$

откуда с учётом (9) получаем

$$\int\limits_0^1\int\limits_{-1}^1 \frac{\left[a\chi'(\tau)\psi(\xi)+c_3^{-2}\varepsilon^{2p-3/2}\chi(\tau)\psi''(\xi)\right]^2}{\chi(\tau)\psi(\xi)}\,d\tau d\xi \geq 4c_1c_2\int\limits_0^1\int\limits_{-1}^1 \chi(\tau)\psi(\xi)\,d\tau d\xi$$

или

$$a^2C_1+\varepsilon^{4p-3}C_2 \geq C_3, \tag{10}$$

где $C_i > 0$ — некоторые постоянные, зависящие только от $\chi$, $\psi$ и $c_i$.

Неравенство (10) не выполнено при достаточно малых $\varepsilon$ и $a$ в случае $p > 3/4$. Это противоречит предположению о существовании решения уравнения $-u_t + \varepsilon^{2p}u_{xx} = f(u,x,\varepsilon)$ при $0 < t \leq (a^2\varepsilon)^{-1/2}$, а уж тем более при всех $t > 0$. При этом решение задачи (7) заведомо существует локально, а из полученного противоречия вытекает, что оно разрушается за время $T_\varepsilon = O(\varepsilon^{-1/2})$. ■

Покажем, что найденная асимптотическая оценка времени разрушения решения задачи (7) является неулучшаемой. Рассмотрим случай $f = u^2 - x^2 + 2\varepsilon$ и $\Omega = (-1,1)$, зададим однородные граничные условия и возьмём $u^0(x) = 1$. Согласно методу дифференциальных неравенств [7] решение данной задачи существует при $t \leq (8\varepsilon)^{-1/2}$, так как при этих значениях $t$ функции $\alpha(t,x,\varepsilon) = -4\varepsilon t$ и $\beta(t,x,\varepsilon) = 1$ являются для задачи (7) упорядоченными нижним и верхним решениями. В самом деле, при $-1 \leq x \leq 1$ и $0 \leq t \leq (8\varepsilon)^{-1/2}$ имеем:

$$\begin{gathered}
-\alpha_t + \varepsilon^{2p}\Delta\alpha - f(\alpha,x,\varepsilon) = 4\varepsilon - 16\varepsilon^2t^2 + x^2 - 2\varepsilon \geq 0,\\
-\beta_t + \varepsilon^{2p}\Delta\beta - f(\beta,x,\varepsilon) = -1 + x^2 - 2\varepsilon \leq 0,\\
\alpha_x(t,\pm1,\varepsilon) = \beta_x(t,\pm1,\varepsilon) = 0, \quad \alpha(0,x,\varepsilon) \leq u^0(x) \leq \beta(0,x,\varepsilon).
\end{gathered}$$

Следует отметить, что решение задачи (7) существует асимптотически долгое время, несмотря на отсутствие решений соответствующей стационарной задачи. Численные расчёты показывают, что до момента разрушения решение задачи (7) большую часть времени оказывается близко к корню $\varphi$ вырожденного уравнения. Такое «квазистационарное» поведение решения задачи (7) — новое явление в рассматриваемом классе задач, требующее отдельного изучения.

## Заключение

Существование решения сингулярно возмущённой задачи в случае смены устойчивости зависит от определённого соотношения между регулярной и сингулярной составляющими возмущения. Это может приводить к неверным результатам численных расчётов, когда малое возмущение конкурирует с численной неустойчивостью, что следует учитывать при создании вычислительных алгоритмов для рассматриваемого класса задач. При этом верхнюю границу значений малого параметра, для которых гарантируется отсутствие решения, можно эффективно оценить при помощи нелинейной ёмкости.

# Список литературы / References

[1] Бутузов В. Ф., Терентьев М. А., “О сингулярно возмущенной эллиптической краевой задаче в случае неизолированного корня вырожденного уравнения”, *Матем. заметки*, **78**:1 (2005), 26–36; [Butuzov V. F. & Terentev M. A., “Singular Perturbation Elliptic Boundary-Value Problems in the Case of a Nonisolated Root of the Degenerate Equation”, *Math. Notes*, **78**:1 (2005), 23–32]

[2] Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н., “Сингулярно возмущенная краевая задача для уравнения второго порядка в случае смены устойчивости”, *Матем. заметки*, **63**:3 (1998), 354–362; [Butuzov V. F., Nefedov N. N., “A singularly perturbed boundary value problem for a second-order equation in the case of variation of stability”, *Math. Notes*, **63**:3 (1998), 311–318].

[3] Butuzov V. F., Nefedov N. N., Schneider K. R., “Singularly Perturbed Elliptic Problems in the Case of Exchange of Stabilities”, *Journal of Differential Equations*, **169**:2 (2001), 373–395.

[4] Karali G., Sourdis C., “Radial and bifurcating non-radial solutions for a singular perturbation problem in the case of exchange of stabilities”, *Annales de l’Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis*, **29**:2 (2012), 131–170.

[5] Митидиери Э., Похожаев С. И., “Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных”, Тр. МИАН, **234**, Наука, М., 2001, 3–383; [Mitidieri E., Pokhozhaev S. I., “A priori estimates and blow-up of solutions to nonlinear partial differential equations and inequalities”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **234** (2001), 1–362].

[6] Бутузов В. Ф., “Об устойчивости и области притяжения негладкого в пределе стационарного решения сингулярно возмущенного параболического уравнения”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **46**:3 (2006), 433–444; [Butuzov V. F., “On the stability and domain of attraction of asymptotically nonsmooth stationary solutions to a singularly perturbed parabolic equation”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **46**:3 (2006), 413–424].

[7] Pao C. V., *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations*, Plenum Press, New York/London, 1992.

---

**Terentyev M. A.**, "Absence and Blow-Up of Solutions to Singular Perturbation Problems in the Case of Exchange of Stabilities", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:5 (2016), 587–594.

**DOI:** 10.18255/1818-1015-2016-5-587-594

**Abstract.** We consider some singular perturbation problems in the case where a degenerate equation has intersecting roots (this case is also referred to as ‘ the exchange of stabilities’). Such problems often occur as models in chemical kinetics. There are lots of works that establish the existence and asymptotic behavior of solutions to such problems. Due to exchange of stabilities, a typical solution approaches the non-smooth (but continuous) composite root of the degenerate equation as the perturbation parameter gets smaller. In a number of problems a regular part of the perturbative term dominates the singular one, so an additional condition on the regular part is needed to improve the stability of a composite root in the vicinity of the intersection point. Inversion of that condition results in a loss or a blow-up of the solution for sufficiently small values of the perturbation parameter. We prove some results of this kind by means of the nonlinear capacity argument and discuss their role in developing numerical algorithms for the problems under consideration.

**Keywords:** small parameter, singular perturbation, non-isolated root, exchange of stabilities, nonexistence, blow-up, nonlinear capacity

**On the authors:**
Mikhail A. Terentyev, orcid.org/0000-0003-0006-4314, PhD, senior researcher
Lomonosov Moscow State University,
GSP-1, Leninskie Gory, Moscow 119991, Russian Federation,
e-mail: m.terentyev@physics.msu.ru

**Acknowledgments:**
This work was supported by RFBR, project No. 15-01-04619.