©Тимофеев Е.А., 2016

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-5-595-602

УДК 519.17

Полилогарифмы и асимптотика моментов сингулярной функции Лебега

Тимофеев Е.А.

получена 10 июля 2016

Аннотация.

Напомним, что сингулярная функция Лебега $L(t)$ определяется как единственное решение уравнения

$$L(t) = qL(2t) + pL(2t - 1),$$

где $p, q > 0$, $q = 1 - p$, $p \neq q$.

Моментами функции $L(t)$ будем называть величины

$$M_n = \int_0^1 t^n dL(t), \quad n = 0, 1, \dots$$

Основной результат настоящей работы

$$M_n = n^{\log_2 p} e^{-\tau(n)} (1 + O(n^{-0.99})),$$

где функция $\tau(x)$ является периодической от $\log_2 x$ с периодом 1 и задается как

$$\tau(x) = \frac{1}{2} \ln p + \Gamma'(1) \log_2 p + \frac{1}{\ln 2} \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{Li}_z \left(-\frac{q}{p} \right) \Big|_{z=1} + \frac{1}{\ln 2} \sum_{k \neq 0} \Gamma(z_k) \operatorname{Li}_{z_k+1} \left(-\frac{q}{p} \right) x^{-z_k},$$
$$z_k = \frac{2\pi i k}{\ln 2}, \quad k \neq 0.$$

Доказательство основано на применении пуассонизации и преобразования Меллина.

Ключевые слова: моменты, самоподобие, функция Лебега, сингулярная функция, преобразование Меллина, полилогарифм, асимптотика

Для цитирования: Тимофеев Е.А., "Полилогарифмы и асимптотика моментов сингулярной функции Лебега", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23:5** (2016), 595–602.

Об авторах:

Тимофеев Евгений Александрович, orcid.org/0000-0002-0980-2507, доктор физ.-мат. наук, профессор
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: timofeevEA@gmail.com

Напомним, что сингулярная функция Лебега $L(t)$ является единственным решением уравнения

$$L(t) = qL(2t) + pL(2t - 1), \quad (1)$$

где $p, q > 0$, $q = 1 - p$, $p \neq q$.

Заметим, что при $p = q$ функция $L(t) = t$, $0 \leq t \leq 1$.

Эта функция была введена Ломницким и Уламом [2] в 1934 г. Де Рам [5] показал, что $L(t)$ является единственным непрерывным решением функционального уравнения

$$L(t) = \begin{cases} qL(2t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ q + pL(2t - 1), & 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases} \quad (2)$$

которое является эквивалентной формой уравнения (1). Примеры функций $L(t)$ для различных значений параметра показаны на рис. 1. Сингулярная функция Лебега $L(t)$ является функцией распределения случайной величины ξ :

$$L(t) = Prob\{\xi < t\}.$$

Рис. 1. Сингулярные функции Лебега для $q = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$

Fig. 1. Lebesgue's singular functions for $q = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$

Изучению различных свойств сингулярных распределений на отрезке $[0, 1]$ в последнее время посвящено большое число работ. Полученные результаты находят применение в теории чисел, теории динамических систем.

Моментами функции $L(t)$ будем называть величины

$$M_n = \int_0^1 t^n dL(t), \quad n = 0, 1, \dots \quad (3)$$

В [11] показано, что величины M_n удовлетворяют рекуррентному уравнению

$$M_n = q2^{-n}M_n + p2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} M_k, \quad n = 0, 1, \dots \quad (4)$$

В [11] также найдена асимптотика моментов. В настоящей работе константы асимптотики найдены в явном виде через полилогарифмы.

Теорема 1. *Справедлива оценка*

$$M_n = n^{\log_2 p} e^{-\tau(\log_2 n)} (1 + \mathcal{O}(n^{-0.99})),$$

где

$$\begin{aligned} \tau(x) = \frac{1}{2} \ln p + \Gamma'(1) \log_2 p + \frac{1}{\ln 2} \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{Li}_z \left(-\frac{q}{p} \right) \Big|_{z=1} + \\ + \frac{1}{\ln 2} \sum_{k \neq 0} \Gamma(z_k) \operatorname{Li}_{z_k+1} \left(-\frac{q}{p} \right) x^{-z_k}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$z_k = \frac{2\pi i k}{\ln 2}, \quad k \neq 0. \quad (6)$$

Доказательство. Приведем доказательство теоремы, которое основано на применении пуассонизации и преобразования Меллина.

Введем функцию $M(x)$, положив

$$M(x) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n \frac{x^n}{n!} e^{-x}. \quad (7)$$

Подставляя (4) в (7), получим

$$\begin{aligned} M(x) = \\ = q \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} M_n \frac{x^n}{n!} e^{-x} + p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} e^{-x} 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} M_k = \\ = qM(x/2)e^{-x/2} + pM(x/2). \end{aligned} \quad (8)$$

Отсюда и из условия $M_0 = 1$, получаем

$$M(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(p + qe^{-2^{-k}x} \right). \quad (9)$$

Отметим, что при $p = q$ имеем

$$M(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x}.$$

Введем вспомогательную функцию $G(x)$, положив

$$G(x) = \ln M(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(p + qe^{-2^{-k}x} \right). \quad (10)$$

Для нахождения функции $G(x)$ применим преобразование Меллина

$$\tilde{G}(z) = \int_0^{\infty} G(x)x^{z-1}dx, \quad (11)$$

в результате получим

$$\tilde{G}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{kz} \int_0^{\infty} x^{z-1} \ln(p + qe^{-x}) dx.$$

В полосе

$$-1 < \Re z < 0$$

ряд сходится, а интеграл можно проинтегрировать по частям

$$\tilde{G}(z) = \frac{2^z}{1 - 2^z} \frac{q}{pz} \int_0^{\infty} \frac{x^z}{q/p + e^x} dx.$$

Последний интеграл вычисляется через гамма-функцию и полилогарифм $\text{Li}_z(w)$, для которого справедливо интегральное представление [9]

$$\text{Li}_z(w) = \frac{w}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} \frac{x^{z-1}}{e^x - w} dx$$

в области $\Re z > 0$, $w \in \mathbb{C} \setminus [1, \infty]$.

Поэтому в полосе $-1 < \Re z < 0$ имеем

$$\tilde{G}(z) = -\frac{2^z}{1 - 2^z} \Gamma(z) \text{Li}_{z+1} \left(-\frac{q}{p} \right). \quad (12)$$

Функцию $\tilde{G}(z)$ можно продолжить на всю комплексную полуплоскость $\Re z > -1$, в которой она будет иметь полюса:

- 1) простые — в точках $z = z_k$, от функции $\frac{1}{1-2^z}$, где z_k определено в (6);
- 2) двойной — в точке $z = 0$, от функций $\Gamma(z)$ и $\frac{1}{1-2^z}$.

Отметим, что при $p = q$ точки z_k не являются полюсами, поскольку [8, 9.522.2]

$$\text{Li}_{z+1}(-1) = (2^{-z} - 1)\zeta(z + 1),$$

где $\zeta(z)$ — дзета-функция Римана. Следовательно,

$$\tilde{G}(z) = -\Gamma(z)\zeta(z + 1).$$

Применяя обратное преобразование Меллина, получим

$$G(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} \tilde{G}(z)x^{-z} dz, \quad (13)$$

где $0 < \sigma < 1$.

Для нахождения $G(x)$ по формуле (13) применим теорему о вычетах для правой полуплоскости $\Re z > -\sigma$, где $0 < \sigma < 1$. Отметим, что интеграл в (13) берется по часовой стрелке.

Поэтому

$$G(x) \approx -\operatorname{Res} \left(\tilde{G}(z)x^{-z}, 0 \right) - \sum_{k \neq 0} \operatorname{Res} \left(\tilde{G}(z)x^{-z}, z_k \right).$$

Найдем вычеты функции $\tilde{G}(z)x^{-z}$.

Для функции $\frac{P(z)}{zQ(z)}$, $P(0) \neq 0$, $Q(0) = 0$, $Q'(0) \neq 0$, вычет в точке $z = 0$ находится по формуле

$$\operatorname{Res} \left(\frac{P(z)}{zQ(z)}, 0 \right) = \frac{P'(0)}{Q'(0)} - \frac{P(0)Q''(0)}{2Q'(0)^2}.$$

Применим эту формулу с

$$P(z) = -2^z \Gamma(z+1) x^{-z} \operatorname{Li}_{z+1} \left(-\frac{q}{p} \right),$$

$$Q(z) = 1 - 2^z.$$

Поскольку $\operatorname{Li}_1(w) = -\ln(1-w)$ [3] имеем

$$P(0) = -\ln p,$$

$$P'(0) = \ln x \ln p - \ln 2 \ln p - \Gamma'(1) \ln p - \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{Li}_z \left(-\frac{q}{p} \right) \Big|_{z=1},$$

$$Q'(0) = -\ln 2, \quad Q''(0) = -\ln^2 2.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Res} \left(\tilde{G}(z)x^{-z}, 0 \right) = -\log_2 p \ln x + \frac{1}{2} \ln p + \Gamma'(1) \log_2 p + \frac{1}{\ln 2} \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{Li}_z \left(-\frac{q}{p} \right) \Big|_{z=1}.$$

В остальных полюсах

$$\operatorname{Res} \left(\tilde{G}(z)x^{-z}, z_k \right) = \frac{1}{\ln 2} \Gamma(z_k) \operatorname{Li}_{z_k+1} \left(-\frac{q}{p} \right) x^{-z_k}.$$

Гамма-функция экспоненциально быстро убывает при $\Im z \rightarrow \pm\infty$ [8]. Остальные функции имеют не более чем степенной рост на горизонтальных отрезках

$$\Im z = \frac{2\pi i k + \pi i}{\ln 2}, \quad \sigma \leq \Re z \leq \gamma;$$

между полюсами z_k . Поэтому можно применить теорему 4 и следствие 1 из работы [6], из которых получим асимптотику $G(x)$ при $x \rightarrow \infty$ в следующем виде

$$G(x) = -\operatorname{Res} \left(\tilde{G}(z)x^{-z}, 0 \right) - \sum_{k \neq 0} \operatorname{Res} \left(\tilde{G}(z)x^{-z}, z_k \right) + \mathcal{O}(x^{-\gamma}),$$

для любого $\gamma > 0$.

Подставляя найденные вычеты и применяя обозначение функции τ , определенной в (5), получим

$$G(x) = \log_2 p \ln x - \tau(x) + \mathcal{O}(x^{-\gamma}), \quad (14)$$

для любого $\gamma > 0$.

Из (14) и (10) получаем асимптотику функции $M(x)$ при $x \rightarrow \infty$

$$M(x) = x^{\log_2 p} e^{-\tau(x)} + \mathcal{O}(x^{-\gamma}),$$

где функция τ определена в (5).

Поскольку величина $M(x)$ получена усреднением величин M_n (пуассонизацией) и удовлетворяет рекуррентному уравнению (9), то для нахождения величин M_n можно применить теорему 10.5 из [7]. Условия этой теоремы состоят в нахождении числа β , для которого верны следующие два неравенства для достаточно больших по модулю чисел $z = x + iy$:

$$|p + qe^{-z/2}| 2^{-\beta} \leq 1 - \eta;$$

в конусе $S_\theta = \{z : |\Im z| \leq \theta \Re z\}$, где $0 < \eta < 1$, $0 < \theta$ – некоторые константы;

$$|p + qe^{-z/2}| e^{x/2} \leq e^{\alpha|z|/2};$$

вне конуса S_θ , где $\alpha < 1$ – некоторая константа.

Нетрудно видеть, что первое неравенство выполняется при любом $\beta > \log_2 p$ и любом $\theta > 0$. Второе неравенство выполняется при любом $\theta < 1$.

Следовательно, теорема 10.5 из [7] применима и выполняется оценка

$$M_n = M(n) (1 + \mathcal{O}(n^{-0.99}))$$

при $\beta = \log_2 p + 0.01$. □

Список литературы / References

- [1] Flajolet P., Sedgewick R., *Analytic Combinatorics*, Cambridge University Press, 2008.
- [2] Lomnicki Z., Ulam S.E., “Sur la theorie de la mesure dans les espaces combinatoires et son application au calcul des probabilites. I. Variables independantes”, *Fundamenta Mathematicae*, **23**:1 (1934), 237–278.
- [3] *NIST Handbook of Mathematical Functions*, ed. Olver F.W.J., Cambridge University Press, 2010.
- [4] Salem R., “On some singular monotonic functions which are strictly increasing”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **53**:3 (1943), 427–439.
- [5] De Rham G., “On Some Curves Defined by Functional Equations”, *Classics on Fractals*, ed. Gerald A. Edgar, Addison-Wesley, 1993, 285–298.
- [6] Flajolet P., Gourdon X., Dumas P., “Mellin transforms and asymptotics: Harmonic sums”, *Theoretical Computer Science*, **144**:1–2 (1995), 3–58.
- [7] Szpankowski W., *Average Case Analysis of Algorithms on Sequences*, John Wiley & Sons, New York, 2001.
- [8] Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M., *Table of integrals, Series, and Products*, Academic Press, 1994.
- [9] Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I., *Integrals and Series, More Special Functions*, **3**, Gordon & Breach Sci., New York, 1990.
- [10] Timofeev E. A., “Bias of a nonparametric entropy estimator for Markov measures”, *Journal of Mathematical Sciences*, **176**:2 (2011), 255–269.
- [11] Тимофеев Е. А., “Асимптотика моментов сингулярной функции Лебега”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **22**:5 (2015), 723–730; [Timofeev E. A., “Asymptotic Formula for the Moments of Lebesgue’s Singular Function”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **22**:5 (2015), 723–730, (in Russian).]

Timofeev E. A., "Polylogarithms and the Asymptotic Formula for the Moments of Lebesgue’s Singular Function", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:5 (2016), 595–602.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-5-595-602

Abstract. Recall the Lebesgue’s singular function. We define a Lebesgue’s singular function $L(t)$ as the unique continuous solution of the functional equation

$$L(t) = qL(2t) + pL(2t - 1),$$

where $p, q > 0$, $q = 1 - p$, $p \neq q$. The moments of Lebesgue’ singular function are defined as

$$M_n = \int_0^1 t^n dL(t), \quad n = 0, 1, \dots$$

The main result of this paper is

$$M_n = n^{\log_2 p} e^{-\tau(n)} (1 + \mathcal{O}(n^{-0.99})),$$

where

$$\tau(x) = \frac{1}{2} \ln p + \Gamma'(1) \log_2 p + \frac{1}{\ln 2} \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{Li}_z \left(-\frac{q}{p} \right) \Big|_{z=1} + \frac{1}{\ln 2} \sum_{k \neq 0} \Gamma(z_k) \operatorname{Li}_{z_k+1} \left(-\frac{q}{p} \right) x^{-z_k},$$

$$z_k = \frac{2\pi i k}{\ln 2}, \quad k \neq 0.$$

The proof is based on analytic techniques such as the poissonization and the Mellin transform.

Keywords: moments, self-similar, Lebesgue's function, singular, Mellin transform, polylogarithm, asymptotic

On the authors:

Evgeniy A. Timofeev, orcid.org/0000-0002-0980-2507, ScD, professor

P.G. Demidov Yaroslavl State University,

14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: timofeevEA@gmail.com