

©Невский М. В., Ухалов А. Ю., 2016

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-5-603-619

УДК 514.17+517.51+519.6

## О числовых характеристиках симплекса и их оценках

Невский М. В. , Ухалов А. Ю.

получена 7 июля 2016

**Аннотация.** Пусть  $n \in \mathbb{N}$ ,  $Q_n = [0, 1]^n$  —  $n$ -мерный единичный куб. Для невырожденного симплекса  $S \subset \mathbb{R}^n$  через  $\sigma S$  обозначим образ  $S$  при гомотетии относительно центра тяжести  $S$  с коэффициентом гомотетии  $\sigma$ . В работе рассматриваются следующие числовые характеристики симплекса. Обозначим через  $\xi(S)$  минимальное  $\sigma > 0$ , такое что  $Q_n \subset \sigma S$ . Через  $\alpha(S)$  обозначим минимальное  $\sigma > 0$ , при котором  $Q_n$  принадлежит трансляту симплекса  $\sigma S$ . Пусть  $d_i(S)$  —  $i$ -й осевой диаметр  $S$ , т. е. максимальная длина отрезка, принадлежащего  $S$  и параллельного  $i$ -й координатной оси. Применяются формулы для вычисления  $\xi(S)$ ,  $\alpha(S)$ ,  $d_i(S)$ , полученные ранее первым автором. В статье рассматривается случай  $S \subset Q_n$ .

Пусть  $\xi_n = \min\{\xi(S) : S \subset Q_n\}$ . В работах первого автора была сформулирована гипотеза: если  $\xi(S) = \xi_n$ , то  $\alpha(S) = \xi(S)$ . Это утверждение было доказано им для  $n = 2$  и случая, когда  $n + 1$  — число Адамара, т. е. существует матрица Адамара порядка  $n + 1$ . Более сильным утверждением является следующая гипотеза: для любого  $n$  существует константа  $\gamma \geq 1$ , не зависящая от  $S \subset Q_n$ , с которой выполняется неравенство  $\xi(S) - \alpha(S) \leq \gamma(\xi(S) - \xi_n)$ . Минимальное  $\gamma$  с этим свойством обозначается через  $\varkappa_n$ . Если  $n + 1$  — число Адамара, то точное значение  $\varkappa_n$  равно 1. Существование  $\varkappa_n$  для других  $n$  было неясным. В работе с помощью компьютерных методов устанавливается, что

$$\varkappa_2 = \frac{5 + 2\sqrt{5}}{3} = 3.1573\dots$$

Доказывается новая оценка

$$\xi_4 \leq \frac{19 + 5\sqrt{13}}{9} = 4.1141\dots,$$

улучшающая прежний результат  $\xi_4 \leq \frac{13}{3} = 4.33\dots$  Высказывается предположение, что  $\xi_4$  в точности равно  $\frac{19 + 5\sqrt{13}}{9}$ . Использование этого значения в компьютерных вычислениях даёт значение

$$\varkappa_4 = \frac{4 + \sqrt{13}}{5} = 1.5211\dots$$

Пусть  $\theta_n$  — минимальная величина нормы интерполяционного проектора на пространство линейных функций  $n$  переменных как оператора из  $C(Q_n)$  в  $C(Q_n)$ . Известно, что при любом  $n$

$$\xi_n \leq \frac{n+1}{2} (\theta_n - 1) + 1,$$

причём для  $n = 1, 2, 3, 7$  в этом соотношении достигается равенство. Применение компьютера даёт результат  $\theta_4 = \frac{7}{3}$ . Отсюда следует, что минимальное значение  $n$ , при котором в последнем соотношении выполняется строгое неравенство, равно 4.

**Ключевые слова:** симплекс, куб, коэффициент гомотетии, осевой диаметр, линейная интерполяция, проектор, норма, численные методы

**Для цитирования:** Невский М. В., Ухалов А. Ю., "О числовых характеристиках симплекса и их оценках", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:5 (2016), 603–619.

**Об авторах:**

Невский Михаил Викторович, orcid.org/0000-0002-6392-7618, доктор физ.-мат. наук, доцент, Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: mnevsk55@yandex.ru

Ухалов Алексей Юрьевич, orcid.org/0000-0001-6551-5118, кандидат физ.-мат. наук, Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: alex-uhalov@yandex.ru

## Введение

Сначала приведём основные обозначения. Всюду далее  $n \in \mathbb{N}$ . Элемент  $x \in \mathbb{R}^n$  будем записывать в виде  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Положим  $Q_n := [0, 1]^n$ .

Для выпуклого тела  $C \subset \mathbb{R}^n$  через  $\sigma C$  обозначим результат гомотетии  $C$  относительно центра тяжести с коэффициентом  $\sigma$ . Под гомотетом выпуклого тела понимается результат его гомотетии с центром в некоторой точке. Под транслятом понимается результат параллельного переноса. Таким образом, транслят выпуклого тела  $C$  имеет вид  $C' = C + x$ , где  $x \in \mathbb{R}^n$ . Если  $C$  — выпуклый многогранник, то  $\text{ver}(C)$  обозначает совокупность вершин  $C$ . Будем говорить, что  $n$ -мерный симплекс  $S$  описан вокруг выпуклого тела  $C$ , если  $C \subset S$  и каждая  $(n-1)$ -мерная грань  $S$  содержит точку  $C$ . Выпуклый многогранник вписан в  $C$ , если любая его вершина принадлежит границе  $C$ .

Для выпуклого тела  $C \subset \mathbb{R}^n$  обозначим через  $d_i(C)$  максимальную длину отрезка, содержащегося в  $C$  и параллельного оси  $x_i$ . Величину  $d_i(C)$  будем называть  $i$ -м осевым диаметром  $C$ . Понятие осевого (или аксиального) диаметра было введено П. Скоттом [11], [12].

Для симплекса  $S$  и выпуклого тела  $C$  введём величину

$$\xi(C; S) := \min\{\sigma \geq 1 : C \subset \sigma S\}.$$

Положим  $\xi(S) := \xi(Q_n; S)$ . Заметим, что равенство  $\xi(C; S) = 1$  эквивалентно включению  $C \subset S$ . Для выпуклых тел  $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^n$  обозначим через  $\alpha(C_1; C_2)$  минимальное  $\sigma > 0$ , для которого  $C_1$  принадлежит трансляту  $\sigma C_2$ , т. е. гомотету с коэффициентом  $\sigma$  выпуклого тела  $C_2$ . Положим  $\alpha(C) := \alpha(Q_n; C)$ . В настоящей статье мы остановимся на вычислении величин  $\xi(S)$  и  $\alpha(S)$  для симплексов  $S \subset Q_n$ . Введём в рассмотрение величину

$$\xi_n := \min\{\xi(S) : S \text{ — } n\text{-мерный симплекс, } S \subset Q_n, \text{vol}(S) \neq 0\}.$$

Через  $C(Q_n)$  обозначается совокупность непрерывных функций  $f : C(Q_n) \rightarrow \mathbb{R}$  с равномерной нормой  $\|f\|_{C(Q_n)} := \max_{x \in Q_n} |f(x)|$ . Под  $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$  понимается совокупность многочленов от  $n$  переменных степени  $\leq 1$ , или линейных функций, т. е. линейная оболочка  $1, x_1, \dots, x_n$ .

Запись  $L(n) \asymp M(n)$  означает, что существуют такие константы  $c_1, c_2 > 0$ , не зависящие от  $n$ , с которыми выполняется  $c_1 M(n) \leq L(n) \leq c_2 M(n)$ .

Числовым характеристикам  $n$ -мерных выпуклых тел, и в первую очередь симплексов и параллелепипедов, а также приложениям этих характеристик к задачам полиномиальной интерполяции, посвящен цикл статей первого автора. Многие результаты систематизированы в его монографии [7], содержащей также доказательства основных утверждений и подробные ссылки.

## 1. Числовые характеристики $n$ -мерного симплекса и линейная интерполяция

Пусть  $S$  — невырожденный симплекс в  $\mathbb{R}^n$ . Обозначим вершины  $S$  через  $x^{(j)} = (x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)})$ ,  $1 \leq j \leq n+1$ , и рассмотрим матрицу

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n+1)} & \dots & x_n^{(n+1)} & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть  $\Delta := \det(\mathbf{A})$ , тогда  $\text{vol}(S) = \frac{|\Delta|}{n!}$ . Обозначим через  $\Delta_j(x)$  определитель, который получается из  $\Delta$  заменой  $j$ -й строки на строку  $(x_1, \dots, x_n, 1)$ . Многочлены  $\lambda_j(x) := \frac{\Delta_j(x)}{\Delta}$  из  $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$  обладают свойством  $\lambda_j(x^{(k)}) = \delta_j^k$ , где  $\delta_j^k$  — символ Кронекера. Коэффициенты  $\lambda_j$  составляют  $j$ -й столбец  $\mathbf{A}^{-1}$ . В дальнейшем полагаем  $\mathbf{A}^{-1} = (l_{ij})$ , т. е.  $\lambda_j(x) = l_{1j}x_1 + \dots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j}$ .

Любой многочлен  $p \in \Pi_1(\mathbb{R}^n)$  удовлетворяет равенству

$$p(x) = \sum_{j=1}^{n+1} p(x^{(j)}) \lambda_j(x).$$

Поэтому мы называем  $\lambda_j$  базисными многочленами Лагранжа, соответствующими  $S$ . Взяв последовательно  $p(x) = x_1, \dots, x_n, 1$ , получим

$$\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x) x^{(j)} = x, \quad \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x) = 1.$$

Тем самым, числа  $\lambda_j(x)$  являются барицентрическими координатами точки  $x \in \mathbb{R}^n$  относительно  $S$ . Симплекс  $S$  задаётся каждой из систем неравенств  $\lambda_j(x) \geq 0$  и  $0 \leq \lambda_j(x) \leq 1$ .

В [4] доказано, что для  $i$ -го осевого диаметра  $S$  выполняется равенство

$$\frac{1}{d_i(S)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|. \quad (1)$$

В  $S$  существует ровно один отрезок длины  $d_i(S)$ , параллельный оси  $x_i$ . Центр этого отрезка совпадает с точкой

$$y^{(i)} = \sum_{j=1}^{n+1} m_{ij} x^{(j)}, \quad m_{ij} := \frac{|l_{ij}|}{\sum_{k=1}^{n+1} |l_{ik}|}.$$

Каждая  $(n - 1)$ -мерная грань  $S$  содержит по крайней мере один из концов указанного отрезка. Эти результаты обобщаются на максимальный в симплексе отрезок, параллельный произвольному вектору  $v \neq 0$ . В [8] получены формулы для длины и концов этого отрезка через координаты вершин симплекса  $S$  и вектора  $v$ . Указанное расположение максимального отрезка в  $S$  является его характеристическим свойством, эквивалентным формулам для концов отрезка.

Из (1) и свойств  $l_{ij}$  (см. [7; гл. 1]) вытекает, что величина  $d_i(S)^{-1}$  равна сумме положительных элементов  $i$ -й строки  $\mathbf{A}^{-1}$  и одновременно равна сумме модулей отрицательных элементов этой строки.

Приведём формулы для вычисления введённых выше геометрических характеристик, связанных с гомотетией. Пусть  $S$  — невырожденный симплекс,  $C$  — выпуклое тело в  $\mathbb{R}^n$ . В [7; § 1.3] установлено, что если  $C \not\subset S$ , то

$$\xi(C; S) = (n + 1) \max_{1 \leq k \leq n+1} \max_{x \in C} (-\lambda_k(x)) + 1. \quad (2)$$

Соотношение

$$\max_{x \in C} (-\lambda_1(x)) = \dots = \max_{x \in C} (-\lambda_{n+1}(x)) \quad (3)$$

эквивалентно тому, что симплекс  $\xi(S)S$  описан вокруг  $C$ . В случае  $C = Q_n$  равенство (2) приводится к виду

$$\xi(S) = (n + 1) \max_{1 \leq k \leq n+1} \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_k(x)) + 1, \quad (4)$$

а (3) сводится к соотношению

$$\max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_1(x)) = \dots = \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_{n+1}(x)). \quad (5)$$

Для произвольного выпуклого тела  $C$  и невырожденного симплекса  $S$  из  $\mathbb{R}^n$  в [7; п. 1.4] доказано равенство

$$\alpha(C; S) = \sum_{j=1}^{n+1} \max_{x \in C} (-\lambda_j(x)) + 1. \quad (6)$$

В случае  $C = Q_n$  (6) эквивалентно соотношению

$$\alpha(S) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)}. \quad (7)$$

Красивое равенство (7), связывающее  $\alpha(S)$  с осевыми диаметрами  $S$ , впервые было получено в статье [6]. Оно имеет ряд интересных следствий. Приведём здесь формулу для вычисления  $\alpha(S)$  через коэффициенты многочленов  $\lambda_j$ :

$$\alpha(S) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|. \quad (8)$$

Из (8) и свойств коэффициентов  $l_{ij}$  вытекает, что величина  $\alpha(S)$  равна сумме положительных элементов верхних  $n$  строк матрицы  $\mathbf{A}^{-1}$  и одновременно равна сумме модулей отрицательных элементов этих строк.

Пусть  $x^{(j)} \in Q_n$  — вершины невырожденного симплекса  $S$ . Интерполяционный проектор  $P : C(Q_n) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$  по системе узлов  $x^{(j)}$  определяется с помощью равенств  $Pf(x^{(j)}) = f(x^{(j)})$ ,  $1 \leq j \leq n+1$ . Имеет место аналог интерполяционной формулы Лагранжа:

$$Pf(x) = \sum_{j=1}^{n+1} f(x^{(j)}) \lambda_j(x).$$

Норма проектора  $P$  как оператора из  $C(Q_n)$  в  $C(Q_n)$  вычисляется по формуле

$$\|P\| = \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)|.$$

Обозначим через  $\theta_n$  минимальную величину  $\|P\|$ .

Пусть  $1 \leq \mu \leq n$ . Будем говорить, что точка  $x \in \text{ver}(Q_n)$  является  $\mu$ -вершиной  $Q_n$  относительно симплекса  $S \subset Q_n$ , если для интерполяционного проектора  $P : C(Q_n) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$  с узлами в вершинах  $S$  выполняется равенство  $\|P\| = \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)|$  и среди чисел  $\lambda_j(x)$  имеется ровно  $\mu$  отрицательных. В [5] доказано, что для любого проектора  $P$  и соответствующего ему симплекса  $S$  справедливы соотношения

$$\frac{n+1}{2n} (\|P\| - 1) + 1 \leq \xi(S) \leq \frac{n+1}{2} (\|P\| - 1) + 1. \quad (9)$$

Правое равенство в (9) имеет место тогда и только тогда, когда существует 1-вершина  $Q_n$  относительно  $S$ . Если для некоторого  $\mu$  имеется  $\mu$ -вершина  $Q_n$  относительно  $S$ , то

$$\frac{n+1}{2\mu} (\|P\| - 1) + 1 \leq \xi(S).$$

Из (9) следует, что для любого  $n$

$$\frac{n+1}{2n} (\theta_n - 1) + 1 \leq \xi_n \leq \frac{n+1}{2} (\theta_n - 1) + 1. \quad (10)$$

По поводу анализа и обобщений соотношений (9), (10) см. [3], [5], [7]. Из приводимых ниже асимптотических соотношений для  $\xi_n$  и  $\theta_n$  следует, что начиная с некоторого  $n$  правое неравенство в (10) является строгим. В [3] показано, что это имеет место хотя бы для  $n \geq 57$ . (Эта граница, по-видимому, сильно завышена.) Однако для  $n = 1, 2, 3, 7$  правое неравенство в (10) обращается в равенство, т. е. для этих  $n$

$$\xi_n = \frac{n+1}{2} (\theta_n - 1) + 1.$$

Минимальное  $n$ , при котором справедливость этого равенства не ясна, было равно 4. Ниже мы приведём вычислительные аргументы, в соответствии с которыми при  $n = 4$  правое неравенство в (10) является строгим.

Если  $S \subset Q_n$ , то  $d_i(S) \leq 1$ . Применяя (7), имеем

$$\xi(S) \geq \alpha(S) \geq n. \quad (11)$$

Поэтому из (9) и (10) получается

$$\xi_n \geq n, \quad \theta_n \geq 3 - \frac{4}{n+1}, \quad (12)$$

$$\|P\| \geq \frac{2}{n+1} \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)} - 1 \right) + 1. \quad (13)$$

Равенство в (13) достигается тогда и только тогда, когда существует 1-вершина  $Q_n$  относительно  $S$  и выполняется соотношение (5), эквивалентное тому, что симплекс  $\xi(S)S$  описан вокруг  $Q_n$ .

К 2009 г. первым автором было установлено, что

$$\begin{aligned} \theta_1 = 1, \quad \theta_2 = \frac{2\sqrt{5}}{5} + 1 = 1.89\dots, \quad \theta_3 = 2, \quad 2.2 \leq \theta_4 \leq \frac{7}{3} = 2.33\dots, \\ \frac{7}{3} = 2.33\dots \leq \theta_5 \leq 2.6, \quad \frac{17}{7} = 2.42\dots \leq \theta_6 \leq 3, \quad \theta_7 = 2.5; \\ \xi_1 = 1, \quad \xi_2 = \frac{3\sqrt{5}}{5} + 1 = 2.34\dots, \quad \xi_3 = 3, \quad 4 \leq \xi_4 \leq \frac{13}{3} = 4.33\dots, \\ 5 \leq \xi_5 \leq 5.5, \quad 6 \leq \xi_6 \leq 6.6, \quad \xi_7 = 7. \end{aligned}$$

Доказаны асимптотические соотношения  $\theta_n \asymp n^{1/2}$ ,  $\xi_n \asymp n$ . Из многочисленных оценок, систематизированных в [7], отметим следующие:

$$n \leq \xi_n \leq \frac{n^2 - 3}{n - 1} \quad (n > 2); \quad (14)$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{n} < \theta_n < 3\sqrt{n}.$$

Если  $S$  — симплекс максимального объёма в  $Q_n$ ,  $P$  — интерполяционный проектор с узлами в вершинах  $S$ , то  $\|P\| \asymp \theta_n$ ,  $\xi(S) \asymp \xi_n$ .

Заметим, что верхняя граница в (15) получается из рассмотрения симплекса  $S^*$  с вершинами  $(0, 1, \dots, 1), (1, 0, \dots, 1), \dots, (1, 1, \dots, 0), (0, 0, \dots, 0)$  (см. [5], [7; § 3.2]). При  $n > 2$  верно  $\xi(S^*) = \frac{n^2-3}{n-1}$ , откуда и следует правая оценка в (14). При  $n \geq 3$  симплекс  $S^*$  обладает следующим свойством, отмеченным в [9; лемма 3.3]: замена любой вершины  $S^*$  на любую точку  $Q_n$  уменьшает объём симплекса. При  $n = 2, 3, 4$  (и только в этих случаях)  $S^*$  является симплексом максимального объёма в  $Q_n$ . Если  $n \geq 2$ , то  $d_i(S^*) = 1$ , поэтому  $\alpha(S^*) = n$ . Таким образом,  $\alpha(S^*) < \xi(S^*)$ .

Если  $n + 1$  — число Адамара, т.е. существует матрица Адамара порядка  $n + 1$ , то  $\xi_n = n$ . Для таких (и только таких  $n$ ) существует правильный симплекс  $S$ , вписанный в  $Q_n$  так, что его вершины находятся в вершинах  $Q_n$  ([9; теорема 4.5]). Как отмечено в [5],  $\xi(S) = n$ , поэтому из (11) получается  $\alpha(S) = n$  и  $d_i(S) = 1$ . Последние равенства следуют также из того, что  $S$  имеет максимальный объём в  $Q_n$ , поскольку все осевые диаметры такого симплекса равны 1. Это интересное свойство симплексов максимального объёма в  $Q_n$ , установленное М. Лассаком [10], может быть выведено из (7). См. подробнее [6], [7].

## 2. Две гипотезы о величинах $\xi(S)$ и $\alpha(S)$

Приведём две гипотезы о числовых характеристиках симплекса, которые были сформулированы в [7; п. 3.10] (в эквивалентном виде эти гипотезы были высказаны в [5]).

(Н1) Пусть  $S \subset Q_n$  — невырожденный  $n$ -мерный симплекс. Если  $\xi(S) = \xi_n$ , то  $\xi(S) = \alpha(S)$ .

(Н2) Для любого  $n$  существует константа  $\varkappa_n \geq 1$  такая, что если  $S \subset Q_n$ , то

$$\xi(S) - \alpha(S) \leq \varkappa_n (\xi(S) - \xi_n). \quad (15)$$

Здесь и далее  $\varkappa_n$  обозначает наименьшую константу  $\geq 1$ , стоящую в (15).

Очевидно, для любого симплекса  $S$  верно  $\xi(S) \geq \alpha(S)$ . Равенство  $\alpha(S) = \xi(S)$  выполняется тогда и только тогда, когда каждая  $(n-1)$ -мерная грань симплекса  $\xi(S)S$  содержит вершину  $Q_n$ . Таким образом, предложение (Н1) эквивалентно следующему: если  $S \subset Q_n$  и  $\xi(S) = \xi_n$ , то каждая  $(n-1)$ -мерная грань симплекса  $\xi(S)S$  содержит вершину  $Q_n$ . Далее, любые два невырожденных параллелепипеда в  $\mathbb{R}^n$  связаны аффинным преобразованием. Каждое такое преобразование переводит симплекс в симплекс. Поэтому последнее утверждение эквивалентно такому. Пусть  $S$  — симплекс,  $D$  — параллелепипед в  $\mathbb{R}^n$  и для некоторого  $\sigma > 0$  верны включения  $S \subset D \subset \sigma S$ . Предположим, что некоторая  $(n-1)$ -мерная грань  $\sigma S$  не содержит вершин  $D$ . Тогда существует параллелепипед  $D'$ , для которого  $S \subset D' \subset \sigma S$  и каждая вершина которого является внутренней точкой симплекса  $\sigma S$ .

Для  $n = 1, 2, 3$  в работах первого автора (см. [7; гл. 1]) было дано полное описание симплексов с условием  $\xi(S) = \xi_n$ . Для каждого из них выполняется  $\xi(S) = \alpha(S)$ . Если  $n+1$  — число Адамара (сюда включаются случаи  $n = 1$  и  $n = 3$ ), то  $\xi_n = n$ . В силу соотношения (12) условие  $\xi(S) = \xi_n = n$  сразу даёт  $\xi(S) = \alpha(S)$ . Поэтому утверждение гипотезы (Н1) выполняется по крайней мере для  $n = 2$  и случая, когда  $n+1$  есть число Адамара. На взгляд авторов, представляют интерес уже двумерный и трёхмерный варианты (Н1) в указанной эквивалентной формулировке.

Утверждение гипотезы (Н2) равносильно свойству

$$\sup_{S \subset Q_n} \frac{\xi(S) - \alpha(S)}{\xi(S) - \xi_n} < \infty. \quad (16)$$

Точная верхняя грань в (16) берётся по совокупности невырожденных симплексов  $S$ , содержащихся в  $Q_n$  и таких, что  $\xi(S) \neq \xi_n$ .

Если  $\xi(S) = \xi_n$ , то из (15) сразу получаем  $\xi(S) = \alpha(S)$ . Поэтому для доказательства (Н1) достаточно установить (Н2). В ситуации, когда  $n+1$  — число Адамара, для любого симплекса  $S \subset Q_n$

$$\xi_n = n \leq \alpha(S) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)} \leq \xi(S),$$

следовательно, (15) выполняется с неухудшаемой константой  $\varkappa_n = 1$ . Равенство в (15) эквивалентно условию  $\alpha(S) = n$ , т. е.  $d_1(S) = \dots = d_n(S) = 1$ .

Итак,  $\kappa_1 = \kappa_3 = 1$ . Существуют ли отличные от 1 числа  $\kappa_n$ ? Ответ на этот вопрос следует искать, начиная со случая  $n = 2$ . Отметим, что в случае существования  $\kappa_2$  выполняется неравенство

$$\kappa_2 \geq \frac{5 + 2\sqrt{5}}{3} = 3.1573 \dots \quad (17)$$

Достаточно учесть, что  $\xi_2 = 1 + \frac{3\sqrt{5}}{5}$ , и рассмотреть в качестве  $S$  треугольник с вершинами  $(1, 0)$ ,  $(\frac{1}{2}, 1)$ ,  $(0, 0)$ . Вычисления по формулам п. 2 дают  $\xi(S) = 2.5$ ,  $d_1(S) = d_2(S) = 1$ ,  $\alpha(S) = 2$ , откуда и следует (17).

В [5] было высказано предположение, что  $\kappa_2$  в точности равно правой части (17). Применение компьютера убеждает в том, что это действительно так. В следующем пункте мы опишем соответствующие вычислительные процедуры.

### 3. Оценка константы $\kappa_2$

Функции  $\alpha(S)$  и  $\xi(S)$ , входящие в неравенство (15), являются функциями вершин  $n$ -мерного симплекса. Каждая из этих функций зависит от  $n(n+1)$  переменных. Выражения для  $\alpha(S)$  и  $\xi(S)$  через координаты симплекса могут быть получены по формулам, приведённым в первом пункте настоящей работы. Даже при небольших  $n$  эти выражения оказываются весьма громоздкими, что затрудняет их изучение аналитическими методами. Нами проведён ряд компьютерных экспериментов по проверке выполнения неравенства (15) в двумерном случае.

При анализе случая  $n = 2$  мы будем рассматривать характеристики симплекса как функции координат его вершин. Для этого удобно ввести обозначения, отличающиеся от используемых в остальной части работы. Пусть  $S \subset Q_2$  — двумерный симплекс с вершинами  $(s_1, t_1)$ ,  $(s_2, t_2)$ ,  $(s_3, t_3)$ . Тогда  $\alpha(S) = \alpha(s_1, t_1, s_2, t_2, s_3, t_3)$ ,  $\xi(S) = \xi(s_1, t_1, s_2, t_2, s_3, t_3)$ . Рассмотрим функцию

$$\kappa(s_1, t_1, s_2, t_2, s_3, t_3) = \frac{\xi(s_1, t_1, s_2, t_2, s_3, t_3) - \alpha(s_1, t_1, s_2, t_2, s_3, t_3)}{\xi(s_1, t_1, s_2, t_2, s_3, t_3) - \xi_2}. \quad (18)$$

Напомним, что  $\xi_2 = \frac{3\sqrt{5}}{5} + 1 = 2.34 \dots$ . Для выполнения (15) достаточно, чтобы функция  $\kappa(s_1, t_1, s_2, t_2, s_3, t_3)$  была ограничена сверху при условиях

$$0 \leq s_i \leq 1, \quad 0 \leq t_i \leq 1 \quad (i = 1, 2, 3), \quad \xi(s_1, t_1, s_2, t_2, s_3, t_3) \neq \xi_2. \quad (19)$$

Знаменатель в правой части (18) может принимать сколь угодно малые значения. Наша гипотеза состояла в том, что при выполнении (19) справедливо неравенство

$$\kappa(s_1, t_1, s_2, t_2, s_3, t_3) \leq \frac{5 + 2\sqrt{5}}{3} = 3.15737865166653 \dots \quad (20)$$

Проверка гипотезы проводилась с использованием системы компьютерной математики Wolfram Mathematica (версия 10.0) (см., например, [1]) и с помощью нескольких специально написанных программ на языке C++. Для выполнения вычислений с матрицами в программах на C++ использовалась библиотека с открытым исходным кодом Eigen (<http://eigen.tuxfamily.org>).



Были выполнены следующие численные эксперименты.

а) Перебор симплексов из  $Q_2$ .

С помощью программы, написанной на языке C++, был осуществлен перебор значений переменных  $s_1, t_1, s_2, t_2, s_3, t_3$ . Область изменения каждой переменной (отрезок  $[0, 1]$ ), разбивалась на  $m$  равных частей. Вычислялся максимум значений  $\varkappa(s_1, t_1, s_2, t_2, s_3, t_3)$  в узлах разбиения. Случаи, когда знаменатель в правой части (19) был меньше, чем  $10^{-6}$ , не рассматривались. Не рассматривались также симплексы, для которых  $|\Delta| < 10^{-6}$  (см. п. 1).

б) Перебор симплексов с вершинами на границе квадрата.

Учитывая данные описанного эксперимента, можно предположить, что вершины экстремального симплекса всегда расположены на границе  $Q_2$ . При этом следует рассмотреть три случая расположения вершин: 1) три вершины симплекса расположены на трех различных сторонах квадрата, 2) две вершины симплекса расположены на одной из сторон квадрата, а третья — на соседней стороне, 3) две вершины симплекса расположены на одной из сторон, а третья вершина — на противоположной стороне.

Случаям 1), 2) и 3) соответствуют задачи об отыскании максимумов функций

$$\begin{aligned} 1) \quad & v_1(u_1, u_2, u_3) = \varkappa(0, u_1, u_2, 0, 1, u_3), \\ 2) \quad & v_2(u_1, u_2, u_3) = \varkappa(0, u_1, 0, u_2, u_3, 0), \\ 3) \quad & v_3(u_1, u_2, u_3) = \varkappa(0, u_1, 0, u_2, 1, u_3), \end{aligned} \quad (21)$$

при  $0 \leq u_i \leq 1$  ( $i = 1, 2, 3$ ). С помощью специальной версии нашей программы на C++ был выполнен ряд тестов. Сторона квадрата разбивалась на  $m$  равных частей. Каждая из трех вершин пробегала все точки деления соответствующей стороны.

Как отмечалось, при допустимых значениях аргументов знаменатель дроби в (18) может принимать сколь угодно малые значения. Особый интерес представляет поведение функции  $\varkappa$  при значениях переменных, близких к тем, которые соответствуют симплексам с условием  $\xi(S) = \xi_2$ . В [7; гл. 2] показано, что таким свойством обладает только симплекс  $S^{**}$  с вершинами  $(0, 0)$ ,  $(1, \tau)$ ,  $(\tau, 1)$ , где  $\tau = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ , и симплексы, приводящиеся к нему поворотами или отражениями. В наших обозначениях симплексу  $S^{**}$  соответствует точка  $(0, 0, 1, \tau, \tau, 1)$  из области определения функции  $\varkappa$ . Особо подробно была исследована окрестность этой точки. Функция  $\varkappa$  имеет в ней разрыв, но того, что в окрестности этой точки  $\varkappa$  принимает значения большие, чем  $\frac{5+2\sqrt{5}}{3}$ , обнаружено не было. Некоторое представление о поведении функции в окрестности этой точки дает график, приведённый на рис. 1. В этом примере показано, как ведёт себя функция  $\varkappa$ , если две вершины симплекса  $S^{**}$  фиксированы, а третья вершина пробегает свою сторону квадрата. Заметим, что функция  $\varkappa$  вовсе не является кусочно-постоянной, как это может показаться.

в) Нахождение максимума функции  $\varkappa(s_1, t_1, s_2, t_2, s_3, t_3)$  на границе  $Q_2$  с использованием системы аналитических вычислений.

С помощью системы аналитических вычислений Wolfram Mathematica в некоторых случаях удаётся решить экстремальные задачи аналитически, без применения численных методов. Мы осуществили ряд попыток найти максимум функции шести переменных  $\varkappa(s_1, t_1, s_2, t_2, s_3, t_3)$  с использованием функции Maximize. В разумное время результата достичь не удалось. Однако система успешно справилась

с упрощённым вариантом задачи, а именно, с нахождением максимумов функций трех переменных (21). Были получены следующие результаты:

- 1)  $\max_{0 \leq u_i \leq 1} v_1(u_1, u_2, u_3) = \frac{5+2\sqrt{5}}{3} = 3.157 \dots$  при  $u_1 = 1, u_2 = \frac{1}{2}, u_3 = 1$ ,
- 2)  $\max_{0 \leq u_i \leq 1} v_2(u_1, u_2, u_3) = \frac{5+\sqrt{5}}{6} = 1.206 \dots$  при  $u_1 = 1, u_2 = 0, u_3 = 1$ ,
- 3)  $\max_{0 \leq u_i \leq 1} v_3(u_1, u_2, u_3) = \frac{5+2\sqrt{5}}{3} = 3.157 \dots$  при  $u_1 = 0, u_2 = 1, u_3 = \frac{1}{2}$ .

Результаты этого эксперимента также подтверждают нашу гипотезу о том, что наибольшее значение функции равно  $\frac{5+2\sqrt{5}}{3}$ .

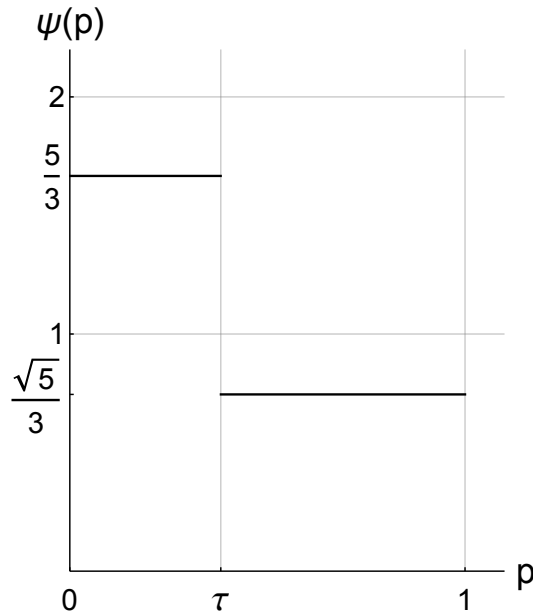


Рис. 1. График функции  $\varkappa = \psi(p) = \varkappa(0, 0, 1, p, \tau, 1)$

Fig. 1. Graph of the function  $\varkappa = \psi(p) = \varkappa(0, 0, 1, p, \tau, 1)$

г) Максимизация функции  $\varkappa(s_1, t_1, s_2, t_2, s_3, t_3)$  стохастическими методами.

Была предпринята серия попыток найти максимум  $\varkappa(s_1, t_1, s_2, t_2, s_3, t_3)$  при ограничениях (19) с помощью стохастических алгоритмов решения экстремальных задач, реализованных в системе Wolfram Mathematica. Значений функции, превышающих предполагаемый максимум, обнаружено не было. Наилучшее из полученных приближений содержало 150 верных знаков числа  $\frac{5+2\sqrt{5}}{3}$  и было меньше этого числа.

На основании всех выполненных экспериментов можно с уверенностью утверждать, что при  $n = 2$  гипотеза (Н2) верна и неравенство (15) выполняется с неулучшаемой (точной) константой

$$\varkappa_2 = \frac{5 + 2\sqrt{5}}{3}.$$

Также можно констатировать, что функция  $\varkappa(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$  имеет глобальный максимум при значениях переменных, соответствующих симплексу с вершинами  $(0, 0)$ ,  $(\frac{1}{2}, 1)$ ,  $(1, 0)$  и симплексам, полученным из него поворотами на углы  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$  и  $\frac{3\pi}{2}$ .

На рис. 2 и рис. 3 приведена зависимость функции  $\varkappa$  от параметра  $t$  для некоторых частных случаев, а именно для симплексов с вершинами  $(0, 0)$ ,  $(t, 1)$ ,  $(1, 0)$

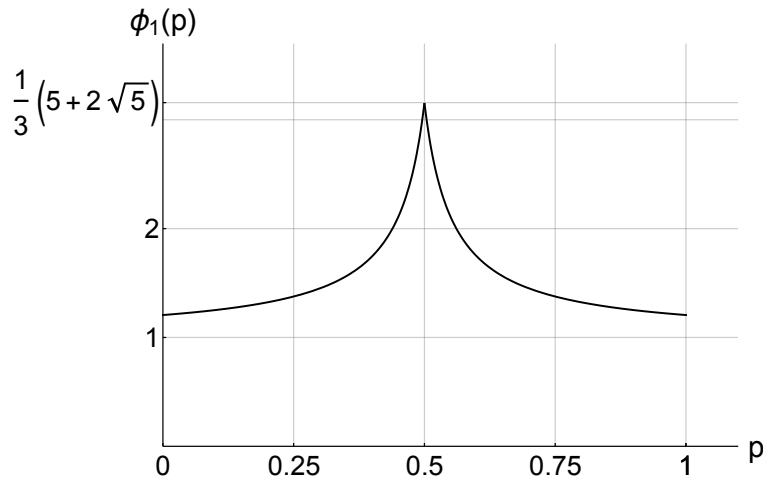


Рис. 2. График функции  $\varkappa = \phi_1(p) = \varkappa(0, 0, p, 1, 1, 0)$   
Fig. 2. Graph of the function  $\varkappa = \phi_1(p) = \varkappa(0, 0, p, 1, 1, 0)$

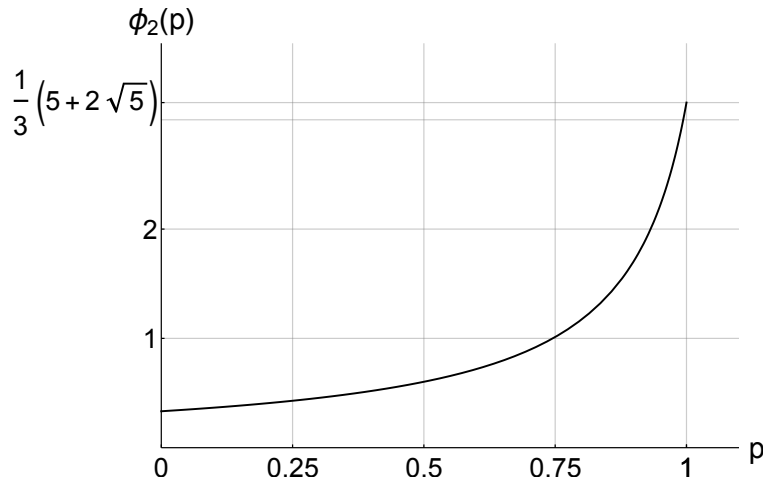


Рис. 3. График функции  $\varkappa = \phi_2(p) = \varkappa(0, 0, 0.5, p, 1, 0)$   
Fig. 3. Graph of the function  $\varkappa = \phi_2(p) = \varkappa(0, 0, 0.5, p, 1, 0)$

и симплексов с вершинами  $(0, 0)$ ,  $(\frac{1}{2}, t)$ ,  $(1, 0)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ). На этих рисунках представлены сечения графика функции шести переменных  $\varkappa = \varkappa(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$  некоторыми двумерными плоскостями. Экстремум имеет такой же выраженный характер и при сечении графика в окрестности точки максимума некоторыми другими плоскостями. Этот факт хорошо согласуется с данными наших численных экспериментов: достаточно небольшого смещения с точки, соответствующей экстремальному симплексу, чтобы значение функции значительно уменьшилось.

#### 4. Новая оценка $\xi_4$

Напомним, что для констант  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\xi_3$  известны точные значения (см. п. 1). Оценка  $4 \leq \xi_4 \leq \frac{13}{3} = 4.33 \dots$  была получена из рассмотрения симплекса  $S^* \subset Q_4$  с вершинами  $(0, 1, 1, 1)$ ,  $(1, 0, 1, 1)$ ,  $(1, 1, 0, 1)$ ,  $(1, 1, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 0, 0)$ , для которого  $\xi(S^*) = \frac{13}{3}$ .

**Теорема.** Справедливо неравенство

$$\xi_4 \leq \frac{19 + 5\sqrt{13}}{9} = 4.114195 \dots$$

*Доказательство.* Для уточнения верхней границы  $\xi_4$  достаточно найти симплекс  $T \subset Q_4$ , для которого  $\xi(T) < \frac{13}{3}$ . Рассмотрим симплекс  $T$  с вершинами  $\left(\frac{5-\sqrt{13}}{6}, 0, 0, 0\right)$ ,  $\left(1, \frac{1+\sqrt{13}}{6}, 0, 1\right)$ ,  $\left(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ,  $\left(\frac{5-\sqrt{13}}{6}, 0, 1, 1\right)$ ,  $\left(1, \frac{1+\sqrt{13}}{6}, 1, 0\right)$ . Для него матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{A}^{-1}$  имеют вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{5-\sqrt{13}}{6} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1+\sqrt{13}}{6} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{5-\sqrt{13}}{6} & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1+\sqrt{13}}{6} & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5-2\sqrt{13}}{18} & \frac{1+5\sqrt{13}}{36} & -\frac{11+\sqrt{13}}{18} & \frac{5-2\sqrt{13}}{18} & \frac{1+5\sqrt{13}}{36} \\ -\frac{1+5\sqrt{13}}{36} & \frac{-5+2\sqrt{13}}{18} & \frac{11+\sqrt{13}}{18} & -\frac{1+5\sqrt{13}}{36} & \frac{-5+2\sqrt{13}}{18} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{19+5\sqrt{13}}{36} & \frac{5-2\sqrt{13}}{18} & \frac{7-\sqrt{13}}{18} & \frac{-17+5\sqrt{13}}{36} & \frac{5-2\sqrt{13}}{18} \end{pmatrix}.$$

Выпишем соответствующие  $T$  базисные многочлены Лагранжа:

$$\begin{aligned} \lambda_1(x) &= \frac{1}{36} \left( (10 - 4\sqrt{13})x_1 - (1 + 5\sqrt{13})x_2 - 18x_3 - 18x_4 + 5\sqrt{13} + 19 \right), \\ \lambda_2(x) &= \frac{1}{36} \left( (1 + 5\sqrt{13})x_1 + (4\sqrt{13} - 10)x_2 - 18x_3 + 18x_4 - 4\sqrt{13} + 10 \right), \\ \lambda_3(x) &= \frac{1}{18} \left( -(11 + \sqrt{13})x_1 + (11 + \sqrt{13})x_2 - \sqrt{13} + 7 \right), \\ \lambda_4(x) &= \frac{1}{36} \left( (10 - 4\sqrt{13})x_1 - (1 + 5\sqrt{13})x_2 + 18x_3 + 18x_4 + 5\sqrt{13} - 17 \right), \\ \lambda_5(x) &= \frac{1}{36} \left( (1 + 5\sqrt{13})x_1 + (4\sqrt{13} - 10)x_2 + 18x_3 - 18x_4 - 4\sqrt{13} + 10 \right). \end{aligned}$$

Для вычисления  $\xi(T)$  применим (4). По этой формуле находим

$$\xi(T) = 5 \max_{1 \leq k \leq 5} \max_{x \in \text{ver}(Q_4)} (-\lambda_k(x)) + 1 = \frac{19 + 5\sqrt{13}}{9}.$$

В последнем равенстве для  $k = 1$  максимум достигается на вершине куба  $(1, 1, 1, 1)$ , для  $k = 2$  — на вершине  $(0, 0, 1, 0)$ , для  $k = 3$  — на вершинах  $(1, 0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0, 1)$ ,  $(1, 0, 1, 0)$ ,  $(1, 0, 1, 1)$ , для  $k = 4$  — на вершине  $(1, 1, 0, 0)$  и для  $k = 5$  — на вершине  $(0, 0, 0, 1)$ . Таким образом, для симплекса  $T$  выполнено условие (5):

$$\max_{x \in \text{ver}(Q_4)} (-\lambda_1(x)) = \dots = \max_{x \in \text{ver}(Q_4)} (-\lambda_5(x)).$$

Как отмечалось в п. 1, выполнение последнего условия эквивалентно тому, что симплекс  $\xi(T)T$  описан вокруг  $Q_4$ . Это эквивалентно также выполнению для симплекса  $S$  равенства  $\alpha(T) = \xi(T)$ .

Итак, мы получаем оценку

$$\xi_4 \leq \xi(T) = \frac{19 + 5\sqrt{13}}{9}.$$

Теорема доказана.  $\square$

Для доказательства теоремы подходящим является и симплекс  $R$  с вершинами  $\left(1, 0, \frac{1}{2}, \frac{5-\sqrt{13}}{6}\right)$ ,  $\left(1, 1, \frac{1}{2}, \frac{5-\sqrt{13}}{6}\right)$ ,  $\left(\frac{5-\sqrt{13}}{6}, \frac{1}{2}, 1, 1\right)$ ,  $\left(\frac{5-\sqrt{13}}{6}, \frac{1}{2}, 0, 1\right)$ ,  $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ . Справедливо  $\xi(R) = \xi(T) = \frac{19+5\sqrt{13}}{9}$ .

Числовые характеристики симплексов  $T$  и  $R$  представлены в табл. 1. Для вычисления этих характеристик использовались формулы, приведенные в п. 1.

Отметим, что симплексы  $T$  и  $R$  имеют разные объемы и, следовательно, не являются эквивалентными, т. е. один из них не может быть переведен в другой с помощью ортогонального преобразования. По мнению авторов, найденное с помощью этих симплексов число  $\xi(S)$  не только доставляет улучшенную верхнюю оценку  $\xi_4$ , а является и точным значением этой константы. Иначе говоря,  $\xi(T) = \xi(R) = \xi_4$ .

Как видно из табл. 1, у симплексов  $T$  и  $R$  совпадают все рассматриваемые числовые характеристики, за исключением объема, определителя матрицы и нормы интерполяционного проектора по вершинам симплекса.

Вычисления показывают, что вершины  $(1, 0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0, 1)$ ,  $(1, 0, 1, 0)$ ,  $(1, 0, 1, 1)$  являются 2-вершинами  $Q_4$  относительно  $T$ . Для любого  $\mu \neq 2$  не существует  $\mu$ -вершин  $Q_4$  относительно  $T$ . В частности, не существует ни одной 1-вершины. Это также верно и для симплекса  $R$ . Отсюда следует, что правое неравенство в (9) для симплексов  $T$  и  $R$  выполняется строго. Например, для симплекса  $T$  двойное неравенство (9) имеет вид

$$\frac{73 + 5\sqrt{13}}{48} = 1.896\dots < \frac{19 + 5\sqrt{13}}{9} = 4.114\dots < \frac{37 + 5\sqrt{13}}{12} = 4.585\dots$$

Главные фигуранты этого пункта, симплексы  $T$  и  $R$ , были найдены с помощью компьютера. Для минимизации  $\xi(S)$  использовались программы, написанные на языке Wolfram Language. После отыскания первых приближений точек минимума проводился дальнейший поиск в окрестности этих точек. Выражения, содержащие радикалы, были найдены при помощи функции распознавания чисел (number recognition) системы Wolfram Alpha (<https://www.wolframalpha.com/>).

Была проведена большая серия численных экспериментов по нахождению симплексов с меньшим значением  $\xi(S)$ , чем для  $T$  и  $R$ . Специально написанная на языке

Таблица 1. Числовые характеристики симплексов  $T$  и  $R$   
Table 1. Numerical characteristics of simplices  $T$  and  $R$

$S$	$T$	$R$
$\det(\mathbf{A})$	$\frac{1-5\sqrt{13}}{9} = -1.891972\dots$	$\frac{5\sqrt{13}-1}{18} = 0.945986\dots$
$\text{vol}(S)$	$\frac{5\sqrt{13}-1}{216} = 0.078832\dots$	$\frac{5\sqrt{13}-1}{432} = 0.039416\dots$
$d_1(S)$	$\frac{5\sqrt{13}-1}{18} = 0.945986\dots$	$\frac{5\sqrt{13}-1}{18} = 0.945986\dots$
$d_2(S)$	$\frac{5\sqrt{13}-1}{18} = 0.945986\dots$	1
$d_3(S)$	1	1
$d_4(S)$	1	$\frac{5\sqrt{13}-1}{18} = 0.945986\dots$
$\alpha(S)$	$\frac{19+5\sqrt{13}}{9} = 4.114195\dots$	$\frac{19+5\sqrt{13}}{9} = 4.114195\dots$
$\xi(S)$	$\frac{19+5\sqrt{13}}{9} = 4.114195\dots$	$\frac{19+5\sqrt{13}}{9} = 4.114195\dots$
$\ P\ $	$\frac{11+\sqrt{13}}{6} = 2.434258\dots$	3

Wolfram Language программа работала в общей сложности много часов, используя различные алгоритмы минимизации. Ни в одном из этих экспериментов не было найдено симплексов со свойством  $\xi(S) < \frac{19+5\sqrt{13}}{9}$ .

В процессе этих поисков было найдено еще несколько симплексов, для которых  $\xi(S) = \frac{19+5\sqrt{13}}{9}$ , но каждый из них оказался эквивалентным  $R$ . Эквивалентность была доказана путем явного построения ортогональных преобразований относительно центра куба  $Q_4$ , переводящих эти симплексы в  $R$ .

На основании численных экспериментов авторы предполагают, что  $\xi_4 = \frac{19+5\sqrt{13}}{9}$ .

## 5. Гипотеза о значении $\theta_4$

Напомним, что для минимального значения нормы интерполяционного проектора  $\theta_4$  известна оценка  $2.2 \leq \theta_4 \leq \frac{7}{3}$ . Прделанные нами численные эксперименты позволяют предположить, что верхняя граница есть точное значение  $\theta_4$ , т. е. что  $\theta_4 = \frac{7}{3}$ . Это значение достигается для симплекса  $S$  с вершинами  $(0, 0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 1, 0)$ ,  $(1, 0, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 1, 1)$ ,  $(1, 1, 0, 0)$  и для эквивалентных ему симплексов. Приведем основные характеристики симплекса  $S$ :  $\det(\mathbf{A}) = -3$ ,  $\text{vol}(S) = \frac{1}{8}$ ,  $d_i(S) = 1$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ),  $\alpha(S) = 4$ ,  $\xi(S) = \frac{13}{3}$ ,  $\|P\| = \frac{7}{3}$ .

Как отмечалось выше, для всех  $n$  выполняется неравенство

$$\frac{n+1}{2n}(\theta_n - 1) + 1 \leq \xi_n \leq \frac{n+1}{2}(\theta_n - 1) + 1. \quad (22)$$

Если наши предположения относительно точных значений  $\xi_4$  и  $\theta_4$  верны, то для  $n = 4$  имеем:

$$\frac{n+1}{2n}(\theta_n - 1) + 1 = \frac{11}{6}, \quad \xi_n = \frac{19 + 5\sqrt{13}}{9} = 4.114\dots, \quad \frac{n+1}{2}(\theta_n - 1) + 1 = \frac{13}{3}.$$

Неравенства (22) принимают вид  $1.833\dots < 4.114\dots < 4.333\dots$ .

При  $n = 1, 2, 3$  правое неравенство в (22) обращается в равенство. Если наши гипотезы относительно точных значений  $\xi_4$  и  $\theta_4$  верны, то наименьшее натуральное  $n$ , при котором правое неравенство в (22) является строгим, равно 4.

Таблица 2. Числовые характеристики симплексов  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$   
Table 2. Numerical characteristics of simplices  $S_1$ ,  $S_2$  and  $S_3$

$S$	$S_1$	$S_2$	$S_3$
$\det(\mathbf{A})$	1	-2	-3
$\text{vol}(S)$	$\frac{1}{24} = 0.041\dots$	$\frac{1}{12} = 0.083\dots$	$\frac{1}{8} = 0.125$
$d_1(S)$	1	1	1
$d_2(S)$	1	1	1
$d_3(S)$	1	1	1
$d_4(S)$	1	1	1
$\alpha(S)$	4	4	4
$\xi(S)$	$\frac{13}{3} = 4.333\dots$	$\frac{13}{3} = 4.333\dots$	$\frac{13}{3} = 4.333\dots$
$\ P\ $	$\frac{10}{3} = 3.333\dots$	$\frac{8}{3} = 2.666\dots$	$\frac{7}{3} = 2.333\dots$

## 6. Гипотеза о значении $\varkappa_4$

В предположении, что  $\xi_4 = \frac{19+5\sqrt{13}}{9}$ , авторы произвели численную проверку гипотезы (Н2) для  $n = 4$ . Полученные результаты можно обобщить следующим образом.

При  $n = 4$  гипотеза (H2) верна. Неравенство (15) выполняется с неулучшаемой константой

$$\varkappa_4 = \frac{4 + \sqrt{13}}{5} = 1.521110 \dots$$

Для любого невырожденного симплекса  $S \subset Q_4$  выполняется соотношение

$$\xi(S) - \alpha(S) \leq \frac{4 + \sqrt{13}}{5} (\xi(S) - \xi_4).$$

Наибольшее значение дроби в соотношении (16) достигается, в частности, для симплекса  $S_1$  с вершинами  $(\frac{1}{3}, 1, 0, 1)$ ,  $(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 0)$ ,  $(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{2}, 1)$ ,  $(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 0)$ ,  $(\frac{1}{3}, 1, 1, 1)$ , симплекса  $S_2$  с вершинами  $(1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$ ,  $(0, 1, \frac{2}{3}, 1)$ ,  $(0, 0, \frac{2}{3}, 0)$ ,  $(1, 1, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0, 1)$  и симплекса  $S_3$  с вершинами  $(1, 0, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 0, 1)$ ,  $(1, 1, 1, 1)$ , см. табл. 2. Заметим, что  $S_1, S_2, S_3$  попарно не эквивалентны, так как имеют попарно различные объёмы. Симплекс  $S_3$  эквивалентен введённому в п. 1 симплексу  $S^*$ .

## Список литературы / References

- [1] Климов В. С., Ухалов А. Ю., *Решение задач математического анализа с использованием систем компьютерной математики*, Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, 2014, 96 с.; [Klimov V. S., Ukhlov A. Yu., *Reshenie zadach matematicheskogo analiza s ispolzovaniem sistem kompyuternoi matematiki*, P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, 2014, 96 pp., (in Russian).]
- [2] Невский М. В., “Неравенства для норм интерполяционных проекторов”, *Модел. и анализ информ. систем*, **15:3** (2008), 28–37; [Nevskij M. V., “Inequalities for the norms of interpolating projections”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **15:3** (2008), 28–37, (in Russian).]
- [3] Невский М. В., “Об одном соотношении для минимальной нормы интерполяционного проектора”, *Модел. и анализ информ. систем*, **16:1** (2009), 24–43; [Nevskij M. V., “On a certain relation for the minimal norm of an interpolational projection”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **16:1** (2009), 24–43, (in Russian).]
- [4] Невский М. В., “Об одном свойстве  $n$ -мерного симплекса”, *Матем. заметки*, **87:4** (2010), 580–593; English transl.: Nevskii M. V., “On a property of  $n$ -dimensional simplices”, *Math. Notes*, **87:4** (2010), 543–555.
- [5] Невский М. В., “О геометрических характеристиках  $n$ -мерного симплекса”, *Модел. и анализ информ. систем*, **18:2** (2011), 52–64; [Nevskii M. V., “On geometric characteristics of an  $n$ -dimensional simplex”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **18:2** (2011), 52–64, (in Russian).]
- [6] Nevskii M., “Properties of axial diameters of a simplex”, *Discrete Comput. Geom.*, **46:2** (2011), 301–312.
- [7] Невский М. В., *Геометрические оценки в полиномиальной интерполяции*, Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, 2012, 218 с.; [Nevskii M. V., *Geometricheskie ocenki v polinomialnoy interpoliyacii*, P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, 2012, 218 pp., (in Russian).]
- [8] Невский М. В., “Вычисление максимального в симплексе отрезка данного направления”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **18:2** (2013), 147–152; English transl.: Nevskii M. V., “Computation of the longest segment of a given direction in a simplex”, *Journal of Math. Sciences*, **203:6** (2014), 851–854.
- [9] Hudelson M., Klee V., Larman D., “Largest  $j$ -simplices in  $d$ -cubes: some relatives of the Hadamard maximum determinant problem”, *Linear Algebra Appl.*, **241–243** (1996), 519–598.



- [10] Lassak M., "Parallelotopes of maximum volume in a simplex", *Discrete Comput. Geom.*, **21** (1999), 449–462.
- [11] Scott P. R., "Lattices and convex sets in space", *Quart. J. Math. Oxford (2)*, **36** (1985), 359–362.
- [12] Scott P. R., "Properties of axial diameters", *Bull. Austral. Math. Soc.*, **39** (1989), 329–333.

**Nevskii M. V., Ukhalov A. Yu.**, "On Numerical Characteristics of a Simplex and their Estimates", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:5 (2016), 603–619.

**DOI:** 10.18255/1818-1015-2016-5-603-619

**Abstract.** Let  $n \in \mathbb{N}$ , and let  $Q_n = [0, 1]^n$  be the  $n$ -dimensional unit cube. For a nondegenerate simplex  $S \subset \mathbb{R}^n$ , by  $\sigma S$  we denote the homothetic image of  $S$  with the center of homothety in the center of gravity of  $S$  and the ratio of homothety  $\sigma$ . We apply the following numerical characteristics of the simplex. Denote by  $\xi(S)$  the minimal  $\sigma > 0$  with the property  $Q_n \subset \sigma S$ . By  $\alpha(S)$  we denote the minimal  $\sigma > 0$  such that  $Q_n$  is contained in a translate of a simplex  $\sigma S$ . By  $d_i(S)$  we mean the  $i$ th axial diameter of  $S$ , i. e. the maximum length of a segment contained in  $S$  and parallel to the  $i$ th coordinate axis. We apply the computational formulae for  $\xi(S)$ ,  $\alpha(S)$ ,  $d_i(S)$  which have been proved by the first author. In the paper we discuss the case  $S \subset Q_n$ . Let  $\xi_n = \min\{\xi(S) : S \subset Q_n\}$ . Earlier the first author formulated the conjecture: if  $\xi(S) = \xi_n$ , then  $\alpha(S) = \xi(S)$ . He proved this statement for  $n = 2$  and the case when  $n + 1$  is an Hadamard number, i. e. there exists an Hadamard matrix of order  $n + 1$ . The following conjecture is a stronger proposition: for each  $n$ , there exist  $\gamma \geq 1$ , not depending on  $S \subset Q_n$ , such that  $\xi(S) - \alpha(S) \leq \gamma(\xi(S) - \xi_n)$ . By  $\varkappa_n$  we denote the minimal  $\gamma$  with such a property. If  $n + 1$  is an Hadamard number, then the precise value of  $\varkappa_n$  is 1. The existence of  $\varkappa_n$  for other  $n$  was unclear. In this paper with the use of computer methods we obtain an equality

$$\varkappa_2 = \frac{5 + 2\sqrt{5}}{3} = 3.1573 \dots$$

Also we prove a new estimate

$$\xi_4 \leq \frac{19 + 5\sqrt{13}}{9} = 4.1141 \dots,$$

which improves the earlier result  $\xi_4 \leq \frac{13}{3} = 4.33 \dots$ . Our conjecture is that  $\xi_4$  is precisely  $\frac{19 + 5\sqrt{13}}{9}$ . Applying this value in numerical computations we achieve the value

$$\varkappa_4 = \frac{4 + \sqrt{13}}{5} = 1.5211 \dots$$

Denote by  $\theta_n$  the minimal norm of interpolation projection on the space of linear functions of  $n$  variables as an operator from  $C(Q_n)$  in  $C(Q_n)$ . It is known that, for each  $n$ ,

$$\xi_n \leq \frac{n+1}{2} (\theta_n - 1) + 1,$$

and for  $n = 1, 2, 3, 7$  here we have an equality. Using computer methods we obtain the result  $\theta_4 = \frac{7}{3}$ . Hence, the minimal  $n$  such that the above inequality has a strong form is equal to 4.

**Keywords:** simplex, cube, coefficient of homothety, axial diameter, linear interpolation, projection, norm, numerical methods

**On the authors:**

Mikhail V. Nevskii, orcid.org/0002-0007-1896-0951, doctor of science,  
P.G. Demidov Yaroslavl State University,  
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: mnevsk55@yandex.ru  
Alexey Yu. Ukhalov, orcid.org/0009-0203-2514-7755, PhD,  
P.G. Demidov Yaroslavl State University,  
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: alex-uhalov@yandex.ru