Моделирование и анализ информационных систем. Т. 23, № 5 (2016), с. 657–666
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 23, No 5 (2016), pp. 657–666

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-5-657-666

УДК 541.1

Эквивалентность обычной и модифицированной сети обобщенных нейронных элементов

Коновалов Е. В.

получена 15 марта 2016

Аннотация. Статья посвящена анализу сетей, состоящих из обобщенных нейронных элементов. В первой части статьи предлагается новая нейросетевая модель — модифицированная сеть обобщенных нейронных элементов (МОНЭ-сеть). Данная сеть является развитием модели отдельного нейрона — обобщенного нейронного элемента, формальное описание которого содержит некоторые недостатки. В модели МОНЭ-сети эти недостатки преодолеваются. Нейронная сеть вводится сразу целиком, без предварительного описания модели одного нейронного элемента и способа взаимодействия таких элементов между собой. Описание нейросетевой математической модели упрощено и позволяет сравнительно легко построить на ее основе имитационную модель для проведения численных экспериментов. Модель МОНЭ-сети носит универсальный характер, объединяя свойства сетей, состоящих из нейронов-автогенераторов и нейронов-детекторов. Во второй части статьи доказывается эквивалентность функционирования двух рассмотренных нейронных сетей: сети, состоящей из классических обобщенных нейронных элементов, и МОНЭ-сети. Вводится определение эквивалентности функционирования обобщенного нейронного элемента и МОНЭ-сети, состоящей из одного элемента. Затем вводится определение эквивалентности функционирования двух нейронных сетей в целом. Устанавливается соответствие различных параметров двух рассматриваемых нейросетевых моделей. Обсуждается вопрос согласования начальных условий двух рассматриваемых нейросетевых моделей. Доказывается теорема об эквивалентном функционировании этих моделей. Данная теорема позволяет перенести все полученные ранее результаты для сетей обобщенных нейронных элементов на класс модифицированных сетей.

Ключевые слова: нейронные сети, модели нейронных элементов, обобщенный нейронный элемент, МОНЭ-сеть

Для цитирования: Коновалов Е. В., "Эквивалентность обычной и модифицированной сети обобщенных нейронных элементов", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:5 (2016), 657–666.

Об авторах:
Коновалов Евгений Владиславович, orcid.org/0000-0001-8532-487X, канд. физ.-мат. наук, доцент,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: kinnarts@mail.ru

Благодарности:
Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 14-01-31431.

Моделирование и изучение нейронных сетей является сейчас одним из приоритетных научных направлений. При этом имеется определенный дефицит моделей нейронного элемента, с одной стороны, достаточно простых, а с другой стороны, потенциально способных порождать нейронные сети со сложным поведением. Важно также иметь возможность изучать полученные нейронные сети как аналитически-ми, так и численными методами. На пути построения такой модели в [1], [2] была введена модель обобщенного нейронного элемента (ОНЭ), первоначально названная обобщенным нейронным автоматом. Полное ее формальное описание приведено в [3].

Обобщенный нейронный элемент — нейронная модель, которая функционирует в непрерывном времени t и задается набором параметров p; r; α; T_R; n; m; $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и T_m. Положительные величины p, r, α, T_R и T_m не меняются с течением времени и одинаковы для всех элементов, входящих в состав нейронных сетей, состоящих из ОНЭ. Число входов n и выходов m для каждого элемента фиксировано, но, вообще говоря, может быть неодинаковым для разных элементов, в зависимости от архитектуры конкретной нейронной сети. Входы каждого элемента характеризуются величинами $q_1, q_2, \ldots, q_n$, где n — число входов данного элемента. Синаптические веса q_i определяют эффективность входного воздействия. Каждый такой вес характеризует однонаправленную синаптическую связь, которая соединяет выход одного элемента и вход другого. Сейчас и далее будем рассматривать только связи с положительными весами.

Внутреннее состояние элемента в момент времени t задается тремя функциями: $u(t)$, $s(t)$ и $\sigma(t)$. Функция $s(t)$ принимает следующие значения:

$$s(t) = \begin{cases} \text{восприимчивость} \\ \text{генерация импульса} \\ \text{рефрактерность} \end{cases}.$$

Функция $\sigma(t)$ равна единице, когда элемент генерирует выходной импульс (спайк). Этот импульс поступает на все m выходов данного элемента. В остальные моменты времени $\sigma(t) = 0$. Входные импульсы $\sigma_1(t)$, $\sigma_2(t)$, …, $\sigma_n(t)$ зависят от момента времени t. А именно, $\sigma_i(t) = 1$ во все такие моменты времени t, когда по i-му входу пришел импульс. В остальные моменты времени $\sigma_i(t) = 0$. Введем вспомогательные функции $\sigma_1^m(t), \sigma_2^m(t), \ldots, \sigma_n^m(t)$. При каждом отдельном $i = 1, 2, \ldots, n$ положим $\sigma_i^m(t) = 1$ при всех $t \in [t^s; t^s + T_m]$, где t^s такие, что одновременно $s(t^s) = \{\text{восприимчивость}\}$ и $\sigma_i(t^s) = 1$. В остальные моменты времени $\sigma_i^m(t) = 0$.

Опишем теперь функционирование обобщенного нейронного элемента. В произвольный момент времени t возможен один из трех следующих вариантов.

I. Пусть $s(t) = \{\text{генерация импульса}\}$. Тогда $u(t) = p$, $\sigma(t) = 1$; при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$: $s(t + \varepsilon) = \{\text{рефрактерность}\}$.

II. Пусть $s(t) = \{\text{рефрактерность}\}$. Тогда $u(t) = 0$, $\sigma(t) = 0$; $s(t_1^{sp} + T_R) = \{\text{восприимчивость}\}$, где

$$t_1^{sp} = \max_{\tau < t}\{\tau : \sigma(\tau) = 1\}. \tag{1}$$

III. Пусть $s(t) = \{\text{восприимчивость}\}$. Тогда $\sigma(t) = 0$, а функция мембранного потенциала $u(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\dot{u} = \alpha(r + q(t) - u), \tag{2}$$

где функция $q(t)$ определяется следующим образом:

$$q(t) = \sum_{i=1}^{n} q_i \sigma_i^m(t).$$

В качестве начального условия для уравнения (2) берется значение $u(t^0)$, которое определяется следующим образом:

$$u(t^0) = u(t^0 - 0),$$
$$t^0 = \begin{cases} t^*, \text{ если } t^* > t_1^{sp} + T_R \\ t_1^{sp} + T_R, \text{ если } t^* \le t_1^{sp} + T_R \end{cases},$$

где t_1^{sp} определяется из (1),

$$t^* = \max\{t^+; t^-\}, \qquad t^+ = \max_i \max_{\tau \le t}\{\tau : \sigma_i(\tau) = 1\},$$
$$t^- = \max_i \max_{\tau \le t}\{\tau : \sigma_i^m(\tau) = 1, \sigma_i^m(\tau + 0) = 0\}.$$

Здесь t_1^{sp} — момент последнего по времени импульса данного элемента, t^+ — момент последнего по времени входного сигнала на данный элемент, t^- — момент последнего по времени завершения какого-либо входного воздействия на данный элемент.

Элемент переходит в состояние генерации импульса, если величина мембранного потенциала $u(t)$ равна пороговому значению p. Т.е. $s(t_2^{sp}) = \{\text{генерация импульса}\}$, где

$$t_2^{sp} = \min_{\tau > t}\{\tau : u(\tau) = p\}.$$

Если при всех $\tau > t$ выполняется неравенство $u(\tau) < p$, то $s(\tau) = \{\text{восприимчивость}\}$ при всех $\tau > t$. В данном случае элемент не генерирует импульс. Разобранные случаи полностью исчерпывают поведение обобщенного нейронного элемента.

Формально определенная динамика мембранного потенциала обобщенного нейронного элемента соответствует развитию потенциала биологического нейрона. Она согласуется с "базовой нейронной моделью" [4] и близка к модели биологического нейрона, построенной на основе дифференциальных уравнений с запаздыванием [5]. При этом модель ОНЭ отличается простотой функционирования и позволяет избежать технических трудностей, связанных с интегрированием систем дифференциальных уравнений с запаздыванием. Кроме того, модель ОНЭ носит обобщенный характер. В частности, при $p < r$ элемент ведет себя как нейрон-автогенератор, а при $p > r$ — как нейрон-детектор.

Эта сравнительно простая модель позволяет строить нейронные сети со сложным поведением (в частности, динамическими аттракторами нейронной активности) и управлять этим поведением заранее с помощью синаптических весов [2]; исследовать поведение модели под влиянием пачечной активности (bursting) [6]; проводить адаптацию одного и нескольких обобщенных нейронных элементов [3] и др. Всё это показывает перспективность и самой модели, и порождаемых ею нейронных сетей.

Тем не менее, формальное описание модели ОНЭ не демонстрирует ее принципиальной простоты. Трудности возникали из-за того, что сначала вводилась модель одного нейронного элемента, при описании которой было трудно формализовать динамически меняющееся внешнее воздействие. Затем на основе модели элемента строилась та или иная нейронная сеть, конфигурация которой менялась в зависимости от решаемой задачи. В результате формальное описание модели оказалось перегруженным техническими деталями, а порождаемые моделью нейронные сети не производили впечатления принадлежащих к единому нейросетевому классу. На пути преодоления этих недостатков в настоящей статье вводится модифицированная сеть обобщенных нейронных элементов.

Дадим постановку задачи. На основе модели обобщенного нейронного элемента рассмотрим произвольную сеть обобщенных нейронных элементов (ОНЭ-сеть). Затем введем математическую модель модифицированной сети обобщенных нейронных элементов (МОНЭ-сеть). Элементы такой сети будут иметь определенное сходство с обобщенными нейронными элементами (ОНЭ), но при этом сеть будет введена сразу целиком. Далее докажем эквивалентность функционирования двух рассмотренных нейронных сетей: ОНЭ-сети и МОНЭ-сети. Это позволит перенести все полученные ранее результаты на класс модифицированных сетей. Такой подход позволит подчеркнуть ясность и принципиальную простоту рассматриваемых нейронных сетей и принадлежность их к единому классу, в том числе для удобства дальнейших исследований — как аналитических, так и численных.

Рассмотрим произвольную нейронную сеть, состоящую из N пронумерованных обобщенных нейронных элементов, вообще говоря, полносвязной архитектуры. Элементы с номерами i и j $(i, j = 1, \ldots, N)$ соединены синаптической связью с неотрицательным весом $q_{i,j}$ $(q_{i,i} = 0)$. Параметры p, r, α, T_R и T_m одинаковы для всех элементов сети. Число входов n и выходов m при таком описании также одинаково для всех элементов сети и составляет $N - 1$. Эту произвольную сеть, состоящую из обобщенных нейронных элементов, будем в дальнейшем называть ОНЭ-сетью.

Рассмотрена детерминированная модель, функционирование которой однозначно определяется начальным состоянием в нулевой момент времени. Зададим начальное состояние ОНЭ-сети. Это означает, что нужно указать состояние всех элементов в нулевой момент времени, то есть $s^k(0)$ (k — номер элемента). Для простоты будем считать, что в нулевой момент времени ни один элемент не генерирует импульс. Далее, для элементов, у которых $s^k(0) = \{\text{восприимчивость}\}$, необходимо указать значения мембранных потенциалов $u^k(0)$ $(k = 1, \ldots, N)$; какие соседние элементы осуществляют воздействие на каждый данный элемент (если оно есть), и сколько времени каждое такое воздействие будет длиться. Обозначим временной промежуток такого воздействия со стороны i-го элемента на k-ый элемент $(i, k = 1, \ldots, N)$ как $T_0^{i,k}$. Если воздействия нет, будем считать $T_0^{i,k} = 0$. Наконец, для тех элементов, у которых $s^k(0) = \{\text{рефрактерность}\}$, нужно указать время, через которое они выйдут из состояния рефрактерности. Обозначим эту величину для k-го элемента как R_0^k $(k = 1, \ldots, N)$. Начальное состояние ОНЭ-сети задано.

Введем теперь новую модель — модифицированную сеть обобщенных нейронных элементов (МОНЭ-сеть). Чтобы обозначения параметров новой сети не дублировали параметры старой (но между ними сохранилось соответствие), будем во всех таких случаях пользоваться верхним подчеркиванием.

Рассмотрим нейронную сеть из $\overline{N}$ пронумерованных элементов, которые также функционируют в непрерывном времени t. Сеть определяется следующим набором параметров:

- $\overline{p}$ — пороговое значение мембранного потенциала;
- $\overline{r}$ — равновесное значение мембранного потенциала;
- $\overline{\alpha}$ — скоростной параметр;
- $\overline{T}_R$ — продолжительность периода рефрактерности;
- $W = (w_{ij})_{i=1,j=1}^{\overline{N},\overline{N}}$ — матрица синаптических весов, $w_{ij} \in 0 \cup \mathrm{Re}^+$;
- $M = (m_{ij})_{i=1,j=1}^{\overline{N},\overline{N}}$ — матрица индикаторов синаптического воздействия, $m_{ij} \in 0, 1$.

Положительные действительные параметры $\overline{p}$, $\overline{r}$, $\overline{\alpha}$, $\overline{T}_R$ и матрица W задаются заранее и не меняются в процессе функционирования сети. Элементы матрицы M меняются в процессе функционирования сети. Элементы матриц W и M имеют следующий смысл: w_{ij} — вес синаптической связи, ведущей от i-го элемента к j-му; m_{ij} — бинарный индикатор синаптического воздействия, которое передается по связи, ведущей от i-го элемента к j-му. А именно, если в момент времени t воздействия нет, то $m_{ij}(t) = 0$; если воздействие есть, то $m_{ij}(t) = 1$.

Поведение произвольного k-го элемента МОНЭ-сети определяется двумя функциями, зависящими от времени t:

- $S^k(t)$ — состояние элемента, $S^k(t) \in \{0, 1\}\ \forall t\ \forall k$;
- $U^k(t)$ — значение мембранного потенциала, $-1 \le U^k(t) \le \overline{p}\ \forall t\ \forall k$.

Функция состояния элемента $S^k(t)$ имеет следующий смысл. Если в произвольный момент времени t: $S^k(t) = 1$, то k-й элемент находится в состоянии восприимчивости. Если в произвольный момент времени t: $S^k(t) = 0$, то k-й элемент находится в состоянии рефрактерности.

Зададим начальное состояние МОНЭ-сети в нулевой момент времени:

- при каждом k зафиксируем $S^k(0) = \{0, 1\}$, т.е. часть элементов находится в состоянии восприимчивости, часть — в состоянии рефрактерности;
- если для произвольного k-го элемента $S^k(0) = 0$, то $U^k(0) = U_0^k$, где $U_0^k \in [-1, 0)$;
- если для произвольного k-го элемента $S^k(0) = 1$, то $U^k(0) = U_0^k$, где $U_0^k \in [0, \min(\overline{r}, \overline{p}))$;
- $m_{ij} = 0\ \forall i, j$ — отсутствие начального воздействия элементов друг на друга.

Переходя к описанию динамики МОНЭ-сети, введем некоторые определения.

Будем говорить, что в момент времени t^* происходит 0-событие для k-го элемента, если $\exists k : S^k(t^*) = 0, U^k(t^*) = 0$. Биологический смысл 0-события — выход k-го элемента из состояния рефрактерности.

Будем говорить, что в момент времени t^* происходит p-событие для k-го элемента, если $\exists k : U^k(t^*) = \overline{p}$. Биологический смысл p-события — генерация k-м элементом нервного импульса (спайка).

Под действием этих событий в МОНЭ-сети происходят следующие изменения.

Если в момент времени t^* происходит 0-событие для k-го элемента, то

- $S^k(t^* + 0) = 1$ (k-й элемент переходит в состояние восприимчивости);
- $m_{ik} = 0\,\forall i$ (устраняется внешнее воздействие на k-й элемент).

Если в момент времени t^* происходит p-событие для k-го элемента, то

- $S^k(t^*+0) = 0$ (k-й элемент генерирует импульс и тут же переходит в состояние рефрактерности);
- $U^k(t^* + 0) = -1$ (деполяризация мембранного потенциала);
- $m_{kj} = 1\forall j$ (k-й элемент начинает оказывать воздействие на остальные элементы сети).

Если в момент времени t^* в МОНЭ-сети происходит несколько событий для различных элементов, то сначала обрабатываются все 0-события в произвольном порядке (например, по возрастанию номеров элементов), затем все p-события, также в произвольном порядке.

Между событиями бинарные величины $S^k(t)$ не меняются. Меняются только величины мембранных потенциалов $U^k(t)$. Определим механизм этих изменений, задав тем самым динамику сети в произвольные моменты времени.

В нулевой момент времени событий в МОНЭ-сети нет. Начиная с нулевого момента времени и до первого по счету события в рассматриваемой сети динамика произвольного k-го элемента в произвольный момент времени t определяется следующим образом.

Если $S^k(t) = 0$, то $U^k(t)$ — решение дифференциального уравнения

$$\dot{U}^k = \frac{1}{\overline{T}_R} \tag{3}$$

с начальным условием $U^k(t_0) = U^k(0) = U_0^k$.

Если $S^k(t) = 1$, то $U^k(t)$ — решение дифференциального уравнения

$$\dot{U}^k = \overline{\alpha}(\overline{r} + \sum_{i=1}^{\overline{N}} m_{ik}w_{ik} - U^k) \tag{4}$$

с начальным условием $U^k(t_0) = U^k(0) = U_0^k$.

Аналогичным образом определяется динамика МОНЭ-сети между любой парой последовательных событий в моменты времени t_1 и t_2 ($t_1 < t_2$). В качестве момента времени для начальных условий берется t_1 с известными значениями $U^k(t_1)\,\forall k$.

Изложение модели модифицированной сети обобщенных нейронных элементов (МОНЭ-сети) завершено.

Уравнение (4) близко к уравнению, предложенному Дж. Хопфилдом в 1984 для описания одноименной непрерывной сети [7], но гораздо проще его, т.к. между каждой парой событий представляет собой уравнение с постоянными коэффициентами. Не содержит уравнение (4) и запаздывающего аргумента, что выгодно отличает его от нейросетевых моделей хопфилдовского типа, описываемых уравнениями с запаздыванием [8]. Все это позволяет легко исследовать МОНЭ-сети сколь угодно большого размера и произвольной топологии, а также имитировать их динамику на компьютере при численных исследованиях.

Перейдем к доказательству эквивалентности функционирования двух рассмотренных нейронных сетей: ОНЭ-сети и МОНЭ-сети. Введем определение эквивалентности функционирования обобщенного нейронного элемента и отдельного элемента МОНЭ-сети, а также сетей в целом.

Определение 1. *Будем говорить, что обобщенный нейронный элемент и элемент МОНЭ-сети с номером k функционируют эквивалентным образом, если в одной и той же временной шкале и в любой произвольный момент времени t выполняется следующее:*

- *если обобщенный нейронный элемент генерирует импульс, то для k-го элемента МОНЭ-сети происходит p-событие;*
- *если обобщенный нейронный элемент находится в состоянии рефрактерности, то для k-го элемента МОНЭ-сети $S^k(t) = 0$;*
- *если обобщенный нейронный элемент находится в состоянии восприимчивости, то для k-го элемента МОНЭ-сети $S^k(t) = 1$.*

Определение 2. *Будем говорить, что ОНЭ-сеть и МОНЭ-сеть функционируют эквивалентным образом, если*

- *в этих двух сетях одинаковое количество элементов;*
- *в этих двух сетях можно так пронумеровать элементы, что каждый i-й обобщенный нейронный элемент и i-й элемент МОНЭ-сети функционируют эквивалентным образом.*

Далее установим соответствие между параметрами моделей ОНЭ-сети и МОНЭ-сети. А именно:

$$\overline{N} = N, \quad \overline{p} = p, \quad \overline{r} = r, \quad \overline{\alpha} = \alpha, \quad \overline{T}_R = T_R, \quad w_{ij} = q_{i,j}, \quad T_m = +\infty. \tag{5}$$

Также необходимо согласовать начальные условия для ОНЭ-сети и МОНЭ-сети. А именно, пусть в нулевой момент времени:

$$S^k(0) = \begin{cases} 1, \text{ если } s^k(0) = \{\text{восприимчивость}\} \\ 0, \text{ если } s^k(0) = \{\text{рефрактерность}\} \end{cases} \tag{6}$$

Также необходимо синхронизировать значения мембранных потенциалов всех элементов в нулевой момент времени:

$$U^k(0) = \begin{cases} u^k(0), \text{ если } s^k(0) = \{\text{восприимчивость}\} \\ -R_0^k/T_R, \text{ если } s^k(0) = \{\text{рефрактерность}\} \end{cases} \tag{7}$$

Наконец, наложим условие отсутствия внешнего воздействия в ОНЭ-сети в нулевой момент времени:

$$T_0^{i,j} = 0 \ \forall i, j. \tag{8}$$

В МОНЭ-сети этому соответствует условие $m_{ij} = 0 \ \forall i, j$. Оно уже было наложено при задании начального состояния МОНЭ-сети.

Сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть даны произвольные ОНЭ-сеть и МОНЭ-сеть, параметры которых удовлетворяют условиям (5), а начальные состояния выбраны в соответствии с условиями (6) — (8).*

Тогда эти ОНЭ-сеть и МОНЭ-сеть функционируют эквивалентным образом в смысле определения 2.

Доказательство. Условие $\overline{N} = N$ означает, что в ОНЭ-сети и МОНЭ-сети одинаковое количество элементов. Согласованно пронумеруем элементы в этих сетях. Рассмотрим обобщенный нейронный элемент (входящий в состав данной ОНЭ-сети) и элемент данной МОНЭ-сети с одним и тем же произвольным номером k. Необходимо показать, что эти элементы функционируют эквивалентным образом, то есть проверить условия Определения 1 в произвольный момент времени t.

Рассмотрим сначала ситуацию при $t = 0$. Как уже отмечалось, в нулевой момент времени в МОНЭ-сети событий не происходит. В ОНЭ-сети в нулевой момент времени также не происходит ни генерации импульса каким-либо элементом, ни выхода какого-либо элемента из состоянии рефрактерности. Условие (6) обеспечивает согласованный выбор состояния k-го ОНЭ и k-го элемента МОНЭ-сети. Тем самым условия Определения 1 выполнены при $t = 0$.

Теперь рассмотрим промежуток времени $(0; t_1)$, где t_1 — момент первого по времени события в МОНЭ-сети. Условие (7) — (8) и уравнение (2) модели обобщенного нейронного элемента обеспечивают, что при $t \in (0; t_1)$ в ОНЭ-сети также не происходит ни генерации импульса каким-либо элементом, ни выхода какого-либо элемента из состоянии рефрактерности. Это позволяет легко рассмотреть динамику изменения мембранного потенциала k-го ОНЭ и k-го элемента МОНЭ-сети сразу на всем промежутке $(0; t_1)$. В зависимости от состояния ОНЭ возможны два случая.

Если $s^k(0) = \{\text{рефрактерность}\}$ и по условию (6) $S^k(0) = 0$, то условие $U^k(0) = -R_0^k/T_R$ обеспечивает выход k-го ОНЭ из состояния рефрактерности и 0-событие для k-го элемента МОНЭ-сети (с учетом уравнения (3)) в один и тот же момент времени R_0^k. В частности, $s^k(t) = \{\text{рефрактерность}\}$ и $S^k(t) = 0$ при $t \in (0; t_1)$.

Если $s^k(0) = \{\text{восприимчивость}\}$ и по условию (6) $S^k(0) = 1$, то условие $U^k(0) = u^k(0)$ обеспечивает следующее. Уравнение (2) динамики мембранного потенциала k-го обобщенного нейронного элемента принимает вид $\dot{u}^k = \alpha(r - u^k)$ с начальным условием $u^k(0) = u_0^k$. Уравнение (4) динамики мембранного потенциала k-го элемента МОНЭ-сети принимает вид $\dot{U}^k = \overline{\alpha}(\overline{r} - U^k)$ с тем же самым начальным условием $U^k(0) = U_0^k$. Очевидно, их решения $u^k(t)$ и $U^k(t)$ совпадают при $t \in (0; t_1)$. Значит, генерация импульса данным k-м ОНЭ (при $u^k(t) = p$) и p-событие для данного k-го элемента МОНЭ-сети произойдут в один и тот же момент времени. По крайней мере, если не произойдет внешнего воздействия на рассматриваемые элементы в их сетях. Если же такое внешнее воздействие будет иметь место, то согласованный вид уравнений (2) и (4) обеспечит также одинаковую динамику изменения мембранных потенциалов k-го обобщенного нейронного элемента и k-го элемента МОНЭ-сети. Продемонстрируем это чуть позже. Пока же при $t \in (0; t_1)$ условия Определения 1 выполнены.

В момент времени t_1 в МОНЭ-сети происходит какое-то событие для j-го элемента (в том числе, возможно, что $j = k$). Рассмотрев динамику j-го ОНЭ при $t \in (0; t_1)$, легко убедиться в том, что именно в момент времени t_1 данный j-й ОНЭ либо генерирует импульс, либо выходит из состояния рефрактерности. А именно, если в МОНЭ-сети происходит 0-событие для j-го элемента, то j-й ОНЭ выходит из состояния рефрактерности. Если же если в МОНЭ-сети происходит p-событие для j-го элемента, то j-й ОНЭ генерирует импульс. Это достигается за счет согласования параметров сетей (4) и согласованным заданием начального состояния (6) — (8). Действия при обработке 0-события и p-события, изложенные в описании модели МОНЭ-сети, приводят к тому, что состояние $S^j(t)$ и динамика мембранного потенциала j-го элемента МОНЭ-сети (и всех остальных — в случае p-события) изменяются с таким расчетом, что условия Определения 1 оказываются выполнены при $t = t_1$. Причем изменения матрицы M индикаторов синаптического воздействия (в случае p-события) приводят к изменению правой части уравнения (4) для некоторых элементов МОНЭ-сети (возможно, что и k-го элемента). Но точно такие же изменения для ОНЭ с теми же самыми номерами претерпевает и правая часть уравнения (2), описывающего динамику мембранного потенциала ОНЭ. Это происходит за счет ступенчатого вида функций $\sigma_i^m(t)$ и условия $T_m = +\infty$.

Теперь рассмотрим промежуток времени $(t_1; t_2)$, где t_2 — момент следующего по времени события в МОНЭ-сети. На этом промежутке рассуждения проводятся аналогичным образом. Затем можно рассмотреть момент времени t_2 и так далее.

Поскольку обе модели носят детерминированный характер, то и в дальнейшем условия Определения 1 останутся верными для произвольных k-го ОНЭ и k-го элемента МОНЭ-сети. Значит, данные ОНЭ-сеть и МОНЭ-сеть функционируют эквивалентным образом. Теорема доказана.

Список литературы / References

[1] Майоров В. В., Коновалов Е. В., “Обобщенный нейронный автомат в задаче распространения волны возбуждения по нейронной сети”, *Нейрокомпьютеры: Разработка, применение*, Радиотехника, М., 2007, 3–8; [Mayorov V. V., Konovalov E. V., “Obobshchennyy neyronnyy avtomat v zadache rasprostraneniya volny vozbuzhdeniya po neyronnoy seti”, *Neirokompiutery: Razrabotka, primenenie*, Radiotehnika, M., 2007, 3–8, (in Russian).]

[2] Коновалов Е. В., “Устойчивый колебательный режим в нейронной сети обобщенных нейронных автоматов-детекторов”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **14**:2 (2007), 30–35; [Konovalov E. V., “The stable oscillatory regime in a neuron net consisting of generalized automatic neuron-detectors”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **14**:2 (2007), 30–35, (in Russian).]

[3] Коновалов Е. В., “Задача адаптации обобщенного нейронного элемента”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **19**:1 (2012), 69–83; [Konovalov E. V., “The problem of adaptation of the generalized neural element”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **19**:1 (2012), 69–83, (in Russian).]

[4] Крюков В. И., Борисюк Г. Н., Борисюк Р. М., Кириллов А. Б., Коваленко Е. И., *Метастабильные и неустойчивые состояния в мозге*, НЦБИ АН СССР, Пущино, 1986; [Kryukov V. I., Borisyuk G. N., Borisyuk R. M., Kirillov A. B., Kovalenko E. I., *Metastabilnye i neustoychivye sostoyaniya v mozge*, NTsBI AN SSSR, Pushchino, 1986, (in Russian).]

[5] Майоров В. В., Мышкин И. Ю., “Математическое моделирование нейронов сети на основе уравнений с запаздыванием”, *Математическое моделирование*, **2**:11 (1990), 64–76; [Mayorov V. V., Myshkin I. Yu., “Matematicheskoe modelirovanie neyronov seti

na osnove uravneniy s zapazdyvaniem", *Matematicheskoe modelirovanie*, **2**:11 (1990), 64–76, (in Russian).]

[6] Коновалов Е. В., "Задача о пачечном воздействии на обобщенный нейронный автомат", *Моделирование и анализ информационных систем*, **14**:3 (2007), 43–49; [Konovalov E. V., "The problem of berst influence on the generalized automatic neuron", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **14**:3 (2007), 43–49, (in Russian).]

[7] Hopfield J. J., "Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons", *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **81** (1984), 3088–3092.

[8] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., "Релаксационные автоколебания в сетях Хопфилда с запаздыванием", Сер. матем., **77**, 2013, 53–96; [Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., "Relaxation self-oscillations in Hopfield networks with delay", Mathematics, **77**, 2013, 271–312].

Konovalov E. V., "Equivalence of Conventional and Modified Network of Generalized Neural Elements", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:5 (2016), 657–666.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-5-657-666

Abstract. The article is devoted to the analysis of neural networks consisting of generalized neural elements. The first part of the article proposes a new neural network model — a modified network of generalized neural elements (MGNE-network). This network developes the model of generalized neural element, whose formal description contains some flaws. In the model of the MGNE-network these drawbacks are overcome. A neural network is introduced all at once, without preliminary description of the model of a single neural element and method of such elements interaction. The description of neural network mathematical model is simplified and makes it relatively easy to construct on its basis a simulation model to conduct numerical experiments. The model of the MGNE-network is universal, uniting properties of networks consisting of neurons-oscillators and neurons-detectors. In the second part of the article we prove the equivalence of the dynamics of the two considered neural networks: the network, consisting of classical generalized neural elements, and MGNE-network. We introduce the definition of equivalence in the functioning of the generalized neural element and the MGNE-network consisting of a single element. Then we introduce the definition of the equivalence of the dynamics of the two neural networks in general. It is determined the correlation of different parameters of the two considered neural network models. We discuss the issue of matching the initial conditions of the two considered neural network models. We prove the theorem about the equivalence of the dynamics of the two considered neural networks. This theorem allows us to apply all previously obtained results for the networks, consisting of classical generalized neural elements, to the MGNE-network.

Keywords: neural networks, models of neural element, generalized neural element, MGNE-network

On the authors:
Evgeniy V. Konovalov, orcid.org/0000-0001-8532-487X, PhD,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: kinnarts@mail.ru

Acknowledgments:
This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research under the Grant No 14-01-31431.