Модел. и анализ информ. систем. Т. **19**, № **4** (2012) 59–66

УДК 517.977

Счетные идеалы в полурешетке $\mathbf{D}_e$ степеней перечислимости

Тихов В.В.

Шуйский государственный педагогический университет

e-mail: tixov_valerii@mail.ru

получена 30 марта 2012

Ключевые слова: идеал, главный идеал степеней перечислимости, сводимость по перечислимости, квазиминимальная степень перечислимости

Доказано, что любой счетный идеал в полурешетке степеней перечислимости является пересечением двух главных идеалов, порожденных квазиминимальными накрывающими данного идеала.

Будем придерживаться терминологии и обозначений, принятых в монографии [1]. Пусть ω – множество натуральных чисел, $A, B, ..., Y, Z \subseteq \omega$. $\langle x, y\rangle$– канторовский номер упорядоченной пары (x, y). D_u – конечное множество с каноническим индексом u ,D – переменная для конечных множеств.

Решёткой $L = (L; \leq, \vee, \wedge)$ называется такое частично упорядоченное (ч. у.) множество, в котором любые два элемента имеют наименьшую верхнюю грань (называемую также супремумом или объединением) и наибольшую нижнюю грань (называемую также инфимумом или пересечением). Если a и b – элементы решётки L, то $a \vee b$ обозначает наименьшую верхнюю грань элементов a и b, и $a \wedge b$ обозначает их наибольшую нижнюю грань.

Непустое подмножество $\mathbf{I} \subseteq L$ образует *идеал* $\mathbf{I} = (I; \leq; \vee; \wedge)$ в L, если I удовлетворяет условиям:

(1) $\forall a, b[a \in L \ \&\ b \in I \ \&\ a \leq b \Rightarrow a \in I]$, и

(2) $\forall a, b[a \in I \ \&\ b \in I \Rightarrow a \vee b \in I]$.

Если L – решетка и $a \in L$, то $I(a) = \{b \in L : b \leq a\}$ называется *главным идеалом*, порожденным элементом a. $\mathbf{I}$ – главный идеал, если $\mathbf{I} = (a)$, для некоторого a.

Множество A сводится по перечислимости (или e-сводится) к множеству B (символически $A \leq_e B$), если существует равномерный алгоритм для получения некоторого перечисления A из любого перечисления B. Формально,

$$A \leq_e B \Leftrightarrow \exists t \forall x[x \in A \Leftrightarrow \exists u[\langle x, u\rangle \in W_t \ \&\ D_u \subseteq B]].$$

Обозначим через $\Phi_t : 2^\omega \to 2^\omega$ t-й e-оператор, такой, что для любого X

$$\Phi_t(X) = \{x : \exists u[\langle x, u\rangle \in W_t \ \&\ D_u \subseteq X]\}.$$

Таким образом, $A \le_e B \Leftrightarrow \exists t[A = \Phi_t(B)]$. Хорошо известно, что e-операторы монотонны и непрерывны, т. е. для любого t и любых X, Y

$$X \subseteq Y \to \Phi_t(X) \subseteq \Phi_t(Y)$$

и

$$\forall x[x \in \Phi_t(X) \to (\exists D)[D \subseteq X \ \& \ x \in \Phi_t(D)]].$$

$A \equiv_e B \Leftrightarrow A \le_e B \ \& \ B \le_e A$, $d_e(A) = \{X : X \equiv_e A\}$ – степень перечислимости или e-степень множества A и $d_e(A) \le d_e(B) \Leftrightarrow A \le_e B$[1]. Для обозначения e-степеней будем использовать также малые полужирные латинские буквы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, ...$ (с индексами или без). Если e-степени $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ несравнимы относительно $\le$, то обозначим это через $\mathbf{a}|\mathbf{b}$, а также $\mathbf{a} < \mathbf{b}$, если $\mathbf{a} \le \mathbf{b} \ \& \ \mathbf{b} \not\le \mathbf{a}$.

$\mathbf{D}_e$ – множество e-степеней, упорядоченное отношением $\le$. $\mathbf{D}_e$ – верхняя полурешетка, в которой $\mathbf{a} \vee \mathbf{b} = d_e(A \oplus B)$, где $A \oplus B = \{2x : x \in A\} \cup \{2x+1 : x \in B\}$.

Теорема, подобная доказанной ниже, была сформулирована и доказана ранее Спектром применительно к верхней полурешетке T-степеней в [3].

Теорема. *Любой счетный идеал в* $\mathbf{D}_e$ *является пересечением двух главных идеалов.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{A} = \{u_i : i \in \omega\}$ – произвольный счетный идеал в $\mathbf{D}_e$. Если $\mathbf{A}$ – главный идеал, то теорема очевидно верна.

Предположим, что $\mathbf{A}$ не является главным идеалом и $\mathbf{a}_0 = \mathbf{u}_0, \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_0 \vee \mathbf{u}_1, ...\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_{i-1} \vee \mathbf{u}_i, ...$ По нашему построению и т.к. $\mathbf{A}$ является счетным идеалом, ясно, что

1. $\{\mathbf{a}_i : i \in \omega\} \subseteq \mathbf{A}$ (фактически, $\{\mathbf{a}_i : i \in \omega\} = \mathbf{A}$),
2. $\mathbf{a}_0 \le \mathbf{a}_1 \le ... \le \mathbf{a}_i \le ...$,
3. $\forall i \exists j[\mathbf{a}_i < \mathbf{a}_j]$,
4. $\forall i[\mathbf{u}_i \le \mathbf{a}_i]$,.

Обозначим через $\omega_k = \omega - \{0, ..., k-1\}$ для всех $k = 1, 2, ..., \omega_0 = \omega$ и $\hat{X}_s = \bigcup_{i=0}^{s} \{\langle i, x\rangle : x \in X_i\}$, где $\{X_i : i \in \omega\}$ – произвольная последовательность множеств. Пусть $\mathbf{a}_i = d_e(A_i)$, для всех $i \in \omega$.

Построим с помощью пошаговой конструкции множества B и C, которые удовлетворяют следующим требованиям:

$(\alpha_{\langle k,l\rangle}) : \Phi_k(B) = \Phi_l(C) \Rightarrow \exists i[\Phi_k(B) \le_e A_i]$;

$(\beta) : \forall i[A_i \le_e B]$;

$(\gamma) : \forall i[A_i \le_e C]$.

На каждом шаге t конструкции мы полагаем $B_t = \hat{A}^*_p$ и $C_t = \hat{A}^*_q$, где p и q зависят от t и A^*_i отличаются от A_i не более чем конечное множество своих элементов. Ясно, что в этом случае $A_i^* \equiv_e A_i$ для всех $i \in \omega$. По нашему выбору $A_0 \leq_e A_1 \leq_e ... \leq_e A_i \leq_e ...$, поэтому

$$\forall t[\exists i[B_t \leq_e A_i]\&\exists j[C_t \leq_e A_j]]$$

В результате конструкции мы определили два множества $B = \bigcup\limits_{t=0}^{\infty} B_t$ и $C = \bigcup\limits_{t=0}^{\infty} C_t$. Заметим, что в процессе построения множеств B и C мы используем одинаковые обозначения A_i^* для множеств, которые на некотором шаге становятся частями этих множеств. Они отличаются от A_i не более, чем на конечные множества, но эти конечные множества могут быть различными.

Сначала мы докажем, что если все требования удовлетворены, то $\mathbf{A} = (\mathbf{b})\bigcap(\mathbf{c})$.

Пусть $\mathbf{a}_i \in \mathbf{A}$. По свойствам (β) и (γ) получаем: $\forall i[\mathbf{a}_i \leq (\mathbf{b})\&\mathbf{a}_i \leq (\mathbf{c})] \Rightarrow \mathbf{a}_i(\mathbf{b}) \cap (\mathbf{c})$, т.е. $\mathbf{A} \subseteq (\mathbf{b}) \cap (\mathbf{c})$.

Пусть $\mathbf{x} \in (\mathbf{a}) \cap (\mathbf{b})$, тогда $\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ и $\mathbf{x} \leq \mathbf{c}$ и k, l такие, что $X = \Phi_k(B) = \Phi_l(C)$. По свойству $(\alpha_{\langle k,l \rangle})$ $\exists i[X = \Phi_k(B) \leq_e A_i]$, следовательно, $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$. Итак, $(\mathbf{b}) \cap (\mathbf{c}) \subseteq \mathbf{A}$.

Мы получаем, что утверждение $\mathbf{A} = (\mathbf{b})\bigcap(\mathbf{c})$ верно, если все требования удовлетворены.

Как следует из описанной ниже конструкции, $B = \bigcup_{i\in\omega}\{\langle i, x\rangle : x \in A_i^*\}$, поэтому для всех $i \in \omega$

$$\forall x[x \in A_i^* \Leftrightarrow \langle i, x\rangle \in B],$$

откуда следует, что $A_i \leq_e A_i^* \leq_e B$, т.е. требование (β) удовлетворено. Аналогично доказывается, что требование (γ) также удовлетворено.

Описание конструкции. Переменные D, F и G определены на множестве конечных множеств.

Шаг 0: Полагаем $B_0 = C_0 = \hat{A}_0$.

Шаг 2s+1: Пусть $s = \langle k, l\rangle$, $B_{2s} = \hat{A}_p^*$ для некоторого p. Проверим выполнимость условия

$$\begin{gathered}(\exists D \subset \omega_{p+1} \times \omega)(\exists F \subset \omega_{q+1} \times \omega)(\exists x)[x \in \Phi_k(B_{2s} \bigcup D)\& \\ \&(\forall G \supset F)[G \subset \omega_{q+1} \times \omega \Rightarrow x\in\Phi_l(C_{2s} \bigcup G)]]\end{gathered} \tag{1}$$

Если (1) выполнено, то D^* и F^* имеют канонический индекс среди D и F, удовлетворяющий (1). Пусть $i^* = max\langle D^*\rangle_1$ и $j^* = max\langle F^*\rangle_1$. Полагаем

$$B_{2s+1} = B_{2s} \bigcup(\bigcup_{i=p+1}^{i^*} \hat{A}_i) \bigcup D^* \text{ и } C_{2s+1} = C_{2s} \bigcup(\bigcup_{j=q+1}^{j^*} \hat{A}_j) \bigcup F^*.$$

Следовательно, множество A_i^*, используемое для формирования множества B_{2s+1}, получено из A_i добавлением элементов из $\{x : \langle i, x\rangle \in D^*\}$ для каждого $i \in \{p + 1, ..., i^*\}$. Аналогично, A_i^*, используемое для формирования множества C_{2s+1}, получено из A_j добавлением элементов из $\{x : \langle j, x\rangle \in F^*\}$ для каждого $i \in \{q+1, ..., j^*\}$.

Если (1) не выполнено, то полагаем $B_{2s+1} = B_{2s}$ и $C_{2s+1} = C_{2s}$.

Шаг $2s + 2$. Проверяем выполнимость условия

$$B_{2s+1} \neq B_{2s}.$$

Если оно выполнено, то сразу переходим к следующему шагу.

Пусть $s = \langle l, x\rangle$, $B_{2s+1} = B_{2s}$ и $C_{2s+1} = \hat{A}^*_q$ для некоторого q. Проверим выполнимость условия

$$(\exists F \subset \omega_{q+1} \times \omega)[x \in \Phi_l(C_{2s+1} \bigcup F)]). \tag{2}$$

Если (2) выполнено, то пусть F^* имеет наименьший канонический индекс среди конечных множеств F, удовлетворяющих условию (2). Пусть $j^* = max\langle F^*\rangle_1$. Полагаем $B_{2s+2} = B_{2s+1}$ и

$$C_{2s+2} = C_{2s+1} \bigcup (\bigcup_{j=q+1}^{j^*} \{j\} \times A_j) \bigcup F^*.$$

Если (2) не выполнено, то полагаем $C_{2s+2} = C_{2s+1}$.

Описание конструкции завершено.

Докажем теперь, что требования $\alpha \langle k, i\rangle$ удовлетворены для всех $k, l \in \omega$. Пусть $X = \Phi_k(B) = \Phi_l(C)$ и $s = \langle k, l\rangle$. Рассмотрим шаг *2s+1*. Пусть на этом шаге $B_{2s} = \hat{A}^*_p$ для некоторого p и $C_{2s} = \hat{A}^*_q$ для некоторого q. Сначала мы докажем, что

$$\Phi_k(B) = \{x : (\exists D \subset \omega_{p+1} \times \omega)[x \in \Phi_k(B_{2s} \bigcup D)]. \tag{3}$$

В действительности пусть $H = \{x : (\exists D \subset \omega_{p+1} \times \omega)[x \in \Phi_k(B_{2s} \bigcup D)]\})$, убедимся, что $\Phi_k(B) \subseteq H$ и $H \subseteq \Phi_k(B))$. $B = \bigcup_{i\in\omega}\{\langle i, x\rangle : x \in A^*_i$, $B_{2s} = \hat{A}^*_i \Rightarrow B \subseteq (B_{2s} \bigcup D) \Rightarrow \Phi_k(B) \subseteq H$. А т.к. $B = \bigcup B_{2s}$, то $B_{2s} \bigcup D \subseteq B \Rightarrow H \subseteq \Phi_k(B)$. Отсюда $\Phi_k(B) = H$.

Следовательно,

$$\Phi_k(B) = \{x : (\exists D \subset \omega_{p+1} \times \omega)[x \in \Phi_k(B_{2s} \bigcup D)] = \Phi_k(B_{2s} \bigcup (\omega_{p+1} \times \omega)).$$

Ясно, что $\Phi_k(B_{2s} \bigcup (\omega_{p+1} \times \omega)) \leq_e (B_{2s})$, поэтому $\Phi_k(B) \leq_e A_i$ для некоторого i. Итак, доказано, что требование $\alpha_{\langle k,i\rangle}$ удовлетворено.

Теорема доказана.

Следствие 1. Если $\mathbf{A}$ является неглавным счетным идеалом и $\mathbf{A} = (\mathbf{b}) \bigcap (\mathbf{c})$, то $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ – несравнимые e-степени.

Доказательство.Предположим, что $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ сравнимы. Пусть для определенности, $\mathbf{b} \leq \mathbf{c}$, тогда $(\mathbf{b}) \cap (\mathbf{c}) = (\mathbf{b})$ и $\mathbf{A}$-главный идеал.

Определение 1. $\mathbf{A}$ – идеал, e-степень $\mathbf{b}$ называется накрывающей для $\mathbf{A}$, если для любой e-степени $\mathbf{x}$

$$\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \Rightarrow (\exists \mathbf{a} \in \mathbf{A})[\mathbf{x} \leq \mathbf{a}]$$

Определение 2. e-степень $\mathbf{b} \neq 0$ называется квазиминимальной, если для любой тотальной e-степени $\mathbf{f}$

$$\mathbf{f} \leq \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{f} = 0.$$

Определение 3. Пусть $\mathbf{c} < \mathbf{b}$, e-степень $\mathbf{b}$ называется c-квазиминимальной, если для любой тотальной e-степени $\mathbf{f}$

$$\mathbf{f} \leq \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{f} \leq \mathbf{c}.$$

Определение 4. $\mathbf{A}$ – идеал, e-степень $\mathbf{b}$ называется квазиминимальной накрывающей для $\mathbf{A}$, если для любой тотальной e - степени $\mathbf{f}$

$$\mathbf{f} \leq \mathbf{b} \Rightarrow (\exists \mathbf{a} \in \mathbf{A})[\mathbf{f} \leq \mathbf{a}]$$

Предложение 1.e-степень $\mathbf{b}$ является c-квазиминимальной тогда и только тогда, когда $\mathbf{b}$ является квазиминимальной накрывающей для $(\mathbf{c})$.

Доказательство. $\Rightarrow$: $\mathbf{b}$ c-квазиминимальна, тогда $\forall \mathbf{f}[\mathbf{f} \leq \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{f} \leq \mathbf{c}]$, отсюда $\mathbf{f} \in (\mathbf{c}) \Rightarrow \exists \mathbf{a} \in (\mathbf{c})$ такое, что $\mathbf{f} \leq a$
$\Leftarrow$: $\mathbf{b}$ – квазиминимальная накрывающая для $(\mathbf{c})$, тогда $\forall \mathbf{f}[\mathbf{f} \leq \mathbf{b} \Rightarrow (\exists \mathbf{a} \in (\mathbf{c}))[\mathbf{f} \leq \mathbf{a}]] \Rightarrow \mathbf{f} \leq \mathbf{c}$.

Следствие 2. Если $\mathbf{A}$ является неглавным счетным идеалом, то существуют квазиминимальные накрывающие $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ для $\mathbf{A}$, такие что $\mathbf{A} = (\mathbf{b}) \bigcap (\mathbf{c})$.

Доказательство. Для доказательства построим с помощью пошаговой конструкции множества $(\mathbf{b})$ и $\mathbf{c}$, удовлетворяющую свойствам $(\alpha_{\langle k,i \rangle})$, (β), (γ) и

(δ) : $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ являются квазиминимальными накрывающими e-степенями для $\mathbf{A}$.

Шаг 0: Полагаем $B_0 = C_0 = \hat{A}_0$.
Шаг 4s+1: Пусть $s = \langle k, l \rangle$, $B_{4s} = \hat{A}^*_p$ и $C_{4s} = \hat{A}^*_q$ для некоторых p и q. Проверим выполнимость условия

$$\begin{gathered}(\exists D \subset \omega_{p+1} \times \omega)(\exists F \subset \omega_{q+1} \times \omega)(\exists x)[x \in \Phi_k(B_{4s} \bigcup D)\& \\ \&(\forall G \supset F)[G \subset \omega_{q+1} \times \omega \Rightarrow x \in \Phi_l(C_{4s} \bigcup G)]]\end{gathered} \tag{4}$$

Если (1) выполнено, то D^* и F^* имеют канонический индекс среди D и F, удовлетворяющий (1). Пусть $i^* = max\langle D^* \rangle_1$ и $j^* = max\langle F^* \rangle_1$. Полагаем

$$B_{4s+1} = B_{4s} \bigcup (\bigcup_{i=p+1}^{i^*} \hat{A}_i) \bigcup D^* \text{ и } C_{4s+1} = C_{4s} \bigcup (\bigcup_{j=q+1}^{j^*} \hat{A}_j) \bigcup F^*.$$

Следовательно, множество A^*_i, используемое для формирования множества B_{4s+1}, получено из A_i добавлением элементов из $\{x : \langle i, x \rangle \in D^*\}$ для каждого $i \in \{p + 1, ..., i^*\}$. Аналогично, A^*_i, используемое для формирования множества C_{4s+1}, получено из A_j добавлением элементов из $\{x : \langle j, x \rangle \in F^*\}$ для каждого $i \in \{q+1, ..., j^*\}$.
Если (1) не выполнено, то полагаем $B_{4s+1} = B_{4s}$ и $C_{4s+1} = C_{4s}$.
Шаг $4s + 2$. Проверяем выполнимость условия

$$B_{4s+1} \neq B_{4s}.$$

Если оно выполнено, то сразу переходим к следующему шагу, при этом $B_{4s+2} = B_{4s+1}$ и $C_{4s+2} = C_{4s+1}$.

Пусть $s = \langle l, x\rangle$, $B_{4s+1} = B_{4s}$ и $C_{4s+1} = \hat{A}^*_q$ для некоторого q. Проверим выполнимость условия

$$(\exists F \subset \omega_{q+1} \times \omega)[x \in \Phi_l(C_{4s+1} \bigcup F)]). \tag{5}$$

Если (5) выполнено, то пусть F^* имеет наименьший канонический индекс среди конечных множеств F, удовлетворяющих условию (5). Пусть $j^* = max\langle F^*\rangle_1$. Полагаем $B_{4s+2} = B_{4s+1}$ и

$$C_{4s+2} = C_{4s+1} \bigcup (\bigcup_{j=q+1}^{j^*} \hat{A}_j) \bigcup F^*.$$

Если (5) не выполнено, то полагаем $C_{4s+2} = C_{4s+1}$.

Шаг $4s + 3$. Цель шагов $4s + 3$, $s \in \omega$, – добиться того, чтобы в результате конструкции e-степень $\mathbf{b} = d_e(\cup_{t\in\omega} B_t)$ стала квазиминимальной накрывающей для идеала $\mathbf{A}$.

Пусть $B_{4s+2} = \hat{A}^*_p$ для некоторого p.

Проверим

$$\exists D[D \subseteq \omega_{p+1} \times \omega \& \Phi_s(B_{4s+2} \bigcup D) \text{ неоднозначно}]. \tag{6}$$

Если (6) выполнено, то полагаем

$$B_{4s+3} = B_{4s+2} \bigcup (\bigcup_{i=p+1}^{i^*} \hat{A}_i) \bigcup D^*$$

где D^* имеет наименьший канонический индекс среди D, удовлетворяющих (6), $i^* = max\langle D^*\rangle_1$.

Если (6) не выполнено, то имеет место

$$\forall D[D \subseteq \omega_{p+1} \times \omega \Rightarrow \Phi_s(B_{4s+2} \bigcup D) \text{ однозначно }] \tag{7}$$

Полагаем в этом случае $B_{4s+3} = \{B_{4s+2} \cup \langle p+1, x\rangle : x \in A_{p+1}\}$. В любом случае полагаем $C_{4s+3} = C_{4s+2}$.

Возьмем произвольный пересчет множества B и выделим из него все элементы вида $\langle s, x\rangle$. Множество $B_s = \cup_{i\leq s}\tilde{A}^s = \{x : \langle s, x\rangle \in A\}$ отличается от A_s, не более чем на конечное множество, которое добавлено к B_i на шагах i, где $i \leq 4s + 2$ в случае, когда условие (6) выполнено. Поэтому $A_s \leq_e \tilde{A}^s \leq_e B$. Предположим, что $B_{4s+2} \leq_e A_s$ для некоторого $s \in \omega$. Тогда, например, $A_{s+1} \leq_e B \leq_e A_s$, что противоречит нашему выбору последовательности A_s. Таким образом, $A_s <_e B$ для всех $s \in \omega$.

Пусть $f \leq_e B$ для некоторой тотальной функции f, т.е. $\tau f = \Phi_s(B)$ некоторого $s \in \omega$. Рассмотрим шаг $4s+3$ и покажем, что на этом шаге не выполняется условие (6). Допустим, что (6) выполнено. Тогда $\Phi_s(B_{4s+2} \cup D)$ неоднозначно для некоторого конечного множества $D \subsetneq \omega_{p+1} \times \omega$ и D^*, которое выбрано в этом случае, будет подмножеством B. Следовательно, $\Phi_s(B)$ также неоднозначное множество, что противоречит первоначальному предположению. Теперь проверим, что $\Phi_s(B_{4s+2} \cup \omega_{p+1} \times \omega)$ —- однозначное множество. Пусть это не верно. Тогда $\Phi_s(D)$ не является однозначным для некоторого конечного $D \subset B_{4s+2} \cup \omega_{p+1} \times \omega$ и условие (6) должно быть удовлетворено, что невозможно по нашему предположению. Следовательно, $\Phi_s(B_{4s+2} \cup \omega_{p+1} \times \omega)$ — однозначное множество. Имеем $\tau f = \Phi_s(B) \subseteq \Phi_s(B_{4s+2} \cup \omega_{p+1} \times \omega)$, и $f : \omega \to \omega$ — тотальная функция. Поэтому $\tau f = \Phi_s(B_{4s+2} \cup \omega_{p+1} \times \omega)$ и $\tau f \leq_e B_{4s+2} \cup \omega_{p+1} \times \omega) \leq_e B_{4s+2}$.

Итак, $\tau f \leq_e B_{4s+2} \leq_e A_p$ для некоторого p.

Следовательно, $\forall \mathbf{f}[\mathbf{f} \leq \mathbf{b} \Rightarrow (\exists \mathbf{a} \in \mathbf{A})[\mathbf{f} \leq \mathbf{a}]]$ и $\mathbf{b}$ – квазиминимальная накрывающая для $\mathbf{A}$.

Шаг $4s+4$. Цель шагов $4s+4$, $s \in \omega$ – добиться того, чтобы в результате конструкции e-степень $\mathbf{c} = d_e(\cup_{t\in\omega} C_t)$ стала квазиминимальной накрывающей для идеала $\mathbf{A}$.

Пусть $C_{4s+3} = \hat{A}^*_q$ для некоторого q.

Проверим
$$\exists F[F \subseteq \omega_{q+1} \times \omega \& \Phi_s(C_{4s+3} \bigcup F) \text{ неоднозначно}]. \tag{8}$$

Если (8) выполнено, то полагаем
$$C_{4s+3} = C_{4s+3} \bigcup (\bigcup_{i=q+1}^{i^*} \hat{A}_i) \bigcup F^*$$
где F^* имеет наименьший канонический индекс среди D, удовлетворяющих (8), $i^* = max\langle F^* \rangle_1$.

Если (8) не выполнено, то имеет место
$$\forall F[F \subseteq \omega_{q+1} \times \omega \Rightarrow \Phi_s(C_{4s+3} \bigcup F) \text{ однозначно }]. \tag{9}$$

Полагаем в этом случае $C_{4s+4} = \{C_{4s+3} \cup \langle q+1, x\rangle : x \in A_{q+1}\}$. В любом случае полагаем $B_{4s+4} = B_{4s+3}$.

Возьмем произвольный пересчет множества C и выделим из него все элементы вида $\langle s, x\rangle$. Множество $C_s = \cup_{i \leq s} \tilde{A}^s = \{x : \langle s, x\rangle \in A\}$ отличается от A_s не более чем на конечное множество, которое добавлено к C_i на шагах i, где $i \leq 4s+3$ в случае, когда условие (8) выполнено. Поэтому $A_s \leq_e \tilde{A}^s \leq_e C$. Предположим, что $C_{4s+3} \leq_e A_s$ для некоторого $s \in \omega$. Тогда, например, $A_{s+1} \leq_e C \leq_e A_s$, что противоречит нашему выбору последовательности A_s. Таким образом $A_s <_e C$ для всех $s \in \omega$.

Пусть $f \leq_e C$ для некоторой тотальной функции f, т.е. $\tau f = \Phi_s(C)$ некоторого $s \in \omega$. Рассмотрим шаг $4s+3$ и покажем, что на этом шаге не выполняется условие (8). Допустим, что (8) выполнено. Тогда $\Phi_s(C_{4s+3} \cup F)$ неоднозначно для некоторого конечного множества $D \subseteq \omega_{p+1} \times \omega$ и F^*, которое выбрано в этом случае, будет подмножеством B. Следовательно, $\Phi_s(C)$ также неоднозначное множество, что противоречит первоначальному предположению. Теперь проверим, что $\Phi_s(C_{4s+3} \cup \omega_{q+1} \times \omega)$ – однозначное множество. Пусть это не верно. Тогда $\Phi_s(F)$ не является однозначным для некоторого конечного $F \subset C_{4s+3} \cup \omega_{p+1} \times \omega$ и условие (8) должно быть удовлетворено, что невозможно по нашему предположению. Следовательно, $\Phi_s(C_{4s+3} \cup \omega_{q+1} \times \omega)$ – однозначное множество. Имеем $\tau f = \Phi_s(C) \subseteq \Phi_s(C_{4s+3} \cup \omega_{p+1} \times \omega)$, и $f : \omega \to \omega$ — тотальная функция. Поэтому $\tau f = \Phi_s(C_{4s+3} \cup \omega_{q+1} \times \omega)$ и $\tau f \leq_e C_{4s+3} \cup \omega_{q+1} \times \omega) \leq_e C_{4s+3}$.

Итак, $\tau f \leq_e C_{4s+2} \leq_e A_q$ для некоторого q.

Следовательно. $\forall \mathbf{f}[\mathbf{f} \leq \mathbf{c} \Rightarrow (\exists \mathbf{a} \in \mathbf{A})[\mathbf{f} \leq \mathbf{a}]]$ и $\mathbf{c}$ – квазиминимальная накрывающая для $\mathbf{A}$.

Теорема доказана.

Шаги вида $4s + 3$ и $4s + 4$ использовались ранее в статье [4] для построения c-квазиминимальных e-степеней для любой e-степени $\mathbf{c}$.

Список литературы

1. Соар Роберт И. Вычислимо перечислимые множества и степени. Казань: Казанское математическое общество, 2000.

2. Роджерс Х. Теория вычислимых функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972

3. Spector C. On degrees of recursive unsolvability // Ann. of math. 1956. 64.

4. Солон Б.Я. c-квазиминимальные степени перечислимости // Сибирский математический журнал. 2003. Том 44, №1. С. 211–223.

Countable Ideals in a Semi-Lattice of the D_e Enumeration Degrees

Tikhov V.V.

Keywords: ideals, principal ideal of enumeration degrees, enumeration reducible, quasi-minimal enumeration degree

In the article we have proved that any countable ideal in the semi-lattice of the $\mathbf{D}_e$ is the intersection of two principal ideals generated by quasi-minimal covers for this ideal.

Сведения об авторе:
Тихов Валерий Валерьевич,
Шуйский государственный педагогический университет, аспирант