Моделирование и анализ информационных систем. Т. 23, № 6 (2016), с. 784–803
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 23, No 6 (2016), pp. 784–803

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-6-784-803

УДК 517.994

Бифуркации периодических решений уравнения Мэкки–Гласса

Кубышкин Е. П., Морякова А.Р.[1]

получена 15 марта 2016

Аннотация. В работе изучаются бифуркации периодических решений из состояния равновесия известного уравнения Мэкки–Гласса, предложенного в качестве математической модели изменения плотности белых клеток крови. Уравнение, записанное в безразмерных переменных, содержит малый параметр при производной, что делает его сингулярным. К уравнению применяется метод равномерной нормализации, позволяющий свести исследование поведения решений в окрестности состояния равновесия к анализу счетной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, из которых выделяются уравнения «быстрой» и «медленных» переменных. Показано, что состояния равновесия уравнений «медленных» переменных определяют периодические решения. Анализ состояний равновесия позволяет изучить бифуркации периодических решений в зависимости от параметров уравнения и их устойчивость. Показана возможность одновременной бифуркации большого числа устойчивых периодических решений. Это явление носит название бифуркации мультистабильности.

Ключевые слова: уравнение Мэкки–Гласса, периодические решения, бифуркация мультистабильности

Для цитирования: Кубышкин Е. П., Морякова А.Р., "Бифуркации периодических решений уравнения Мэкки–Гласса", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:6 (2016), 784–803.

Об авторах:
Кубышкин Евгений Павлович, orcid.org/0000-0003-1796-0190, д-р. физ.-мат. наук, профессор,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: kubysh.e@yandex.ru

Морякова Алена Романовна, orcid.org/0000-0003-2529-6277, аспирант,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: alyona_moryakova@mail.ru

Благодарности:
[1]Работа выполнена при частичной поддержке проекта № 984 в рамках базовой части государственного задания на НИР ЯрГУ.

Введение

Уравнение Мэкки–Гласса

$$\dot{x} = -\gamma x + \beta x_\tau \theta^n (\theta^n + x_\tau^n)^{-1}, x_\tau = x(t-\tau), x(t) > 0, \tag{1}$$

в котором $\gamma,\ \beta,\ \theta,\ \tau$ – положительные параметры, $n \geq 3$ – натуральное число, является одним из простейших дифференциально-разностных уравнений с нелинейной запаздывающей обратной связью. Уравнение (1) предложено в монографии [1] в качестве математической модели изменения плостности $(x(t))$ циркулирующих в организме человека нейтрофилов (белых клеток крови). Входящие в (1) параметры имеют четкий биологический смысл. В [1] на основе численного интегрирования уравнения (1) показано существование различных периодических решений, из чего сделан вывод о периодическом изменении плотности нейтрофилов в организме человека.

Уравнение (1) обладает богатой динамикой. Оно изучалось в ряде работ ([2] – [7]), в которых анализировались различные свойства решений и на основе численного интегрирования показано существование разнообразных периодических решений, а также сложных, в том числе хаотических колебаний. В [5] рассмотрены некоторые обобщения уравнения (1). В работе [7] приведены результаты моделирования динамики уравнения (1) посредством электронного устройства. Отмечено существование хаотических колебаний, изучаются их спектральные свойства.

В настоящей работе изучаются периодические решения уравнения (2), бифурцирующие из его единственного состояния при изменении параметров уравнения, исследуется их устойчивость. Получены строгие теоремы об условиях бифуркации периодических решений, а также построены асимптотические формулы периодических решений. Показана возможность бифуркации одновременно большого числа устойчивых периодических решений – бифуркация мультистабильности. В качестве метода исследования используется метод равномерной нормализации, предложенный в [8].

1. Математическая постановка задачи, анализ устойчивости состояния равновесия

Перейдем в (1) к безразмерным переменным и параметрам, положив $x'(t) = \theta x(t)$, $t' = t/\tau$, $\varepsilon_1 = (\gamma\tau)^{-1}$, $\beta' = \beta/\gamma$. В результате, опустив штрих, получим уравнение

$$\varepsilon_1 \dot{x}(t) = -x(t) + \beta x(t-1)/(1 + x^n(t-1)),\ x(t) > 0, \tag{2}$$

в котором по физике задачи параметр β принимает значение порядка единицы, а $0 < \varepsilon_1 \ll 1$.

Уравнение (2) имеет единственное положительное состояние равновесия

$$x_* = (\beta - 1)^{1/n}, \tag{3}$$

устойчивость которого определяется значениями β и n. Ниже изучаются периодические решения уравнения (2), бифурцирующие из состояния равновесия (3) при изменении параметров ε_1 и β, исследуется их устойчивость.

Выполним в уравнении (2) замену $x(t) = x_* + y(t)$ и представим нелинейную часть уравнения (2) рядом Тейлора. В результате в окрестности состояния равновесия (3) поведение решений уравнения (2) будет определяться следующим уравнением:

$$\varepsilon_1 \dot{y}(t) + y(t) + b_1 y(t-1) + f(y(t-1)) = 0, \tag{4}$$

в котором $f(y) = b_2y^2 + b_3y^3 + o(y^3)$ аналитическая в окрестности $y = 0$ функция,

$$b_1 = n - 1 - n/\beta,\ b_2 = n(1 + (1 - n)(\beta - 1))(\beta - 1)^{(n-1)/n}/(2\beta),$$
$$b_3 = (6n^2 - (5n^2 + 1)\beta)(\beta - 1)^{(n-2)/n}/(6\beta^2). \quad (5)$$

Устойчивость нулевого решения (4) определяется поведением решений его линейной части

$$\varepsilon_1\dot{y}(t) + y(t) + b_1y(t - 1) = 0, \quad (6)$$

которое, в свою очередь, определяется расположением корней характеристического уравнения

$$P(\lambda; \varepsilon_1) = \varepsilon_1\lambda + 1 + b_1 \exp(-\lambda) = 0 \quad (7)$$

уравнения (6).

Уравнение (7) при фиксированном $b_1 > 0$ и $0 < \varepsilon_1 \le \varepsilon_0$, где ε_0 мало, имеет корни, лежащие в правой комплексной полуплоскости, при фиксированном $b_1 < 0$ и $0 < \varepsilon_1 \ll \varepsilon_1$ все корни уравнения лежат в левой комплексной полуплоскости [9]. В соответствии с этим, нулевое решение уравнения (4) в первом случае будет неустойчиво, в во втором – асимптотически устойчиво. Пограничным является случай $b_1 = 1$. Это определяет согласно (5) последовательность критических значений $\beta_n = n/(n - 2)$.

При

$$\beta = \beta_n(1 + \varepsilon_2/(n - 2 - \varepsilon_2)),\ |\varepsilon_2| \ll 1 \quad (8)$$

имеем $b_1 = 1 + \varepsilon_2, b_2 = b_2(\varepsilon_2), b_3 = b_3(\varepsilon_2)$.

Изучим расположение корней характеристического уравнения $P(\lambda; \varepsilon) = 0$ и структуру решений уравнения (6) при $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$ $(\varepsilon = (\varepsilon_1,\ \varepsilon_2),\ |\varepsilon| = (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^{1/2})$. Заметим, что в рассматриваемом случае характеристическое уравнение (7) не имеет корней, лежащих на вещественной оси, поэтому достаточно рассмотреть область $Im\lambda > 0$.

Запишем уравнение (7) в виде

$$e^{\lambda}(\varepsilon_1\lambda + 1) = -(1 + \varepsilon_2),$$

что эквивалентно последовательности уравнений

$$e^{\lambda+\ln(1+\varepsilon_1\lambda)} = e^{\ln(1+\varepsilon_2)+i\pi k},\ k = 1, 3, 5, \dots,$$

где $\ln z = \ln|z| + iargz$ $(-\pi < argz < \pi),\ i = \sqrt{-1}$.

Для определения корней уравнения (7) достаточно рассмотреть последовательность уравнений

$$\lambda + \ln(1 + \varepsilon_1\lambda) = \ln(1 + \varepsilon_2) + i\pi k,\ k = 1, 3, 5, \dots \quad (9)$$

Отметим, так как левая часть уравнения (7) является аналитической функцией комплексного переменного λ, то в любой ограниченной области уравнение (7) может иметь лишь конечное число корней конечной кратности. При этом цепочка корней вида $\lambda_p(\varepsilon) = \gamma_p(\varepsilon)+i\sigma_p(\varepsilon)$ $(\sigma_p(\varepsilon) > 0)$, $|\lambda_p(\varepsilon)| \to \infty$ $(p = 1, 2, \dots)$ может существовать в уравнении (7) лишь при условии $\lim_{p\to\infty}\gamma_p(\varepsilon) = -\infty,\ \lim_{p\to\infty}|\sigma_p(\varepsilon)/\gamma_p(\varepsilon)| = \infty$

(см., например, [9]). В связи с этим существует такое $\varphi_0 > 0$, позволяющее определить область существования корней уравнения как

$$\Lambda_{\varphi_0} = \{\lambda : 0 < arg\lambda < \pi - \varphi_0\}.$$

Рассмотрим уравнение

$$F(\lambda;\varepsilon_1) \equiv \lambda + \ln(1+\varepsilon_1\lambda) = w, \tag{10}$$

считая $\lambda \in \Lambda_{\varphi_0},\ w \in W_{x_0} = \{w : -x_0 < Rew < x_0,\ Imw \geq \pi,\ x_0 > 0-$ некоторое малое фиксированное число $\}$. Так как при $0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0 < \sin\varphi_0$ и $\lambda \in \Lambda_{\varphi_0}$ $\varepsilon_1/|1+\varepsilon_1\lambda| \leq q < 1$, то равномерно относительно ε_1 и λ $m_0 < |F_\lambda(\lambda;\varepsilon_1)| < m_\infty$, где $m_0,\ m_\infty$ – фиксированные положительные постоянные. Отсюда следует, что уравнение (10) при $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ имеет единственное решение $\lambda(w;\varepsilon)$, которое может быть получено посредством итерационного процесса

$$\lambda_p + \ln(1+\varepsilon_1\lambda_{p-1}) = w,\ p = 1,2,\ldots,\lambda_0 = w. \tag{11}$$

Итерационный процесс сходится равномерно относительно $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ и w из любой ограниченной подобласти W_{x_0}. Предельная функция

$$\begin{aligned}&\lambda(w;\varepsilon_1) = w + \lambda^1(w;\varepsilon_1),\\ &\qquad\lambda^1(w;\varepsilon_1) = -\ln(1+\varepsilon_1(w-\ln(1+\varepsilon_1(w-\ln(1+\varepsilon_1(w-\ldots))))))\end{aligned} \tag{12}$$

будет непрерывной по совокупности переменных, аналитической по w при каждом $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ и аналитической по ε_1 при каждом фиксированном $w \in W_{x_0}$.

Отметим следующее:

$$\lambda(w;\varepsilon) - \lambda_1(w;\varepsilon) = -\ln(1+\varepsilon_1 w^*) + \ln(1+\varepsilon_1 w) = \varepsilon_1^2(1+\varepsilon_1\lambda^*)^{-1}\ln(1+\varepsilon_1 w^*), \tag{13}$$

где согласно (11)–(12) $\lambda(w;\varepsilon) = w - \ln(1+\varepsilon_1 w)$, $w^* = w - \ln(1+\varepsilon_1(w-$ $-\ln(1+\varepsilon_1(w-\ldots))))$, точка λ^* находится на прямой, соединяющей точки w и w^*. С учетом того, что выражение $|(1+\varepsilon_1\lambda^*)^{-1}\ln(1+\varepsilon_1 w^*)|$ ограничено равномерно относительно $0 < |\varepsilon| \leq \varepsilon_0,\ w \in W_{x_0}$, имеем оценку

$$|\lambda(w;\varepsilon) - \lambda_1(w;\varepsilon)| < K\varepsilon_1^2\ (K > 0). \tag{14}$$

Отсюда согласно (11), (13) множество корней характеристического уравнения (7) может быть записано в виде

$$\lambda_k(\varepsilon) = i\pi k + \ln(1+\varepsilon_2) + \lambda^1(i\pi k + \ln(1+\varepsilon_2);\varepsilon_1),\ \lambda_{-k}(\varepsilon) = \bar\lambda_k(\varepsilon),\ k = 1,3,5,\ldots \tag{15}$$

При этом на основании (14) равномерно относительно k

$$\begin{gathered}\lambda_k(\varepsilon) = \gamma_k(\varepsilon) + i(\pi k + \sigma_k(\varepsilon)) = i\pi k + \ln(1+\varepsilon_2) - \ln(1+\varepsilon_1(i\pi k + \ln(1+\varepsilon_2))) + O(|\varepsilon|^2),\\ \gamma_k(\varepsilon) = \ln(1+\varepsilon_2) - \ln((1+\varepsilon_1\ln(1+\varepsilon_2))^2 + \varepsilon_1^2\pi^2k^2)/2 + O(|\varepsilon|^2),\\ \sigma_k(\varepsilon) = -\arccos((1+\varepsilon_1\ln(1+\varepsilon_2))/((1+\varepsilon_1\ln(1+\varepsilon_2))^2 + \varepsilon_1^2\pi^2k^2)^{1/2}) + O(|\varepsilon|^2).\end{gathered} \tag{16}$$

Таким образом, вопрос устойчивости решений уравнения (6) сводится к анализу функций $\gamma_k(\varepsilon)$, являющихся аналитическими в точке $\varepsilon = 0$ и имеющих радиус сходимости соответствующих рядов $r_k = O(k^{-1})$. При этом имеем

$$\gamma_k(\varepsilon) = \varepsilon_2 - \varepsilon_1^2(\pi k)^2/2 - \varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_2^2/2 + o(|\varepsilon|^3),\ k = 1,3,5,\ldots,$$

т.е. при малых ε и выполнении неравенства $\varepsilon_2 > \varepsilon_1^2(\pi k)^2/2$ k-й корень характеристического уравнения (7) имеет положительную вещественную часть.

2. Структура решений уравнения (6)

Опишем теперь структуру решений уравнения (6). Фазовым пространством уравнения (6) является пространство непрерывных вещественных функций $C[-1;0]$, норму в котором определяем стандартным способом и обозначим $||\cdot||_C$. Под решением уравнения (6)(уравнения (4)), определенным при $t \geq 0$, с начальным условием $y_0(s) \in C[-1;0]$ будем понимать функцию $y(t+s;\varepsilon)(-1 \leq s \leq 0)$, которая обращает уравнение (6)(уравнение (4)) в тождество и удовлетворяет начальному условию $y(s;\varepsilon) \equiv y_0(s)$.

Перейдем от уравнения (6) к эквивалентной начально-краевой задаче в полосе $-1 \leq s \leq 0, t \geq 0$, положив $u(s,t) = y(t+s)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial s}, \tag{17}$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial u}{\partial s}\bigg|_{s=0} = -u(0,t) - (1+\varepsilon_2)u(-1,t), \;\; u(s,0) = y_0(s). \tag{18}$$

Производящим оператором полугруппы линейных вполне непрерывных операторов $T(t;\varepsilon)$ $(T(t_1+t_2;\varepsilon) = T(t_1;\varepsilon)T(t_2;\varepsilon) = T(t_2;\varepsilon)T(t_1;\varepsilon),\ T(0;\varepsilon) = I$ – единичный оператор), действующих в пространстве $C[-1,0]$ и определяющих решение задачи (17)–(18), будет оператор

$$A(\varepsilon)v = \begin{cases} dv/ds, -1 \leq s < 0, \\ -\varepsilon_1^{-1}(v(0) + (1+\varepsilon_2)v(-1)), s = 0 \end{cases} \tag{19}$$

с областью определения $D(A) = \{v(s) \in C^1[-1,0], \varepsilon v'(0) + v(0) + (1+\varepsilon_2)v(-1) = 0\}$.

Собственными значениями оператора $A(\varepsilon)$ являются величины $\lambda_k = \lambda_k(\varepsilon)$, а соответствующими собственными функциями будут функции
$e_k(s;\varepsilon) = e^{\lambda_k(\varepsilon)s}/P'(\lambda_k(\varepsilon);\varepsilon) = e^{\lambda_k(\varepsilon)s}/(1+\varepsilon_1+\varepsilon_1\lambda_k(\varepsilon)),\ k = \pm1, \pm3, \ldots\ ||e_k(s;\varepsilon)||_C \sim 1$ при $k \to \infty$.

Наряду с (19) введем в рассмотрение оператор

$$A^*(\varepsilon)h = \begin{cases} -dh/ds, 0 < s \leq 1, \\ -\varepsilon_1^{-1}(h(0) + (1+\varepsilon_2)h(1)), s = 0 \end{cases} \tag{20}$$

действующий в пространстве $C[0,1]$, с областью определения $D(A^*) = \{h(s) \in C^1[0,1],\ -\varepsilon h'(0) + h(0) + (1+\varepsilon_2)v(1) = 0\}$. Оператор (20) является сопряженным с (19) в смысле скалярного произведения С.Н. Шиманова [10], которое для краевой задачи (17)–(18) принимает вид

$$< v(s), h(s) >= \varepsilon_1 v(0)\bar{h}(0) - (1+\varepsilon_2)\int_{-1}^{0} \bar{h}(\xi+1)v(\xi)d\xi.$$

Заметим, что собственными значениями оператора $A^*(\varepsilon)$ являются величины $-\bar{\lambda}_n(\varepsilon)$, а соответствующими собственными функциями будут функции $h_k = h_k(s;\varepsilon) = e^{-\bar{\lambda}_k(\varepsilon)s}$. Между функциями $e_k(s;\varepsilon)$ и $h_k(s;\varepsilon)$ выполнены следующие условия ортогональности

$$< e_{k_1}(s;\varepsilon), h_{k_2}(s;\varepsilon) >= \delta_{k_1k_2}, \tag{21}$$

где $\delta_{n_1 n_2}$ – символ Кронекера. Отметим, что выражения

$$p_k(v;\varepsilon) =< v(s), h_k(s,\varepsilon) >= \int_{-1}^{0} v(s) dr_k(s,\varepsilon),\ p_{-k}(v;\varepsilon) = \bar{p}_k(v;\varepsilon),$$
$$r_k(s;\varepsilon) = \begin{cases} \lambda_k^{-1}(\varepsilon),\ s = 0, \\ -(\varepsilon_1^{-1} + \lambda_k^{-1}(\varepsilon))e^{-\lambda_k(\varepsilon)s}, -1 \le s < 0,\ k = \pm 1, \pm 3, \dots, \end{cases}$$

определяют последовательность линейных непрерывных комплекснозначных функционалов в пространстве $C[-1;0]$, нормы которых

$$||p_k(v;\varepsilon)|| = \sup_{||v(s)||_C = 1} \le \overset{0}{\underset{-1}{V}} |r_k(s;\varepsilon)| = O(1), k \to \infty \tag{22}$$

Теорема 1. *Система функций $e_k(s,\varepsilon)$ полна в $C[-1,0]$ в следующем смысле: не существует функции $q(s) \in C[-1,0]$, $q(s) \not\equiv 0$, для которой $< q(s), h_k(s) >= 0$, $k = \pm 1, \pm 3, \dots$*

Доказательство теоремы 1. Оператор $A^{-1}(\varepsilon)$, действующий в $C[-1,0]$, имеет следующий вид:

$$A^{-1}(\varepsilon) f(s) = \int_{-1}^{0} f(s_1) d_{s_1} R(s, s_1; \varepsilon), \tag{23}$$

где

$$R(s, s_1; \varepsilon) = \frac{1}{2 + \varepsilon_2} \begin{cases} (1 + \varepsilon_2)(s+1), -1 \le s_1 < s, \\ 1 + \varepsilon_2 - s_1, s \le s_1 < 0, \\ 1 - \varepsilon_1 + \varepsilon + 2, s_1 = 0, \end{cases}$$

является вполне непрерывным оператором, имеющим однократные собственные значения $\lambda_k^{-1}(\varepsilon)$, $k = \pm 1, \pm 3, \dots$, $|\lambda_1^{-1}(\varepsilon)| > |\lambda_2^{-1}(\varepsilon)| > \dots$, которым отвечают собственные функции $e_k(s;\varepsilon)$, $k = \pm 1, \pm 3, \dots$. Из вида $A^{-1}(\varepsilon)$ следует, что $A^{-1}(\varepsilon) f(s) \equiv 0$ тогда и только тогда, когда $f(s) \equiv 0$. Для оператора (23) в $C[-1,0]$ существует эквивалентная норма $||\ ||_C^*$, в которой $||A^{-1}(\varepsilon)||_C^* = \sup_{||f||_C^* = 1} ||A^{-1}(\varepsilon) f(s)||_C^* = \max_k |\lambda_k^{-1}(\varepsilon)| = |\lambda_1^{-1}(\varepsilon)|$ (см., например, [11], стр. 15–16).

Предположим, что нашлась $q(s) \in C[-1,0]$, $q(s) \not\equiv 0$, $< q(s), h_k(s) >= 0$ $k = \pm 1, \pm 3, \dots$ Нормируем $q(s) \to q(s)/||q(s)||_C^*$, т.е. $||q(s)||_C^* = 1$. Обозначим $||A^{-1}(\varepsilon) q(s)||_C^* = \delta(\varepsilon) > 0$. Рассмотрим все собственные значения $\lambda_k^{-1}(\varepsilon)$, для которых $|\lambda_k^{-1}(\varepsilon)| \ge \delta(\varepsilon)/2$, $|\lambda_{k+1}^{-1}(\varepsilon)| < \delta(\varepsilon)/2$, а их может быть конечное число $k = \pm 1, \pm 3, \dots, \pm l$. Обозначим через $C_{l+1}[-1,0]$ подпространство функций $C[-1,0]$, для которых $< v(s), h_k(s,\varepsilon) >= 0$, $k = \pm 1, \pm 3, \dots, \pm l$. При этом $\sup_{||f(s)||_C^* = 1, f(s) \in C_{l+1}[-1,0]} ||A^{-1}(\varepsilon) f(s)||_C^* = |\lambda_{l+1}^{-1}(\varepsilon)| < \delta(\varepsilon)/2$, но $q(s) \in C_{l+1}[-1,0]$ и $||A^{-1}(\varepsilon) q(s)||_C^* = \delta(\varepsilon)$. Получили противоречие. Теорема доказана. □

Обозначим через l_2 пространство комплексных последовательностей вида $z = (z_1, z_{-1}, z_3, z_{-3}, \dots), z_k \in C, z_{-k} = \bar{z}_k, ||z||_{l_2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^2 < \infty$. Через l_2^1 обозначим подпространство l_2 комплексных последовательностей $z = (z_1, z_{-1}, z_3, z_{-3}, \dots)$, для которых $||z||_{l_2^1}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k(\varepsilon)|^2 |z_k|^2 < \infty$ и $|| \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k \lambda_k(\varepsilon) e_k(s;\varepsilon)||_C < \infty$. Подпространство $C[-1,0]$ функций указанного вида обозначим $D_*(A)$.

В дальнейшем $s(r_0) = \{z \in l_2,\ ||z||_{l_2} \le r_0\}$, $s^1(r_0) = \{z \in l_2^1,\ ||z||_{l_2^1} \le r_0\}$.

Теорема 2. *Решение $u(s,t;\varepsilon)$ начально-краевой задачи (17)–(18) с начальным условием $u(s,0;\varepsilon)=y_0(s)\in C[-h,0]$ при $t\geq t_0$ ($t_0\geq 3$) может быть представлено в виде*

$$u(s,t;\varepsilon)=\sum_{k=\pm1,\pm3,\dots} z_k(t;\varepsilon)e_k(s;\varepsilon),\ \ z(t;\varepsilon)=(z_1(t;\varepsilon),z_{-1}(t;\varepsilon),\dots)\in l_2^1, \tag{24}$$

где $z(t;\varepsilon)$ решение уравнения

$$\dot z=\Lambda(\varepsilon)z,\ \ \Lambda(\varepsilon)z=(\lambda_1(\varepsilon)z_1,\lambda_{-1}(\varepsilon)z_{-1},\dots), \tag{25}$$

в пространстве l_2 с начальным условием
$z(t_0;\varepsilon)=(z_1(t_0;\varepsilon),z_{-1}(t_0;\varepsilon),\dots),\ \ z_k(t_0;\varepsilon)=<u(s,t_0;\varepsilon),h_k(s;\varepsilon)>, k=\pm1,\pm3,\dots$

Обратно, если $z(t;\varepsilon)$ при $t\geq t_0$ решение уравнения (25) с начальным условием $z(t_0;\varepsilon)\in l_2^1$, то выражение (24) определяет при $t\geq t_0$ решение начально-краевой задачи (17)–(18) с начальным условием $u(s,t_0;\varepsilon)$, определяемым (24).

Доказательство теоремы 2. При $t_0\geq 3$ решение начально-краевой задачи (17)–(18) (уравнения (6)) $u(s,t_0;\varepsilon)=y(t_0+s;\varepsilon)\in C^3[-1,0]$ и $\varepsilon_1 y'''(t_0)+y''(t_0)+(1+\varepsilon_2)y''(t_0)=0$. С учетом этого и равенств (15), (22) имеем

$$z_k(t_0;\varepsilon)=<y'''(t_0+s;\varepsilon),h_k(s;\varepsilon)>\lambda_k(\varepsilon)^{-3},\ \ |z_k(t_0;\varepsilon)|=O(k^{-3}),k\to\infty.$$

Таким образом, $z(t_0;\varepsilon)\in l_2^1$ и $z_k(t,\varepsilon)=e^{\lambda_k(\varepsilon)(t-t_0)}z_k(t_0;\varepsilon),k=\pm1,\pm3,\dots$ Подставив $z_k(t;\varepsilon)$ в (24), замечаем, что ряд и его производная по t при $t\geq t_0$ на основании теоремы 1 равномерно относительно $-1\leq s\leq 0$ сходится и удовлетворяет начально-краевой задаче (17)–(18) при $t\geq t_0$. Обратно, если $z(t;\varepsilon)$ является решением (25) с начальным условием $z_k(t_0;\varepsilon)\in l_2^1$, то определяемая рядом (24) функция $y(t_0+s)\in D_*(A)$ и при $t>t_0$ удовлетворяет начально-краевой задаче (17)–(18), в чем легко убедиться непосредственной подстановкой. Теорема доказана. □

3. Нормальная форма уравнения (4)

Отметим сначала следующие свойства функций $\lambda_k(\varepsilon)$.

Теорема 3. *Существуют такие $\varepsilon_0>0,c_0>0$, что при $0\leq\varepsilon\leq\varepsilon_0$ равномерно относительно $k_j=\pm1,\pm3,\dots$ $(j=1,...,4)$ выполнены неравенства*

$$|\lambda_{k_1}(\varepsilon)+\lambda_{k_2}(\varepsilon)+\lambda_{k_3}(\varepsilon)|,|\lambda_{k_1}(\varepsilon)+\lambda_{k_2}(\varepsilon)+\lambda_{k_3}(\varepsilon)+\lambda_{k_4}(\varepsilon)|\geq c_0, \tag{26}$$

вторые при условии $k_1+k_2+k_3+k_4\neq 0$.

Доказательство теоремы 3. Доказательство непосредственно следует из формул (15), (16). Рассмотрим сначала первое неравенство (26). Согласно (16) $|\lambda_{k_1}(0)+\lambda_{k_2}(0)+\lambda_{k_3}(0)|\geq\pi$. Рассмотрим случай равенства, и пусть для определения $k_1,k_2>0$, а $k_3=-k_1-k_2+1$. При $\varepsilon\neq0$ согласно (16) $\pi k_j-\pi/2<Im\lambda_j(\varepsilon)<\pi k_j$ и $Im\lambda_{k_j}\to\pi k_j-\pi/2$ при $k_j\to\infty(j=1,2)$. Но тогда $\inf_{k_1,k_2,|\varepsilon|\leq\varepsilon_0}(Im(\lambda_{k_1}(\varepsilon)+\lambda_{k_2}(\varepsilon)+\lambda_{k_3}(\varepsilon)))^2>0$. Тем самым существует $c_0>0$ с указанными в (26) свойствами. Строгое неравенство и другие комбинации k_1,k_2,k_3 рассматриваются аналогично. Для второго неравенства (26) при $k_1+k_2+k_3+k_3\neq0$ $|\lambda_{k_1}(0)+\lambda_{k_2}(0)+\lambda_{k_3}(0)+\lambda_{k_4}(0)|\geq 2\pi$. С учетом этого и согласно (16) имеем $inf_{k_1,k_2,k_3,k_4,|\varepsilon|<\varepsilon_0}(Im(\lambda_{k_1}(\varepsilon)+\lambda_{k_2}(\varepsilon)+\lambda_{k_3}(\varepsilon)+\lambda_{k_4}(\varepsilon)))^2\geq\pi^2$. Теорема доказана. □

Перейдем от уравнения (4) к эквивалентной начально-краевой задаче

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial s}, \tag{27}$$

$$\varepsilon_1\frac{\partial u}{\partial s}\bigg|_{s=0}=-u(0,t)-(1+\varepsilon_2)u(-1,t)-f(u(1,t)),\ u(s,0)=y_0(s) \tag{28}$$

в полосе $-1\le s\le 0, t\ge 0$, положив $u(t,s)=y(t+s)$.

Введем в рассмотрение функцию-оператор

$$u(s,z;\varepsilon)=\sum_{k=\pm1,\pm3,\ldots}z_ke_k(s;\varepsilon)+\sum_{(k_1,k_2)=\Omega_2}z_{k_1}z_{k_2}u_{k_1k_2}(s;\varepsilon)+\sum_{(k_1,k_2,k_3)=\Omega_3}z_{k_1}z_{k_2}z_{k_3}u_{k_1k_2k_3}(s;\varepsilon), \tag{29}$$

где $\Omega_2=\{(k_1,k_2):k_1,k_2=\pm1,\pm3,\ldots,k_1\le k_2\}$, $\Omega_3=\{(k_1,k_2,k_3):k_1,k_2,k_3=\pm1,\pm3,\ldots,k_1\le k_2\le k_3\}$, действующую из $s^1(r_0)\otimes\{|\varepsilon|<\varepsilon_0\}$ в $C[-1,0]$ и гладко зависящую от своих переменных, и систему дифференциальных уравнений

$$\dot z_k=\lambda_k(\varepsilon)z_k+\sum_{(k_1k_2k_3)\in\Omega_k^3}d_{k_1k_2k_3}(\varepsilon)z_{k_1}z_{k_2}z_{k_3} \tag{30}$$

в пространстве l_2 с областью определения правой части $s^1(r_0)$, гладко зависящей от ε. Функции $u_{k_1k_2}(s;\varepsilon)$, $u_{k_1k_2k_3}(s;\varepsilon)$, $d_{k_1k_2k_3}(\varepsilon)$ подлежат определению.

Условие принадлежности траекторий системы уравнений (30) в силу (29) краевой задачи (27)–(28) примут вид

$$\sum_{k=\pm1,\pm3,\ldots}\frac{\partial u(s,z;\varepsilon)}{\partial z_k}(\lambda_k(\varepsilon)z_k+\sum_{(k_1k_2k_3)\in\Omega_k^3}d_{k_1k_2k_3}(\varepsilon)z_{k_1}z_{k_2}z_{k_3})=\frac{\partial u(s,z;\varepsilon)}{\partial s}, \tag{31}$$

$$\varepsilon_1\frac{\partial u(s,z;\varepsilon)}{\partial s}\bigg|_{s=0}=-u(0,z;\varepsilon)-(1+\varepsilon_2)u(-1,z;\varepsilon)-f(u(-1,z;\varepsilon)). \tag{32}$$

Соотношения (31)–(32) определяют тождества, которые должны равномерно по $|\varepsilon|<\varepsilon_0$ выполняться с точностью до величины $o(|z|^3_{l_2})$. При первых степенях z_k они выполняются в силу определения функций $e_k(s;\varepsilon)$ и $\lambda_k(\varepsilon)$. Соотношения (31)–(32) позволяют последовательно определять функции $u_k(s;\varepsilon)$ и $d_k(\varepsilon)$, приравнивая коэффициенты справа и слева при одинаковых степенях z_k.

Приравняем коэффициенты в (31)–(32) при $z_{k_1}z_{k_2}$. В результате получим краевую задачу

$$(\lambda_{k_1}(\varepsilon)+\lambda_{k_2}(\varepsilon))u_{k_1k_2}(s;\varepsilon)=\frac{du_{k_1k_2}(s;\varepsilon)}{ds}, \tag{33}$$

$$\varepsilon_1\frac{du_{k_1k_2}(s;\varepsilon)}{ds}\bigg|_{s=0}=-u_{k_1k_2}(0;\varepsilon)-(1+\varepsilon_2)u_{k_1k_2}(-1;\varepsilon)-p_{k_1k_2}b_2(\varepsilon_2)e_{k_1}(-1;\varepsilon)e_{k_2}(-1;\varepsilon) \tag{34}$$

для определения $u_{k_1k_2}(s;\varepsilon)$. В (34) $p_{k_1k_2}=1$ при $k_1=k_2$ и 2 при $k_1\ne k_2$. Решение (33)–(34) определяется однозначно

$$u_{k_1k_2}(s;\varepsilon)=-p_{k_1k_2}b_2(\varepsilon_2)e^{(\lambda_{k_1}(\varepsilon)+\lambda_{k_2}(\varepsilon))s}/P(\lambda_{k_1}(\varepsilon)+\lambda_{k_2}(\varepsilon);\varepsilon). \tag{35}$$

Приравняем в (31)–(32) коэффициенты при $z_{k_1}z_{k_2}z_{k_3}$. В результате получим краевую задачу

$$e_k(s;\varepsilon)d_{k_1k_2k_3}(\varepsilon)(\lambda_{k_1}(\varepsilon)+\lambda_{k_2}(\varepsilon)+\lambda_{k_3}(\varepsilon))u_{k_1k_2k_3}(s;\varepsilon)=\frac{du_{k_1k_2k_3}(s;\varepsilon)}{ds},\ k=k_1+k_2+k_3 \tag{36}$$

$$\varepsilon_1\frac{du_{k_1k_2k_3}(s;\varepsilon)}{ds}\bigg|_{s=0}=-u_{k_1k_2k_3}(0;\varepsilon)-(1+\varepsilon_2)u_{k_1k_2k_3}(-1;\varepsilon)-f_{k_1k_2k_3}(\varepsilon), \tag{37}$$

в которой

$$f_{k_1k_2k_3}=-p_{k_1k_2k_3}b_3(\varepsilon_2)e_{k_1}(-1;\varepsilon)e_{k_2}(-1;\varepsilon)e_{k_3}(-1;\varepsilon)-2b_2(\varepsilon_2)*$$
$$*\begin{cases} e_{k_1}(-1;\varepsilon)u_{k_2k_3}(-1;\varepsilon), \text{если } k_1=k_2=k_3\\ e_{k_j}(-1;\varepsilon)u_{k_mk_p}(-1;\varepsilon)+e_{k_m}(-1;\varepsilon)u_{k_jk_p}(-1;\varepsilon), \text{если } k_j\neq k_m=k_p, j,m,p=1,2,3\\ e_{k_1}(-1;\varepsilon)u_{k_2k_3}(-1;\varepsilon)+e_{k_2}(-1;\varepsilon)u_{k_1k_3}(-1;\varepsilon)+e_{k_3}(-1;\varepsilon)u_{k_1k_2}(-1;\varepsilon), k_1\neq k_2\neq k_3,\end{cases},$$

где $p_{k_1k_2k_3}=1$, если $k_1=k_2=k_3$, $p_{k_1k_2k_3}=3$, если $k_1=k_2\neq k_3$, либо $k_1=k_3\neq k_2$, либо $k_2=k_3\neq k_1$, $p_{k_1k_2k_3}=6$, если $k_1\neq k_2\neq k_3$.

Общее решение уравнения (36) имеет вид

$$u_{k_1k_2k_3}(s;\varepsilon)(s;\varepsilon)=e^{\lambda_{k_1k_2k_3}(\varepsilon)s}(c+d_{k_1k_2k_3}(\varepsilon)(1+\varepsilon_1+\varepsilon_1\lambda_k(\varepsilon))(1-e^{(\lambda_k(\varepsilon)-\lambda_{k_1k_2k_3}(\varepsilon))s})*$$
$$*(\lambda_k(\varepsilon)-\lambda_{k_1k_2k_3}(\varepsilon))^{-1}), \tag{38}$$

где использовано обозначение $\lambda_{k_1k_2k_3}(\varepsilon)=\lambda_{k_1}(\varepsilon)+\lambda_{k_2}(\varepsilon)+\lambda_{k_3}(\varepsilon)$, c – произвольная постоянная. Подставляя (38) в краевое условие (37), имеем

$$d_{k_1k_2k_3}(s;\varepsilon)(s;\varepsilon)=(\varepsilon_1+(1+\varepsilon_2)(e^{-\lambda_{k_1k_2k_3}(\varepsilon)}-e^{-\lambda_k(\varepsilon)})/(\lambda_{k_1k_2k_3}(\varepsilon)-\lambda_k(\varepsilon)))^{-1}*$$
$$*(1+\varepsilon_1+\lambda_k(\varepsilon))f_{k_1k_2k_3}(\varepsilon). \tag{39}$$

Условие непрерывности функции $u_{k_1k_2k_3}(\varepsilon)$ по ε при $0\leq|\varepsilon|\leq|\varepsilon_0|$ дает $c=0$, что однозначно ее определяет равенством (39).

Ниже будет показано, что "грубым", т.е. экспоненциально устойчивым (неустойчивым) периодическим решениям нормальной формы (30) в краевой задаче соответствуют периодические решения того же характера устойчивости с близкими периодами. Эти решения связаны посредством оператора (29).

4. Анализ периодических решений нормальной формы (30) и уравнения (4)

Перейдем в системе уравнений (30) к полярным координатам, положив $z_k=\rho_k e^{i\tau_k}$ ($\rho_k\geq 0, -\infty<\tau_k<\infty$). В результате получим систему уравнений вида

$$\dot\rho_k=\gamma_k(\varepsilon)\rho_k+R_k(\rho,\ \tau;\ \varepsilon), \tag{40}$$

$$\dot\tau_k=\pi n+\sigma_n(\varepsilon)+T_k(\rho,\tau;\varepsilon),\ k=1,3,\ldots, \tag{41}$$

в которой $\gamma_k(\varepsilon)$ и $\sigma_k(\varepsilon)$ определены в (16), $\rho = (\rho_1, \rho_3, \dots)$, $\rho_k \geq 0, \sum_{k=1}^{\infty} k^2\rho_k^2 < \infty, \tau = (\tau_1, \tau_3, \dots)$, функционалы $R_k(\cdot), T_k(\cdot)$ гладко зависят от входящих переменных и параметров, 2π-периодические по τ_j.

Структура системы (40)–(41) позволяет ввести одну ”быструю“ переменную и счетное число ”медленных“ переменных. Как это сделать, покажем сначала на примере ”усеченной“ системы. Рассмотрим нормальную форму (30), в которой положим $z_k = 0,\ k = \pm5, \pm7, \dots$ В результате имеем систему уравнений

$$\dot{z}_1 = \lambda_1(\varepsilon)z_1 + d_{-111}(\varepsilon)z_{-1}z_1^2 + d_{-313}(\varepsilon)z_{-3}z_1z_3 + d_{-1-13}(\varepsilon)z_{-1}^2z_3, \tag{42}$$

$$\dot{z}_3 = \lambda_3(\varepsilon)z_3 + d_{-113}(\varepsilon)z_{-1}z_1z_3 + d_{-333}(\varepsilon)z_{-3}z_3^2 + d_{111}(\varepsilon)z_1^3. \tag{43}$$

Уравнения для z_{-1}, z_{-3} получаются сопряжением (42)–(43) с учетом равенств $\bar{\lambda}_k(\varepsilon) = \lambda_{-k}(\varepsilon), \bar{z}_k(\varepsilon) = z_{-k}(\varepsilon)$. Обозначив $d_*(\varepsilon) = a_*(\varepsilon) + ib_*(\varepsilon), A_*(\varepsilon) = |d_*(\varepsilon)|, \beta_*(\varepsilon) = arg d_*(\varepsilon)$, перейдем к полярным переменным $\rho_1, \rho_3, \tau_1, \tau_3$. В результате получим систему уравнений

$$\dot{\rho}_1 = (\gamma_1(\varepsilon) + a_{-111}(\varepsilon)\rho_1^2 + a_{-313}(\varepsilon)\rho_3^2)\rho_1 + A_{-1-13}(\varepsilon)\cos(-3\tau_1 + \tau_3 + \beta_{-1-13}(\varepsilon))\rho_1^2\rho_3, \tag{44}$$

$$\dot{\rho}_3 = (\gamma_3(\varepsilon) + a_{-1-13}(\varepsilon)\rho_1^2 + a_{-333}(\varepsilon)\rho_3^2)\rho_3 + A_{111}(\varepsilon)\cos(3\tau_1 - \tau_3 + \beta_{111}(\varepsilon))\rho_1^3, \tag{45}$$

$$\dot{\tau}_1 = \pi + \sigma_1(\varepsilon) + b_{-111}(\varepsilon)\rho_1^2 + b_{-313}(\varepsilon)\rho_3^2 + A_{-1-13}(\varepsilon)\sin(-3\tau_1 + \tau_3 + \beta_{-1-13}(\varepsilon))\rho_1\rho_3, \tag{46}$$

$$\dot{\tau}_3 = 3\pi + \sigma_3(\varepsilon) + b_{-1-13}(\varepsilon)\rho_1^2 + b_{-333}(\varepsilon)\rho_3^2 + A_{111}(\varepsilon)\sin(3\tau_1 - \tau_3 + \beta_{111}(\varepsilon))\rho_1^3/\rho_3. \tag{47}$$

Перейдем в (44)–(47) к переменным $\rho_1, \rho_3, \theta_1 = -3\tau_1 + \tau_3$ и $\tau = \tau_1$. В результате получим систему уравнений

$$\dot{\rho}_1 = (\gamma_1(\varepsilon) + a_{-111}(\varepsilon)\rho_1^2 + a_{-313}(\varepsilon)\rho_3^2)\rho_1 + A_{-1-13}(\varepsilon)\rho_1^2\cos(-3\tau_1 + \tau_3 + \beta_{-1-13}(\varepsilon))\rho_1^2\rho_3, \tag{48}$$

$$\dot{\rho}_3 = (\gamma_3(\varepsilon) + a_{-1-13}(\varepsilon)\rho_1^2 + a_{-33-3}(\varepsilon)\rho_3^2)\rho_3 + A_{111}(\varepsilon)\rho_1^2\cos(3\tau_1 - \tau_3 + \beta_{111}(\varepsilon))\rho_1^3, \tag{49}$$

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 = \delta_1(\varepsilon) + (-3b_{-111}(\varepsilon) + b_{-1-13}(\varepsilon))\rho_1^2 + (-3b_{-313}(\varepsilon) + b_{-333}(\varepsilon))\rho_3^2 -\\ - 3A_{-1-13}(\varepsilon)\sin(\theta_1 + \beta_{-1-13}(\varepsilon))\rho_1\rho_3 + A_{111}(\varepsilon)\sin(-\theta_1 + \beta_{111}(\varepsilon))\rho_1^3/\rho_3,\end{aligned} \tag{50}$$

”медленных“ переменных, где $\delta_1(\varepsilon) = -3\sigma_1(\varepsilon) + \sigma_3(\varepsilon)$, и уравнение ”быстрой“ переменной

$$\dot{\tau} = \pi + \sigma_1(\varepsilon) + b_{-111}(\varepsilon)\rho_1^2 + b_{-313}(\varepsilon)\rho_3^2 + A_{-1-13}(\varepsilon)\sin(\theta_1 + \beta_{-1-13}(\varepsilon))\rho_1\rho_3. \tag{51}$$

Заметим, что правая часть (48)–(50) не зависит от τ.

Пусть теперь в (30) все $z_k(t) \neq 0$. Ввести переменные θ_k можно не единственным способом, однако они все связаны между собой линейными соотношениями. В качестве одного из возможных способов введения θ_k может быть предложен следующий. В качестве ”быстрой“ переменной берем τ_1 и рассматриваем ”усеченные“ конечномерные системы, последовательно полагая в (30) $z_k = 0, k = \pm5, \pm7, \dots,$ затем $k = \pm7, \pm9, \dots$ и т.д. Первый случай рассмотрен выше. Во втором случае к системе (48)–(50) добавляются два новых уравнения для переменных z_5 и z_{-5}. При этом в правой части уравнения для z_1 появляется резонансный моном $z_5z_{-3}z_{-1}$(в уравнении для z_{-1} появляется резонансный моном $z_{-5}z_3z_1$). При переходе к полярным координатам это приводит к появлению слагаемых, зависящих от выражения $\tau_5 - \tau_3 - 2\tau_1 = \theta_3$, которое берем в качестве новой "медленной" переменной. В результате имеем две дополнительные "медленные" переменные ρ_5, θ_3. Система уравнений для $\rho_1, \rho_3, \rho_5, \theta_1, \theta_3$ будет иметь вид, аналогичный (48)–(50), правая часть которой также не будет зависеть от τ. В правой части уравнения (51) для τ появятся новые слагаемые. При рассмотрении следующей "усеченной" системы в правой части уравнения для z_1 появится резонансный моном $z_7z_{-5}z_{-1}$, а при переходе к полярным координатам слагаемое, зависящее от выражения $\tau_7 - \tau_5 - 2\tau_1 = \theta_5$. Имеем две новые "медленные" переменные ρ_7, θ_5. В общем случае на очередном шаге, добавив уравнения для z_{k_0} и z_{-k_0}, получим в уравнениях для z_1 и z_{-1} появление новых мономов $z_{k_0}z_{-k_0+2}z_{-1}$ и $z_{-k_0}z_{k_0-2}z_1$ соответственно, а при переходе к полярным координатам появятся слагаемые, зависящие от $\tau_{k_0} - \tau_{k_0-2} - 2\tau_1 = \theta_{k_0-2}$. Имеем две новые "медленные" переменные $\rho_{k_0}, \theta_{k_0-2}$. Продолжая этот процесс, осуществим переход к "медленным" переменным $\rho = (\rho_1, \rho_3, \dots), \theta = (\theta_1, \theta_3, \dots)$ и "быстрой" τ, а соответствующая система дифференциальных уравнений для их определения будет иметь вид

$$\dot{\rho}_k = \gamma_k(\varepsilon)\rho_k + R_k(\rho,\ \theta;\ \varepsilon), \tag{52}$$

$$\dot{\theta}_k = \delta_k(\varepsilon) + \Theta_k(\rho, \theta;\ \varepsilon),\ k = 1, 3, \dots, \tag{53}$$

$$\dot{\tau} = \pi + \sigma_1(\varepsilon) + T(\rho, \theta;\ \varepsilon), \tag{54}$$

в которой функционалы $R_k(\cdot),\ \Theta_k(\cdot),\ T(\cdot) -\ 2\pi-$ периодические по θ_k, остальные их свойства и функции $\delta_k(\varepsilon)(\delta_k(0) = 0)$ определяются свойствами функций и функционалов, входящих в (40)–(41). Особо отметим, что правая часть (54) не зависит от переменной τ.

Фазовым пространством системы уравнений (52)-(54) будет произведение пространств $l_2 \otimes c \times R$, здесь $l_2 = \{\rho = (\rho_1, \rho_3, \dots)\}, \rho_k \geq 0, ||\rho||^2_{l_2} = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2 < \infty,\ c = \{\theta = (\theta_1, \theta_3, \dots)\}, ||\theta||_c = \sup_k |\theta_k| < \infty$. Областью определения правой части (52)–(54) является произведение пространств $l_2^1 \otimes c_0 \times R$, здесь $l_2^1 = \{\rho \in l_2, ||\rho||^2_{l_2^1} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2\rho_k^2 < \infty\}, c_0 = \{\theta = (\theta_1, \theta_3, \dots) \in c, 0 \leq \theta_k < 2\pi\}$.

Введем в области $\{(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \varepsilon_1 > 0, |\varepsilon| < \varepsilon_0\}$ переменные $\zeta \geq 0$ и $\pi/2 < \psi < \pi/2$, положив

$$\zeta = (\varepsilon_1^2 + |\varepsilon_2|)^{1/2}, \varepsilon_1 = \zeta\cos\psi, \varepsilon_2 = \zeta^2\sin^2\psi sign\psi. \tag{55}$$

Подставим (55) в (52)–(54), нормировав также $\rho_k \to \zeta\rho_k$. В результате получим систему уравнений

$$\dot{\rho}_k = \gamma_k(\psi, \zeta)\rho_k + \zeta^2 R_k(\rho,\ \theta;\ \psi, \zeta), \tag{56}$$

$$\dot{\theta}_k = \delta_k(\psi, \zeta) + \zeta^2\Theta_k(\rho, \theta;\ \psi, \zeta),\ k = 1, 3, \dots, \tag{57}$$

$$\dot{\tau} = \pi + \sigma_1(\psi, \zeta) + \zeta^2 T(\rho, \theta;\ \psi, \zeta), \tag{58}$$

в которой свойства функций и функционалов определяются свойствами функций и функционалов системы (52)–(55).

Отметим, что ввиду того, что согласно (16), (56) равномерно относительно k $\gamma(\psi, \zeta) = O(\zeta^2), \delta_k(\psi, \zeta) = O(\zeta^3)$, уравнения (56), (57) оправдывают название уравнений "медленных" переменных, а (58) – уравнения "быстрой" переменной.

Рассмотрим главную часть системы уравнений "медленных" переменных (56)–(57), предварительно нормировав время $t \to t/\zeta^2$. В результате имеем

$$\dot{\rho}_k = \gamma_k^*(\psi,\zeta)\rho_k + R_k(\rho,\ \theta;\ \psi,\zeta), \tag{59}$$

$$\dot{\theta}_k = \delta_k^*((\psi,\zeta) + \Theta_k(\rho,\theta;\ \psi,\zeta),\ k = 1,3,\dots, \tag{60}$$

где $\gamma_k^*(\psi,\zeta) = \gamma_k(\psi,\zeta)/\zeta^2$, $\delta_k^*(\psi,\zeta) = \delta_k(\psi,\zeta)/\zeta^2$ согласно (15)–(16) непрерывные функции $\pi/2 \le \psi \le -\pi/2, 0 \le \zeta \le \zeta_0$. При этом

$$\gamma_k^*(\psi,0) = \gamma_k(\psi) = \sin^2\psi sign\psi - \pi^2k^2\cos^2\psi/2, \quad \delta_k^*(\psi,0) = 0. \tag{61}$$

Рассмотрим в $l_2 \otimes c$ систему нелинейных уравнений

$$\gamma_k^*(\psi)\rho_k + R_k(\rho,\theta) = 0\ (R_k(\rho,\theta) \equiv R_k(\rho,\theta;\psi,0) = 0), \tag{62}$$

$$\Theta_k(\rho,\theta) = 0\ (\Theta_k(\rho,\theta) \equiv \Theta_k(\rho,\theta;\psi,0) = 0),\ k = 1,3,\dots, \tag{63}$$

считая $(\rho,\theta) \in E_0^1 = l_2^1 \otimes c_0$. В (62) оператор $\gamma(\psi)\rho = (\gamma_1(\psi)\rho_1, \gamma_3(\psi)\rho_3,\dots)$ рассматривается на основании (61) симметрично расширенным на l_2^1.

Пусть $(\rho^*(\psi),\theta^*(\psi)) \in l_2^1 \otimes c_0$ решение системы уравнений (62)–(63).

Введем в рассмотрение бесконечную матрицу

$$B(\psi) = \begin{pmatrix} \gamma_k(\psi)\delta_{kj} + \partial R_k/\partial\rho_j & \partial R_k/\partial\theta_j \\ \partial\Theta_k/\partial\rho_j & \partial\Theta_k/\partial\theta_j \end{pmatrix} (k,j = 1,3,\dots), \tag{64}$$

вычисленную в точке $\rho^*(\psi),\theta^*(\psi)$, где δ_{k_j} – символ Кронекера. Матрица определяет линейный оператор

$$B(\psi)v\ (v = (\rho,\theta)) : E^1 = l_2^1 \otimes c \to E = l_2 \otimes c, \tag{65}$$

$||v||_E = ||\rho||_{l_2} + ||\theta||_c,\ ||v||_{E^1} = ||\rho||_{l_2^1} + ||\theta||_c$.

Пусть $\mu_k(\psi)$ ($B(\psi)v_k(\psi) = \mu_k(\psi)v_k(\psi)$) – собственное значение оператора (65). Покажем, что оператор (65) имеет счетное число собственных значений $\mu_k(\psi)$, которые могут быть пронумерованы в порядке возрастания их модулей, и любой ограниченной области комплексной плоскости может принадлежать лишь конечное число собственных значений конечной кратности. Предельной может быть лишь точка бесконечность, при этом $\lim_{k\to\infty} Re\mu_k(\psi) = -\infty$.

Действительно, заметим, что функции

$$z_1(t;\psi,\zeta) = \zeta z_1^*(\tau;\psi) = \zeta\rho_1^*(\psi)e^{i\tau}, z_3(t;\psi,\zeta) = \zeta z_3^*(\tau;\psi) = \zeta\rho_3^*(\psi)e^{i(3\tau+\theta_1^*(\psi))},$$

$$z_5(t;\psi,\zeta) = \zeta z_5^*(\tau;\psi) = \zeta\rho_5^*(\psi)e^{i(5\tau+\theta_1^*(\psi)+\theta_3^*(\psi))},\dots, z_{-k}(t;\psi,\zeta) = \bar{z}_k(t;\psi,\zeta)\ k = 1,3,\dots,$$

$$\dot{\tau} = \pi(1 - \zeta\cos\psi), \tag{66}$$

определяют периодические решения следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{z}_k = (i\pi k(1-\zeta\cos\psi) + \zeta^2\gamma_k(\psi)) - p_{k_1k_2k_3}\sum_{(k_1,k_2,k_3)\in\Omega_3^k} z_{k_1}z_{k_2}z_{k_3},\ k = \pm1,\pm3,\dots, \tag{67}$$

в чем легко убедиться непосредственной подстановкой (66) в (67), с учетом выполненных для $\rho^*(\psi)$, $\theta^*(\psi)$ замен и равенств (62), (63). Система уравнений (67) является абстрактно параболической в комплексном пространстве l_2 с областью определения l_2^1. Для таких уравнений оператор монодромии, построенный для периодического решения (66), является вполне непрерывным оператором, содержащим счетное число собственных значений (мультипликаторов) $\nu_j(\psi)$, $\lim_{j\to\infty}|\nu_j(\psi)| = 0, \nu_j(\psi) = e^{\mu_j(\psi)}$. Оператор (65) определяет характеристические показатели периодического решения (66). Отсюда следует все перечисленное.

Рассмотрим теперь систему уравнений (56), (57), которую запишем в операторной форме

$$\frac{d\rho}{dt} = \zeta^2(\gamma(\psi,\zeta)\rho + R(\rho,\theta;\psi,\zeta)), \tag{68}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \zeta^2(\delta(\psi,\zeta)\rho + \Theta(\rho,\theta;\psi,\zeta)) \tag{69}$$

в пространстве E, где функция $\delta(\psi,\zeta) = (\delta_1^*(\psi,\zeta), \delta_{-1}^*(\psi,\zeta), \dots)$, операторы $\gamma(\psi,\zeta)\rho = (\gamma_1^*(\psi,\zeta)\rho_1, \gamma_{-1}^*(\psi,\zeta)\rho_{-1}, \dots)$, $R(\rho,\theta;\psi,\zeta) = (R_1(\rho,\theta;\psi,\zeta), R_{-1}(\rho,\theta;\psi,\zeta),\dots)$, $\Theta(\rho,\theta;\psi,\zeta) = (\Theta_1(\rho,\theta;\psi,\zeta), \Theta_{-1}(\rho,\theta;\psi,\zeta),\dots)$. Областью определения правой части (68)–(69) является пространство $E_0^1 = l_2^1 \otimes c_0$.

Рассмотрим в E систему нелинейных операторных уравнений

$$\gamma(\psi,\zeta)\rho + R(\rho,\theta;\psi,\zeta) = 0, \tag{70}$$

$$\delta(\psi,\zeta) + \Theta(\rho,\theta;\psi,\zeta) = 0 \tag{71}$$

с областью определения E_0^1. При $\zeta = 0$ (70)-(71) имеет решение $\rho^*(\psi), \theta^*(\psi)$. Предположим, что построенная по этому решению матрица (64) определяет оператор (65), который не имеет собственных значений, лежащих на мнимой оси комплексной плоскости, т.е. выполнено условие $|Re\mu_j(\psi)| > \mu_0 > 0$. Следовательно, по теореме о неявной функции для операторных уравнений в банаховых пространствах (см., например, [11]) существует такое $\zeta_0 > 0$, что при $0 \le \zeta \le \zeta_0$ система уравнений (70), (71) имеет решение $\rho^*(\psi,\zeta), \theta^*(\psi,\zeta)$ $(\rho^*(\psi,0) = \rho^*(\psi), \theta^*(\psi,0) = \rho^*(\psi))$, гладко зависящее от параметра ζ.

Линеаризуем (70)–(71) на решении $\rho^*(\psi,\zeta), \theta^*(\psi,\zeta)$. В результате получим бесконечную матрицу, аналогичную матрице (64) и обращающуюся в нее при $\zeta = 0$, которая определяет линейный оператор

$$B(\psi,\zeta)v \ (v = (\rho,\theta), B(\psi,0) = B(\psi)) : E^1 \to E. \tag{72}$$

Собственные значения $\mu_j(\psi,\zeta)(\mu_j(\psi,0) = \mu_j(\psi))$ оператора (72) при $0 \le \zeta \le \zeta_0$ удовлетворяют условию $|Re\mu_j(\psi,\zeta)| > \mu_0 > 0$.

Подставим $\rho^*(\psi,\zeta), \theta^*(\psi,\zeta)$ в правую часть уравнения (58). В результате имеем

$$\dot\tau = \pi + \sigma_1(\psi,\zeta) + \zeta^2 T_1(\rho^*(\psi,\zeta), \theta^*(\psi,\zeta);\psi,\zeta) = \pi + \sigma_1(\psi,\zeta) + \zeta^2\Delta_2(\psi,\zeta) = \pi + \sigma(\psi,\zeta),$$
$$(\sigma(\psi,0) \equiv 0). \tag{73}$$

Положим

$$z_1^*(\tau;\psi,\zeta) = \rho_1^*(\psi,\zeta)e^{i\tau}, z_3^*(\tau;\psi,\zeta) = \rho_3^*(\psi,\zeta)e^{i(3\tau+\theta_1^*(\psi,\zeta))},$$
$$z_5^*(\tau;\psi,\zeta) = \rho_5^*(\psi,\zeta)e^{i(5\tau+\theta_1^*(\psi,\zeta)+\theta_3^*(\psi,\zeta))}, z_{-k}^*(\tau;\psi,\zeta) = \bar z_k^*(\tau;\psi,\zeta) \ k = 1,3,\dots \tag{74}$$

Теорема 4. *Пусть при некотором ψ система уравнений (59),(60) имеет решение $(\rho^*(\psi), \theta^*(\psi)) \in E_0^1$, а построенная по этому решению матрица (64) определяет оператор (65), который не имеет собственных значений, лежащих на мнимой оси комплексной плоскости. Тогда существует такое $\zeta_0 > 0$, что при $0 < \zeta \leq \zeta_0$ краевая задача (27),(28), в которой ε_1 и ε_2 определены согласно (55), имеет периодическое решение $u^*(s, \tau; \psi, \zeta)$, допускающее представление*

$$\begin{aligned} u^*(s,\tau;\psi,\zeta) &= u_0^*(s,\tau;\psi,\zeta) + O(\zeta^4) = \\ &= \zeta \sum_{k=\pm1,\pm3} e_k(s;\psi,\zeta) z_k^*(\tau;\psi,\zeta) + \zeta^2 \sum_{(k_1,k_2)\in\Omega_2} u_{k_1k_2}(s;\psi,\zeta) z_{k_1}^*(\tau;\psi,\zeta) z_{k_2}^*(\tau;\psi,\zeta) + \\ &\quad + \zeta^3 \sum_{(k_1,k_2,k_3)\in\Omega_3} u_{k_1k_2k_3}(s;\psi,\zeta) z_{k_1}^*(\tau;\psi,\zeta) z_{k_2}^*(\tau;\psi,\zeta) z_{k_3}^*(\tau;\psi,\zeta) + O(\zeta^4), \end{aligned} \quad (75)$$

в котором Ω_2, Ω_3 определены в (29), функции $e_k(\cdot), u_{k_1k_2}(\cdot), u_{k_1k_2k_3}(\cdot)$ определены согласно (19), (35), (38) с учетом замены (55), переменная τ определяется в соответствии с (73), функции $z_k^*(\cdot)$ определены в (74).

Доказательство теоремы 4. Решения системы уравнений (30) в силу (15)–(16) обладают свойствами нарастающей гладкости. В связи с этим функции (74) с учетом (73), являясь периодическими решениями системы уравнений (30), будут бесконечно дифференцируемыми по τ. Отсюда следует, что функция $u_0^*(s, \tau; \psi, \zeta)$ будет также бесконечно дифференцируемой по τ, непрерывно дифференцируемой по s и достаточно гладко зависящей от ψ и ζ. Обозначим $Q = \{(s, \tau) : -1 \leq s \leq 0, -\infty < \tau < \infty\}$. Введем в рассмотрение пространство $C^{1\infty}(\bar{\Omega})$ вещественных функций $g(s, \tau) \equiv g(s, \tau + 2\pi)$, определенных в $\bar{\Omega}$, непрерывно дифференцируемых по s и бесконечно дифференцируемых по τ. Норму в $C^{1\infty}(\bar{\Omega})$ определим

$$||g(s,\tau)||_{C^{1\infty}} = \sup_{(s,\tau)\in\bar{\Omega}, k=0,1,\ldots} ||\frac{\partial^k g(s,\tau)}{\partial \tau^k}|| + \sup_{(s,\tau)\in\bar{\Omega}, k=1,2,\ldots} ||\frac{\partial^k g(s,\tau)}{\partial s \partial \tau^{k-1}}||$$

Введем в рассмотрение также пространство $C^\infty(R)$ вещественных бесконечно дифференцируемых функций $q(\tau) \equiv q(\tau + 2\pi)(-\infty < \tau < \infty)$, определив норму $||q(\tau)||_{C^\infty(R)} = \sup_{\tau,k=0,1,\ldots} |\partial^k q(\tau)/\partial \tau^k|$. Пространства $C^{1\infty}(\Omega), C^\infty(R)$ являются банаховыми пространствами.

Рассмотрим в области $\bar{\Omega}$ краевую задачу

$$g(s,\tau) + i(\pi + \sigma(\psi;\zeta))u_\tau = u_s, \quad (76)$$

$$u(0,\tau) + u(-1,\tau) = q(s), \quad (77)$$

в которой $g(s, \tau) \in C^{1\infty}(\bar{\Omega}), q(\tau) \in C^\infty(R)$, и выявим условия существования 2π-периодического решения $u_*(s, \tau; \psi, \zeta)$, непрерывно зависящего от $0 \leq \zeta \leq \zeta_0$.

Представим в виде равномерно сходящихся рядов

$$g(s,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n(s) e^{in\tau}, g_n(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(s,\tau_1) e^{in\tau_1} d\tau_1,$$

$$q(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n e^{in\tau}, q_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\tau_1)e^{in\tau_1}d\tau_1.$$

Определяя 2π-периодическое решение (76)–(77) в виде ряда

$$u_*(s,\tau;\psi,\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(s;\psi,\zeta)e^{in\tau}, \tag{78}$$

рассмотрим отдельно случай $n = 2k, k = 0, \pm1, \ldots$, и случай $n = 2k+1, k = 0, \pm1, \ldots$

В случае $n = 2k$ для определения $u_{2k}(s;\psi,\zeta)$ имеем краевую задачу

$$g_{2k}(s) + i2k(\pi + \sigma(\psi;\zeta))u_{2k} = \frac{du_{2k}}{ds},$$

$$u_{2k}(0) + u_{2k}(-1) = q_{2k},$$

из которых однозначно находим

$$u_{2k}(s,\tau;\psi,\zeta) = e^{i2k(\pi+\sigma(\psi,\zeta))s}(c_{2k} + \int_0^s e^{-i2k(\pi+\sigma(\psi,\zeta))s_1}g_{2k}(s_1)ds_1), \tag{79}$$

где

$$c_{2k} = (1 + e^{-i2k\sigma(\psi,\zeta)})^{-1}(q_{2k} + e^{-i2k\sigma(\psi;\zeta)}\int_{-1}^0 e^{-2ki(\pi+\sigma(\psi,\zeta))s_1}g_{2k}(s_1)ds_1).$$

Рассмотрим теперь случай $n = 2k + 1$. Здесь краевая задача для определения $u_{2k}(s;\psi,\zeta)$ будет иметь вид

$$g_{2k+1}(s) + i(2k+1)(\pi + \sigma(\psi;\zeta))u_{2k+1} = \frac{du_{2k+1}}{ds}, \tag{80}$$

$$u_{2k+1}(0) + u_{2k+1}(-1) = q_{2k+1}, k = 0, \pm1, \ldots \tag{81}$$

Подставив общее решение уравнения (80)

$$u_{2k+1}(s;\psi,\zeta) = e^{i(2k+1)(\pi+\sigma(\psi,\zeta))s}(c_{2k+1} + \int_0^s e^{-i(2k+1)(\pi+\sigma(\psi,\zeta))s_1})g_{2k+1}(s_1)ds_1 \tag{82}$$

в краевое условие (81), получим для определения c_{2k+1} следующее уравнение:

$$c_{2k+1}(1 - e^{-i(2k+1)\sigma(\psi,\zeta)}) = q_{2k+1} - e^{-i(2k+1)\sigma(\psi,\zeta)}\int_{-1}^0 e^{-i(2k+1)(\pi+\sigma(\psi,\zeta))s_1}q_{2k+1}(s_1)ds_1. \tag{83}$$

Так как коэффициент при c_{2k+1} обращается в нуль при $\zeta = 0$, уравнение (83) в общем случае не имеет непрерывного по ζ при $0 \le \zeta \le \zeta_0$ решения. Потребуем, чтобы правая часть уравнения (83) обращалась в нуль при $\zeta = 0$, т.е.

$$q_{2k+1} - \int_{-1}^0 e^{-i(2k+1)\pi s_1}g_{2k+1}(s_1)ds_1 = 0. \tag{84}$$

При выполнении (84) уравнение (83) можно записать в виде

$$c_{2k+1}(1 + O(\sigma(\psi,\zeta))) = \int_{-1}^0 e^{-i(2k+1)\pi s_1}(1 + s_1)g_{2k+1}(s_1)ds_1 + O(\sigma(\psi,\zeta)).$$

Отсюда $c_{2k+1} = c_{2k+1}(\psi, \zeta)$ однозначно определяется. Подставив это выражение в (81), имеем решение $u_{2k+1}(s; \psi, \zeta)$.

Таким образом, при выполнении условий (84) для $k = 0, \pm 1, \dots$, краевая задача (76)–(77) имеет единственное периодическое решение, определяемое рядом (78). На основании свойств $g_n(s)$ и q_n и вида функций $u_n(s; \psi, \zeta)$, определяемых (79), (82), периодическое решение (78) $u_*(s, \tau; \psi, \zeta) \in C^{1\infty}(\bar{\Omega})$.

Линейное подпространство функций $(g(s, \tau), q(\tau)) \in C^{1\infty}(\bar{\Omega}) \oplus C^{\infty}(R)$ удовлетворяющих условиям (84) при $k = 0, \pm 1, \dots$, обозначим $C_0^{1\infty}(\bar{\Omega}) \oplus C_0^{\infty}(R)$. Формула (78) с учетом (79), (82) определяет линейный ограниченный оператор

$$\Phi : C_0^{1\infty} \oplus C_0^{\infty}(R) \to C^{1\infty}(\Omega), \Phi(g, q; \psi, \zeta) = u, (\Phi(0, 0; \psi, \zeta) \equiv 0), ||u||_{C^{1\infty}(\bar{\Omega})} \leq$$
$$\leq K(||g||_{C^{1\infty}(\bar{\Omega})} + ||q||_{C^{\infty}(R)})(K > 0), \quad (85)$$

гладко зависящий от ψ и ζ.

Если подставить функцию $u_0^*(s, \tau; \psi, \zeta)$ в краевую задачу (27)–(28) с учетом (55), то коэффициенты при ζ, ζ^2, ζ^3 в левой и правой частях равенств взаимно сократятся. С учетом этого положим

$$\dot{\tau} = \pi + \sigma(\psi, \zeta) + \zeta^4 \Delta_4 \quad (86)$$

и заменим в (74)

$$\rho_k^*(\psi, \zeta) \to \rho_k^*(\psi, \zeta) + \zeta^2 \tilde{\rho}_k, \theta_k^*(\psi, \zeta) \to \theta_k^*(\psi, \zeta) + \zeta^2 \tilde{\theta}_k, \ k = 1, 3, \dots, \quad (87)$$

где Δ_4 и $\tilde{\rho} = (\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2, \dots), \tilde{\theta} = (\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \dots)$ – подлежащие определению функции.

Представим (75) с учетом (86), (87) в виде

$$u^*(s, \tau, \tilde{\rho}, \tilde{\theta}, \psi, \zeta) = u_0^*(s, \tau, \tilde{\rho}, \tilde{\theta}, \psi, \zeta) + \zeta^4 w(s, \tau),$$

где ρ, θ и w – искомые функции, и подставим в краевую задачу (27)–(28) с учетом (55), (86). В результате, учитывая аналитичность функции $f(\cdot)$, получим следующую краевую задачу:

$$g(s, \tau, \tilde{\rho}, \tilde{\theta}, \Delta_4; \psi, \zeta) + \zeta^4 \Delta_4 w_\tau(s, \tau) + i(\pi + \sigma(\psi, \zeta)) w_\tau = w_s, \quad (88)$$

$$w(0, \tau) + w(-1, \tau) = q(\tau, \tilde{\rho}, \tilde{\theta}, w(-1, \tau); \psi, \zeta) \quad (89)$$

для определения $w(s, \tau) \in C^{1\infty}(\bar{\Omega})$. В (88)–(89) функции (функционалы) $g(\cdot) \in C^{1\infty}(\bar{\Omega}), q(\cdot) \in C^1(R)$. Условие разрешимости (84) краевой задачи (88)–(89) дают следующую последовательность функциональных уравнений:

$$\int_0^{2\pi} (q(\tau, \tilde{\rho}, \tilde{\theta}, w(-1, \tau); \psi, \zeta) + \int_{-1}^{0} e^{-i(2k+1)\pi s} (i(2k+1)\pi \zeta^4 \Delta_4 w(s, \tau) -$$
$$- g(s, \tau, \tilde{\rho}, \tilde{\theta}, \Delta_4; \psi, \zeta)) ds) e^{-i(2k+1)\pi\tau} d\tau \equiv a_{2k+1}(\tilde{\rho}, \tilde{\theta}, \Delta_4, w; \psi, \zeta) +$$
$$+ i b_{2k+1}(\tilde{\rho}, \tilde{\theta}, \Delta_4, w; \psi, \zeta) = 0 (a_{2k+1}(0, 0, 0, 0; \psi, \zeta) + i b_{2k+1}(0, 0, 0, 0; \psi, \zeta) \equiv 0),$$
$$k = 0, \pm 1, \dots,$$

которую запишем в следующей эквивалентной форме:

$$a_{2k+1}(\tilde\rho,\tilde\theta,\Delta_4,w;\psi,\zeta)=0,\tilde b_{2k-1}(\tilde\rho,\tilde\theta,\Delta_4,w;\psi,\zeta)\equiv$$
$$\equiv b_{2k+1}(\tilde\rho,\tilde\theta,\Delta_4,w;\psi,\zeta)-b_{2k-1}(\tilde\rho,\tilde\theta,\Delta_4,w;\psi,\zeta)-2b_1(\tilde\rho,\tilde\theta,\Delta_4,w;\psi,\zeta)=0,\ k=1,3,\dots,$$
$$b_1(\tilde\rho,\tilde\theta,\Delta_4,w;\psi,\zeta)=0\ (b_1(0,0,\Delta_4,0;\psi,\zeta)=\rho_1^*(\psi,\zeta)\Delta_4). \quad (90)$$

Отметим, что бесконечная матрица

$$\begin{pmatrix}\partial a_k/\partial\rho_j & \partial a_k/\partial\theta_j\\ \partial\tilde b_k/\partial\rho_j & \partial\tilde b_k/\partial\theta_j\end{pmatrix}(k,j=1,3,\dots), \quad (91)$$

вычисленная в точке $\tilde\rho=0,\tilde\theta=0,\Delta=0,w=0$ совпадает с матрицей $B(\psi;\zeta)$, вычисленной по системе уравнений (70), (70) в точке $\rho^*(\psi,\zeta),\theta^*(\psi,\zeta)$. Это следует из приведенного выше замечания и того обстоятельства, что матрица $B(\psi;\zeta)$ и (91) получены в результате "малого шевеления" величин $\rho_k^*(\psi;\zeta)$ и $\theta_k^*(\psi;\zeta)$.

Из уравнений (90) в силу сделанных предположений относительно свойств оператора (72), определяемого матрицей (91) по теореме о неявной функции для операторных уравнений [11], находим функционалы:

$$\tilde\rho_k=\tilde\rho_k(w;\psi,\zeta),\tilde\theta_k=\tilde\theta_k(w;\psi,\zeta),\Delta_4=\Delta_k(w;\psi,\zeta)$$
$$(\tilde\rho_k(0;\psi,\zeta)=\tilde\theta_k(0;\psi,\zeta)=\Delta_4(0;\psi,\zeta)=0). \quad (92)$$

Подставив теперь (92) в (88), (89) с учетом ограниченности оператора дифференцирования $w_\tau(s,\tau)$ в пространстве $C^{1\infty}(\bar\Omega)$ сведем задачу нахождения периодического решения краевой задачи (88),(89) на основании (85) к разрешимости операторного уравнения

$$w=\Phi(g(s,\tau,\tilde\rho(w;\psi,\zeta),\tilde\theta(w;\psi,\zeta),\Delta_4(w;\psi,\zeta);\psi,\zeta)+\zeta^4\Delta_4(w;\psi,\zeta)w_\tau(s,\tau);$$
$$q(s,\tau,\tilde\rho(w;\psi,\zeta),\tilde\theta(w;\psi,\zeta),w(-1,\tau;\psi,\zeta));\psi,\zeta) \quad (93)$$

операторного уравнения в пространстве $C^{1\infty}(\bar\Omega)$. Осталось применить к уравнению (93) теорему о неявной функции [11]. Правая часть (93) позволяет это сделать. В результате имеем решение $w^*(s,\tau;\psi,\zeta)\in C^{1\infty}(\bar\Omega)$. □

Решение (75) будет асимптотически орбитально устойчиво, если все собственные значения оператора (65) лежат в левой комплексной полуплоскости, и неустойчиво, если m корней с учетом кратностей принадлежат правой комплексной полуплоскости. В последнем случае периодическое решение (75) имеет $m-$ мерное неустойчивое инвариантное многообразие.

Для получения периодического решения непосредственно уравнения (4) достаточно в (75) положить $s=0$. В качестве первого приближения периодического решения следует взять приближение, определяемое решением $\rho^*(\psi),\theta^*(\psi)$ системы уравнений (62)–(63), которое будет иметь вид

$$y^*(\tau;\psi,\zeta)=\zeta\sum_{k=\pm1,\pm3}z_k^*(\tau,\psi)-\zeta^2b_2(0)/2p_{k_1k_2}\sum_{(k_1,k_2)\in\Omega_2}z_{k_1}^*(\tau,\psi)z_{k_2}^*(\tau,\psi)+O(\zeta^3), \quad (94)$$

$$\tau = \pi - \zeta \cos\psi + \zeta^2 \cos\psi + O(\zeta^3), \tag{95}$$

где функции $z_k^*(\tau,\psi)$ определены в (66).

Ниже на рис. 1 приведены графики периодических решений, построенных по формулам (94)–(95) (жирная линия) для случая $n = 3$, $\psi = 1.55$ и $\zeta = 0.1$. Построение решений системы нелинейных уравнений (62)–(63), определяющих (94)–(95), проводилось методом последовательного увеличения числа уравнений по k до тех пор, пока относительный прирост нормы $||\rho^*(\psi)||_{l_2^1}$ оставался более 0.01. Таких устойчивых решений удалось выявить семь. На рисунке также приведены графики точных решений (тонкая линия), полученные численным интегрированием уравнения (4) при этих же значениях параметров, методом Эйлера с постоянным выбором шага. Шаг интегрирования уменьшался до полной стабилизации результатов вычислений. В качестве начальных значений при интегрировании уравнения (4) выбирались функции, полученные согласно (94)–(95). Таким образом, в поведении решений уравнения (4) наблюдается мультистабильность.

Список литературы / References

[1] Glass L., Mackey M., *From Clocks to Chaos. The Rhythms of Life*, Princeton: Princeton University Press, 1988.

[2] Liz E., Trofimchuk E., Trofimchuk S., “Mackey–Glass type delay differential equations near the boundary of absolute stability”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **275**:2 (2002), 747–760.

[3] Su H., Ding X., Li W., “Numerical bifurcation control of Mackey–Glass system”, *Applied Mathematical Modelling*, **35**:27 (2011), 3460–3472.

[4] Berezansky L., Braverman E., “Mackey-glass equation with variable coefficients”, *Computers & Mathematics with Applications*, **51**:1 (2006), 1–16.

[5] Wu X.-M., Li J.-W., Zhou H.-Q., “A necessary and sufficient condition for the existence of positive periodic solutions of a model of hematopoiesis”, *Computers & Mathematics with Applications*, **54**:6 (2007), 840–849.

[6] Junges L., Gallas J., “Intricate routes to chaos in the Mackey–Glass delayed feedback system”, *Physics Letters A*, **376**:30–31 (2012), 2109–2116.

[7] Amil P., Cabeza C., Masoller C., Marti A., “Organization and identification of solutions in the time-delayed Mackey-Glass model”, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **25**:4 (2015), 043112.

[8] Кубышкин Е. П., Назаров А. Ю., “Анализ колебательных решений одного нелинейного сингулярно возмущенного дифференциально-разностного уравнения”, *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*, **5**:2 (2012), 118–125; [Kubyshkin E. P., Nazarov A. Yu., “Analysis of oscillatory solutions of a nonlinear singularly perturbed differential-difference equation”, *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo*, **5**:2 (2012), 118–125, (in Russian).]

[9] Bellman R., Cooke K. L., *Differential Difference Equations*, New York: Academic Press, 1963.

[10] Шиманов С. Н., “К теории колебаний квазилинейных систем с запаздыванием”, *Прикл. математика и механика*, **23**:5 (1959), 836–844; [Shimanov S. N., “To theory of oscillations of quasi-linear systems with delay”, *J. Appl. Math. Mech.*, **23**:5 (1959), 836–844, (in Russian).]

[11] Krasnoselskii M. A., Vainikko G. M., Zabreyko R. P., Ruticki Ya. B., Stetsenko V. Ya, *Approximate solution of operator equations*, Springer, 1972.

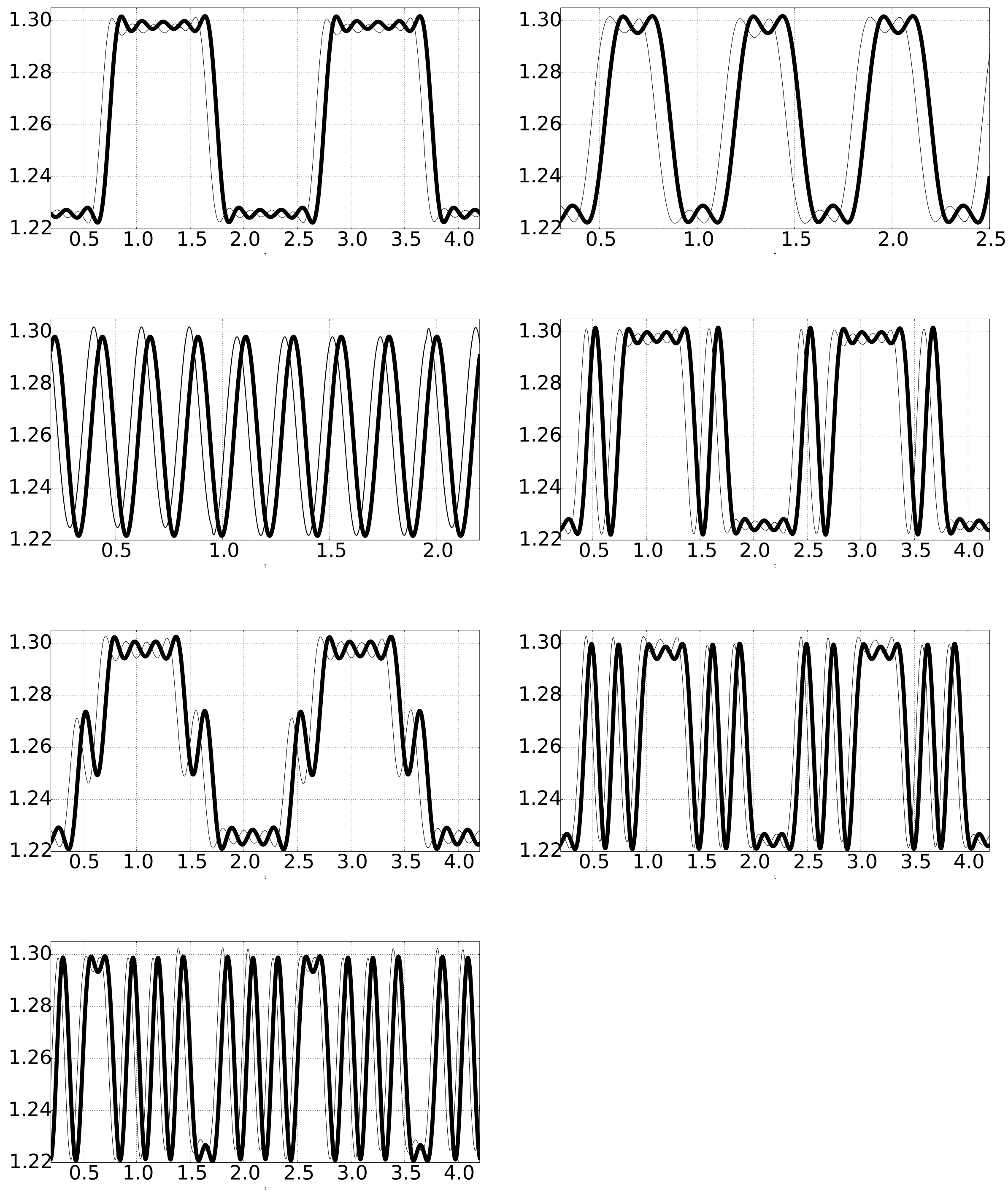

Рис. 1. Периодические решения уравнения Мэкки–Гласса для $\zeta = 0.1$, $\psi = 1.55$
Fig. 1. Periodic solutions of the equation Mackey–Glass for $\zeta = 0.1$, $\psi = 1.55$

Kubyshkin E. P., Moryakova A.R., "Bifurcation of Periodic Solutions of the Mackey–Glass Equation", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:6 (2016), 784–803.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-6-784-803

Abstract. We study the bifurcation of the equilibrium states of periodic solutions for the Mackey–Glass equation. This equation is considered as a mathematical model of changes in the density of white blood cells. The equation written in dimensionless variables contains a small parameter at the derivative, which makes it singular. We applied the method of uniform normalization, which allows us to reduce the study of the solutions behavior in the neighborhood of the equilibrium state to the analysis of the countable system of ordinary differential equations. We poot out the equations in "fast" and "slow" variables from this system. Equilibrium states of the "slow" variables equations determine the periodic solutions. The analysis of equilibrium states allows us to study the bifurcation of periodic solutions depending on the parameters of the equation and their stability. The possibility of simultaneous bifurcation of a large number of stable periodic solutions is shown. This situation is called the multistability phenomenon.

Keywords: the Mackey–Glass equation, periodic solutions, multistability bifurcation

About the authors:
Evgenii P. Kubyshkin, orcid.org/0000-0003-1796-0190, Doctor, Professor,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: kubysh.e@yandex.ru

Alena R. Moryakova, orcid.org/0000-0003-2529-6277, graduate student,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia,
e-mail: alyona_moryakova@mail.ru

Acknowledgments:
This research was supported by project № 984 within the base part of state assignment on research in YarSU.