

©Кащенко А. А., 2016

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-6-841-849

УДК 517.9

Динамика системы из двух простейших автогенераторов с нелинейными финитными обратными связями

Кащенко А. А.

получена 1 сентября 2016

Аннотация. В данной работе рассматривается сингулярно возмущенная система двух дифференциальных уравнений с запаздыванием, которая моделирует два связанных автогенератора с нелинейной обратной связью. Функция обратной связи предполагается финитной, кусочно-непрерывной и сохраняющей знак. В работе доказывается существование релаксационных периодических решений и делается вывод о характере их устойчивости. С помощью специального метода большого параметра строится асимптотика всех решений данной системы с начальными условиями из некоторого класса. По данной асимптотике строится специальное отображение, которое в главном описывает динамику исходной модели. Показано, что при убывании коэффициента связи динамика существенно меняется: при значениях связи порядка единицы имеем устойчивое однородное периодическое решение, а при уменьшении параметра связи возникают более сложные динамические режимы, которые описываются специальным построенным в явном виде одномерным отображением. Удастся показать, что при малых значениях связи при некоторых значениях параметров в исходной задаче сосуществуют несколько различных устойчивых релаксационных периодических режимов.

Ключевые слова: асимптотика, устойчивость, большой параметр, релаксационное колебание, периодическое решение

Для цитирования: Кащенко А. А., "Динамика системы из двух простейших автогенераторов с нелинейными финитными обратными связями", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23:6** (2016), 841–849.

Об авторах:

Кащенко Александра Андреевна, orcid.org/0000-0003-3823-9351, канд. физ.-мат. наук, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003, Россия, e-mail: a.kashchenko@uniyar.ac.ru

Благодарности:

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта 1875 госзадания на НИР №2014/258.

Введение

Одной из простейших моделей автогенератора с запаздывающей обратной связью является скалярное уравнение

$$\dot{u} + u = \lambda F(u(t - T)). \quad (1)$$

Параметр запаздывания T и коэффициент λ положительны, а $F(u)$ — некоторая нелинейная функция. Уравнения такого типа возникают во многих прикладных задачах [1–3]. В [1, 4, 5] отмечалось, что важное значение имеет рассмотрение таких нелинейностей $F(u)$, значения которых сосредоточены в некоторой ограниченной области. В связи с этим здесь предполагается, что функция $F(u)$ является финитной, то есть для некоторого $p > 0$ имеет место равенство

$$F(u) = \begin{cases} f(u), & |u| < p, \\ 0, & |u| \geq p. \end{cases} \quad (2)$$

Условие (2) не является ограничением при локальном (например, в малой окрестности какого-либо состояния равновесия) анализе (1), а при нелокальном исследовании уравнения (1) оно играет ключевую роль. Для того, чтобы подчеркнуть важность этого условия, будем предполагать, что параметр λ является достаточно большим:

$$\lambda \gg 1. \quad (3)$$

В [6] было показано, что при некоторых условиях типа невырожденности динамические свойства (1) довольно простые: имеется одно или два устойчивых релаксационных периодических решения и найдена их асимптотика при $\lambda \rightarrow \infty$.

В настоящей работе исследуется поведение решений системы из двух связанных уравнений вида (1) при условиях (2) и (3):

$$\begin{cases} \dot{u}_1 + u_1 = \lambda F(u_1(t - T)) + \gamma(u_2 - u_1), \\ \dot{u}_2 + u_2 = \lambda F(u_2(t - T)) + \gamma(u_1 - u_2). \end{cases} \quad (4)$$

Здесь функция $F(u)$ удовлетворяет условию (2), а кусочно непрерывная функция $f(u)$ отделена от нуля на отрезке $[-p, p]$ и сохраняет знак на интервале $(-p, p)$. Параметр связи γ положителен и мал при $\lambda \rightarrow \infty$:

$$\gamma = \gamma_1(\ln \lambda)^{-1}, \quad (\gamma_1 > 0). \quad (5)$$

Исследование базируется на использовании специальной методики, разработанной в [6, 7]. Суть ее состоит в следующем. В фазовом пространстве $C_{[-T, 0]}(R^2)$ системы (4) выделяются некоторые множества $S(x)$, зависящие от параметра x . Затем исследуется асимптотика при $\lambda \rightarrow \infty$ всех решений (4) с начальными условиями из $S(x)$. Удастся установить, что через некоторый отрезок времени каждое из рассматриваемых решений попадает в множество $S(\bar{x})$, где для $\bar{x}$ получено асимптотическое при $\lambda \rightarrow \infty$ представление вида $\bar{x} = \phi(x) + o(1)$. После этого строится оператор последования $\Pi : \Pi S(x) \subset S(\bar{x})$. Итерации этого оператора определяются в главном динамикой одномерного отображения $\bar{x} = \phi(x)$. Используя фундаментальные результаты А.Н. Шарковского [8], приходим к выводу о том, что для системы (4) могут быть характерны сложные нерегулярные колебания.

1. Динамика системы (4) при условии $\gamma = \gamma_1(\ln \lambda)^{-1}$

Рассмотрим два случая:

- а) $f(u) > 0$ при $u \in (-p, p)$;
- б) $f(u) < 0$ при $u \in (-p, p)$.

Определим множество $S(x) \subset C_{[-T,0]}(R^2)$ начальных условий для решений (4). Введем несколько обозначений. Пусть x — некоторый параметр, для которого выполнено условие $|x| \geq 1$. Пусть k — параметр, принимающий значения 1 и -1 . Еще один параметр m принимает только два значения: 1 и 2, причем считаем, что $m+1$ равно 2, если $m=1$ и $m+1$ равно 1, если $m=2$. Фиксируем произвольно значения x , k и m . Пусть при $s \in [-T, 0]$ выполнены условия

$$\begin{cases} |u_m(s)| \geq p, & u_m(0) = kp, \\ |u_{m+1}(s)| \geq p, & u_{m+1}(0) = xp. \end{cases} \quad (6)$$

Множество функций, удовлетворяющих условиям (6), обозначим через $S(x)$. В случае а) мы рассматриваем только положительные начальные условия, а в случае б) только отрицательные.

Отметим одно важное обстоятельство. При увеличении времени t для решений системы (4) последовательно чередуются участки двух типов. В первом из них нелинейность не тождественно нулевая, а во втором — нулевая, и тогда функции u_1 и u_2 являются решением линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{u}_1 + u_1 = \gamma_1(\ln \lambda)^{-1}[u_2 - u_1], \quad \dot{u}_2 + u_2 = \gamma_1(\ln \lambda)^{-1}[u_1 - u_2]. \quad (7)$$

Возможность полного асимптотического исследования решений (4) обусловлена тем, что для решений с начальными условиями из выбранного класса длительность участков первого типа имеет порядок $O(1)$ (при $\lambda \rightarrow \infty$), а длительность участков второго типа — асимптотически большая — порядка $O(\ln \lambda)$. Отметим еще, что на участках второго типа происходит убывание функций $|u_1(t)|$ и $|u_2(t)|$ от асимптотически больших значений до значений порядка $O(1)$.

Ниже понадобится формула при любых t и τ для решений системы (7):

$$u_1(t) = \frac{1}{2} \left[u_1(\tau) + u_2(\tau) + (u_1(\tau) - u_2(\tau)) \exp \left(\frac{2\gamma_1}{\ln \lambda}(\tau - t) \right) \right] \exp(\tau - t), \quad (8)$$

$$u_2(t) = \frac{1}{2} \left[u_1(\tau) + u_2(\tau) + (u_2(\tau) - u_1(\tau)) \exp \left(\frac{2\gamma_1}{\ln \lambda}(\tau - t) \right) \right] \exp(\tau - t). \quad (9)$$

Поскольку при каждом $x = x_0$ функции из множества $S(x_0)$ при $s \in [-T, 0]$ удовлетворяют условиям (6), то на отрезке $t \in [0, T]$ система (4) будет иметь вид (7) и все решения с начальными условиями из $S(x_0)$ совпадут на данном отрезке, а значит, совпадут и при дальнейших значениях t .

Из (8), (9) получаем, что для решений $u_m(t)$ и $u_{m+1}(t)$ с начальными условиями (6) на отрезке $t \in [0, T]$ верны асимптотические равенства

$$u_m(t) = kp(1 + o(1)) \exp(-t),$$

$$u_{m+1}(t) = xp(1 + o(1)) \exp(-t).$$

Пусть затем $t \in [T, 2T]$. Предположим, что выполнено неравенство

$$|x| \exp(-T) > 1. \quad (10)$$

Тогда приходим к равенствам

$$u_m(t) = \lambda[g_k(t) + o(1)], \quad (11)$$

$$u_{m+1}(t) = \gamma_1 \lambda (\ln \lambda)^{-1} [g_{k,1}(t) + o(1)]. \quad (12)$$

Здесь

$$g_k(t) = \int_T^t \exp(s-t) f(kp \exp(T-s)) ds, \quad (13)$$

$$g_{k,1}(t) = \int_T^t \exp(s-t) g_k(s) ds. \quad (14)$$

Пусть теперь $|x| \exp(-T) < 1$. Тогда на отрезке $[0, T]$ существует корень $\tau = \tau(x)$ уравнения

$$|x| \exp(-\tau) = 1.$$

Таким образом, $\tau(x) = \ln |x|$. Для $u_m(t)$ на рассматриваемом отрезке $[T, 2T]$ остается верной формула (11), а формула (12) верна только при $t \in [T, T + \tau(x)]$. Если же $t \in (T + \tau(x), 2T]$, то для $u_{m+1}(t)$ переходим к равенству

$$u_{m+1}(t) = \lambda [g(t, x) + o(1)],$$

где

$$g(t, x) = \int_{T+\tau(x)}^t \exp(s-t) f(xp \exp(T-s)) ds.$$

Заметим, что выполнены неравенства

$$g_k(t) \neq 0, \quad g_{k,1}(t) \neq 0 \quad \forall t \in (T, 2T], \quad (15)$$

$$g(t, x) \neq 0 \quad \forall t \in (T + \tau(x), 2T] \quad (16)$$

и что функции $u_m(t)$ и $u_{m+1}(t)$ на отрезке $[T, 2T]$ имеют тот же знак, что и на отрезке $[0, T]$.

При $t = 2T$ получаем

$$u_m(2T) = \lambda [g_k(2T) + o(1)], \quad (17)$$

$$u_{m+1}(2T) = \begin{cases} \gamma_1 \lambda (\ln \lambda)^{-1} [g_{k,1}(2T) + o(1)], & \text{при } |x| \exp(-T) > 1, \\ \lambda [g(2T, x) + o(1)], & \text{при } |x| \exp(-T) < 1. \end{cases} \quad (18)$$

Пусть $t \in [2T, 3T]$. Тогда решение системы (4) есть общее решение однородной системы (7) плюс частное решение неоднородной системы (4) (так как $t - T$ принадлежит отрезку $[T, 2T]$, то выражения $\lambda F(u_j(t - T))$ ($j = 1, 2$) в системе (4) — известные функции). При условиях (15) и (16) порядок частного решения на данном отрезке времени будет не больше $O(\ln \lambda)$. Поскольку общее решение линейной системы будет по порядку не меньше $O(\lambda / \ln \lambda)$, то именно оно будет давать главное приближение решения при $t \in [2T, 3T]$. Следовательно, функции $u_m(t)$ и $u_{m+1}(t)$ на всем отрезке $t \in [2T, 3T]$ будут по модулю больше p . Тогда при $t > 3T$ пока выполнены неравенства $|u_m(t)| > p$ и $|u_{m+1}(t)| > p$, система (4) будет иметь вид (7).

Найдем главное приближение решений при условиях $t > 2T$, $|u_m(t)| > p$ и $|u_{m+1}(t)| > p$. Введем обозначение $\tilde{t} = t - 2T$.

Пусть $|x| \exp(-T) > 1$. Заметим, что из условий на функцию $f(u)$ следует, что

$$g_k(2T) \cdot g_{k,1}(2T) > 0. \quad (19)$$

Тогда будут верны формулы

$$u_m(t) = \frac{\lambda}{2} \exp(-\tilde{t}) \left[g_k(2T) \left(1 + \exp\left(\frac{-2\gamma_1 \tilde{t}}{\ln \lambda}\right) \right) + o(1) \right], \quad (20)$$

$$u_{m+1}(t) = \begin{cases} \frac{\gamma_1 \lambda}{\ln \lambda} \exp(-\tilde{t}) [g_k(2T) \tilde{t} + g_{k,1}(2T) + o(1)], & \text{при } \tilde{t} = o(\ln \lambda), \\ \frac{\lambda}{2} \exp(-\tilde{t}) [g_k(2T) (1 - \exp(\frac{-2\gamma_1 \tilde{t}}{\ln \lambda})) + o(1)], & \text{при } \tilde{t} = O(\ln \lambda). \end{cases} \quad (21)$$

Если же $|x| \exp(-T) < 1$, то функции $u_m(t)$ и $u_{m+1}(t)$ будут иметь вид

$$u_m(t) = \frac{\lambda}{2} \exp(-\tilde{t}) [g_k(2T)(1 + \exp(-2\gamma_1 \tilde{t}(\ln \lambda)^{-1})) + g(2T, x)(1 - \exp(-2\gamma_1 \tilde{t}(\ln \lambda)^{-1})) + o(1)], \quad (22)$$

$$u_{m+1}(t) = \frac{\lambda}{2} \exp(-\tilde{t}) [g_k(2T)(1 - \exp(-2\gamma_1 \tilde{t}(\ln \lambda)^{-1})) + g(2T, x)(1 + \exp(-2\gamma_1 \tilde{t}(\ln \lambda)^{-1})) + o(1)]. \quad (23)$$

Правые части в (20), (21), (22) и (23) стремятся к нулю при $\tilde{t} \rightarrow \infty$, поэтому при $t > 2T$ найдутся такие t_m и t_{m+1} , что $|u_m(t_m)| = p$ и $|u_{m+1}(t_{m+1})| = p$. Пусть $t_0(\lambda) = \min(t_m, t_{m+1})$. Отметим, что из неравенств (15), (16) и (19) следует, что $t_0(\lambda) = \ln \lambda \cdot (1 + o(1))$.

Положим

$$R(x) = \begin{cases} (1 + \exp(-2\gamma_1)) \times (1 - \exp(-2\gamma_1))^{-1}, & \text{при } |x|e^{-T} > 1, \\ \frac{g_k(2T)(1 + \exp(-2\gamma_1)) + g(2T, x)(1 - \exp(-2\gamma_1))}{g_k(2T)(1 - \exp(-2\gamma_1)) + g(2T, x)(1 + \exp(-2\gamma_1))}, & \text{при } |x|e^{-T} < 1. \end{cases}$$

В качестве значения $\bar{m}$ выберем такое из чисел m и $m+1$, для которого выполнено соотношение $t_{\bar{m}} = t_0(\lambda)$. Тем самым $u_{\bar{m}}(t_0(\lambda)) = \bar{k}p$ и $u_{\bar{m}+1}(t_0(\lambda)) = \bar{x}p$. Заметим, что в силу условий на функцию $f(u)$ и выбора начальных условий имеем $\bar{k} = k$. С помощью функции $R(x)$ величины $\bar{m}$ и $\bar{x}$ определяются равенствами

$$\bar{m} = \begin{cases} m, & \text{при } |R(x)| < 1, \\ m + 1, & \text{при } |R(x)| > 1; \end{cases} \quad (24)$$

$$\bar{x} = \begin{cases} kR^{-1}(x), & \text{при } |R(x)| < 1, \\ kR(x), & \text{при } |R(x)| > 1. \end{cases} \quad (25)$$

Таким образом, начиная с $t = t_0(\lambda)$, вернулись к исходной ситуации с заменой m на $\bar{m}$ и x на $\bar{x}$ согласно (24), (25).

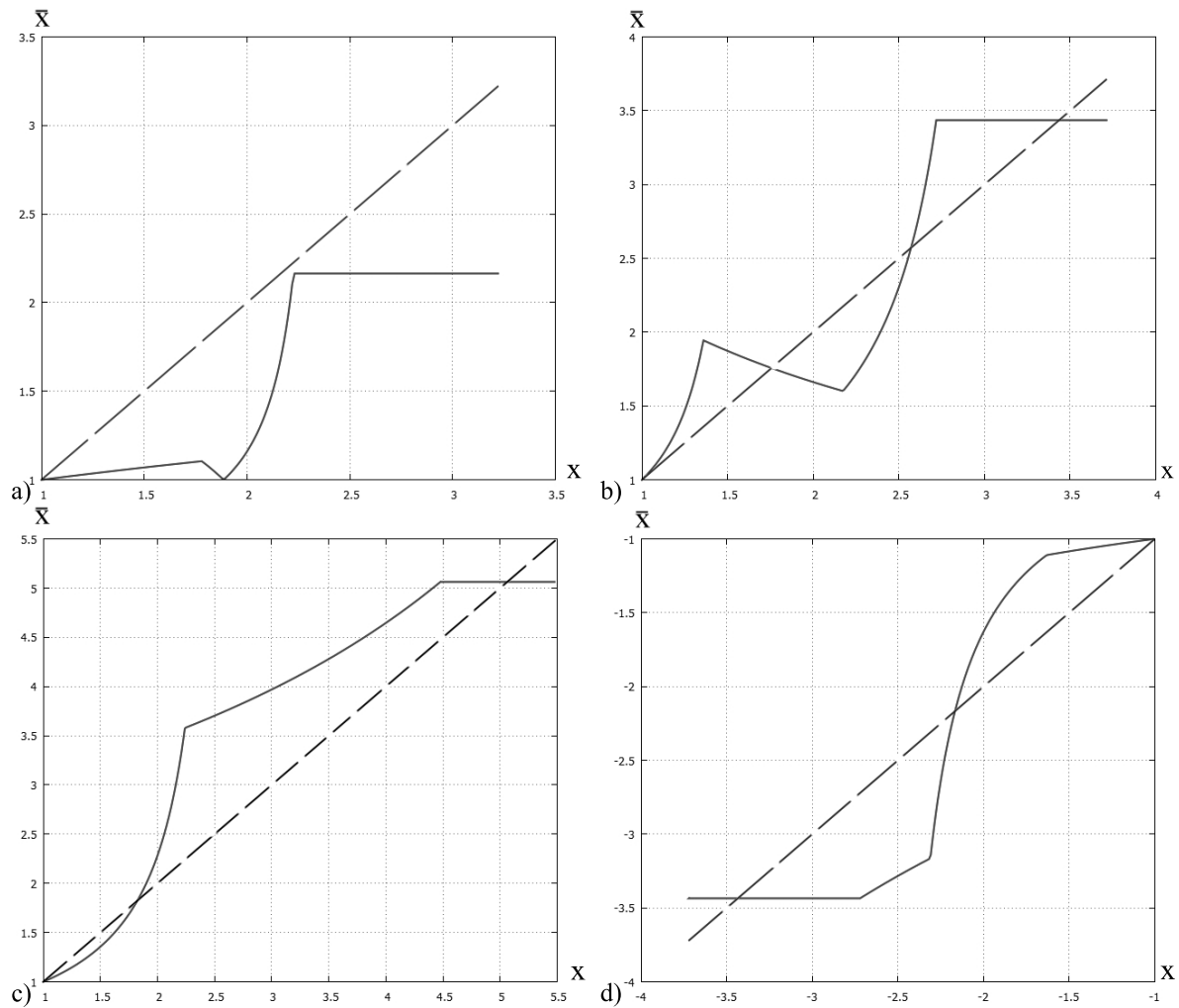


Рис. 1. Примеры графиков отображения (25): а) – с) – случай $f(u) > 0$; d) – случай $f(u) < 0$

Fig. 1. Some plots of mapping (25): а) – с) – case $f(u) > 0$; d) – case $f(u) < 0$

На рисунке 1 изображены некоторые примеры графиков отображения (25) и вспомогательный график $\bar{x} = x$ (пунктирной линией). Несложно доказать, что при любых значениях параметров у отображения (25) найдется хотя бы одно устойчивое состояние равновесия. Как видно из рисунка 1, при некоторых значениях параметров (случаи (b) – (d)) у отображения (25) могут сосуществовать несколько устойчивых неподвижных точек, в том числе могут сосуществовать два устойчивых состояния равновесия, соответствующие неоднородным периодическим режимам исходной задачи (случай (b)). Здесь неоднородными мы называем режимы, для которых выполняется условие $u_1(t) \neq u_2(t)$.

Отдельно остановимся на вопросах устойчивости таких периодических решений (4), о существовании которых говорится выше. Все они имеют ярко выраженную релаксационную структуру: период у них порядка $\ln \lambda$ (при $\lambda \rightarrow \infty$); в течение относительно короткого отрезка времени (порядка $O(1)$) соответствующие функции могут совершать скачок от величины порядка 1 до значений порядка λ , а остальное

(на отрезке длины периода) время решения являются экспоненциально убывающими по закону линейной системы (4) при $F \equiv 0$. Для гладких функций F методика оценок мультипликаторов, развитая в [9], позволяет определить их асимптотику. Просто устанавливается, что все, кроме двух, мультипликаторов стремятся к нулю при $\lambda \rightarrow \infty$. Один мультипликатор всегда равен 1. Таким образом для ответа на вопрос об устойчивости необходимо исследовать поведение одного оставшегося мультипликатора. Этот мультипликатор совпадает (в главном) с мультипликатором цикла приводимых одномерных отображений. Тем самым устойчивость периодических решений (4) та же, что и устойчивость соответствующих траекторий одномерных отображений. Если же кусочно-непрерывная функция F не является гладкой, то ее можно сколь угодно близко по норме $C_{[-p,p]}$ приблизить некоторой гладкой функцией (обозначим ее F_*). Так как для фиксированного $x_0 \in \mathbb{R}$ все решения системы вида (4) с начальными условиями из множества $S(x_0)$ совпадут на отрезке $t \in [0, T]$ (и, как следствие, при всех больших t), то можно установить взаимнооднозначное соответствие (по значению x) между периодическими решениями системы (4) и системы вида (4), где функция F заменена гладкой функцией F_* . Тогда при достаточно хорошей степени сглаживания получаем, что устойчивость соответствующих решений в этих системах одинакова. Данные построения довольно громоздкие, поэтому ограничимся здесь кратким описанием итоговых выводов.

Сформулируем итоговые результаты.

Теорема 1. Пусть отображение (24), (25) имеет цикл $(t_i; x_i)$ периода n . Тогда система (4) имеет периодическое решение $(u_m^n(t), u_{m+1}^n(t))$ той же устойчивости, параметры которого определяются значениями $(t_i; x_i)$ соответствующего цикла.

Напомним, что однородным периодическим решением $(u_1(t), u_2(t))$ (4) называют такое, для которого $u_1(t) \equiv u_2(t) = u_0(t)$. Из теоремы 1 и того, что при достаточно больших значениях параметра γ_1 у отображения (25) есть устойчивая неподвижная точка $\bar{x} = 1$ (в случае положительной функции $f(u)$) или $\bar{x} = -1$ (в случае отрицательной функции $f(u)$), получаем следующий результат.

Теорема 2. Найдутся такие $\gamma_{10} > 0$ и $\lambda_0 > 0$, что при $\gamma_1 \geq \gamma_{10}$ и $\lambda \geq \lambda_0$ однородное периодическое решение системы (4) орбитально устойчиво.

Выводы

Асимптотическими методами исследована нелокальная динамика систем из двух связанных автогенераторов с нелинейной финитной запаздывающей обратной связью. Показано, что при убывании коэффициента связи динамика существенно меняется. Сначала при $\gamma \sim 1$ имеем устойчивое однородное $(u_1 \equiv u_2)$ периодическое решение. При уменьшении γ в диапазоне $\sim \text{const}(\ln \lambda)^{-1}$ возникают более сложные динамические режимы, которые описываются специальным построенным в явном виде одномерным отображением.

Разработанные аналитические методы позволяют получить асимптотические формулы для всех исследуемых решений.

Список литературы / References

- [1] Дмитриев А. С., Кислов В. Я., *Стохастические колебания в радиотехнике*, Наука, Москва, 1989; [Dmitriev A. S., Kislov V. Ya., *Stokhasticheskie kolebaniya v radiotekhnike*, Nauka, Moskva, 1989, (in Russian).]
- [2] Рождественский В. В., Стручков И. Н., “Переходный хаос в автогенераторе стохастических колебаний с жестким возбуждением и четной нелинейностью”, *ЖТФ*, **62**:10 (1992), 102–110; [Rozhdestvenskiy V. V., Struchkov I. N., “Perekhodnyy khaos v avtogenatore stokhasticheskikh kolebaniy s zhestkim возбуждением i chetnoy nelineynostyu”, *Journal of technical physics*, **62**:10 (1992), 102–110, (in Russian).]
- [3] Стручков И. Н., “Переходный хаос в аperiodическом осцилляторе с запаздыванием”, *Радиотехника и электроника*, **38**:3 (1993), 454–463; [Struchkov I. N., “Perekhodnyy khaos v aperiodicheskom ostillyatore s zapazdyvaniem”, *Radiotekhnika i elektronika*, **38**:3 (1993), 454–463, (in Russian).]
- [4] Дмитриев А. С., Кащенко С. А., “Динамика генератора с запаздывающей обратной связью и низкодобротным фильтром второго порядка”, *Радиотехника и электроника*, **34**:12 (1989), 24–39; [Dmitriev A. S., Kaschenko S. A., “Dinamika generatora s zapazdyvayushchey obratnoy svyazyu i nizkodobrotnym filtrom vtorogo poriyadka”, *Radiotekhnika i elektronika*, **34**:12 (1989), 24–39, (in Russian).]
- [5] Дмитриев А. С., Кащенко С. А., “Асимптотика нерегулярных колебаний в модели автогенератора с запаздывающей обратной связью”, *Докл. РАН*, **328**:2 (1993), 174–177; English transl.: Dmitriev A. S., Kaschenko S. A., “Asymptotics of irregular oscillations in a self-sustained oscillator model with delayed feedback”, *Doklady Mathematics*, **328** (1993), 157–160.
- [6] Кащенко С. А., “Асимптотика релаксационных колебаний в системах дифференциально-разностных уравнений с финитной нелинейностью. I”, *Дифференциальные уравнения*, **31**:8 (1995), 1330–1339; [Kaschenko S. A., “Asimptotika relaksatsionnykh kolebaniy v sistemakh differentsialno-raznostnykh uravneniy s finitnoy nelineynostyu. I”, *Differentsialnye uravneniya*, **31**:8 (1995), 1330–1339, (in Russian).]
- [7] Кащенко С. А., “Асимптотика релаксационных колебаний в системах дифференциально-разностных уравнений с финитной нелинейностью. II”, *Дифференциальные уравнения*, **31**:12 (1995), 1968–1976; [Kaschenko S. A., “Asimptotika relaksatsionnykh kolebaniy v sistemakh differentsialno-raznostnykh uravneniy s finitnoy nelineynostyu. II”, *Differentsialnye uravneniya*, **31**:12 (1995), 1968–1976, (in Russian).]
- [8] Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю., *Разностные уравнения и их приложения*, Наукова думка, Киев, 1986; English transl.: Sharkovsky A. N., Maistrenko Yu. L., and Romanenko E. Yu., *Difference equations and their applications*, Springer Science & Business Media, 2012.
- [9] Кащенко С. А., “Релаксационные колебания в системе с запаздываниями, моделирующей задачу «хищник–жертва»”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **20**:1 (2013), 52–98; [Kaschenko S. A., “Relaxation Oscillations in a System with Delays Modeling the Predator-Prey Problem”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **20**:1 (2013), 52–98, (in Russian).]

Kashchenko A. A., "Dynamics of a System of Two Simplest Oscillators with Finite Non-linear Feedbacks", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:6 (2016), 841–849.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-6-841-849

Abstract. In this paper, we consider a singularly perturbed system of two differential equations with delay which simulates two coupled oscillators with nonlinear feedback. Feedback function is assumed to be finite, piecewise continuous, and with a constant sign. In this paper, we prove the existence of relaxation periodic solutions and make conclusion about their stability. With the help of the special

method of a large parameter we construct asymptotics of the solutions with the initial conditions of a certain class. On this asymptotics we build a special mapping, which in the main describes the dynamics of the original model. It is shown that the dynamics changes significantly with the decreasing of coupling coefficient: we have a stable homogeneous periodic solution if the coupling coefficient is of unity order, and with decreasing the coupling coefficient the dynamics become more complex, and it is described by a special mapping. It was shown that for small values of the coupling under certain values of the parameters several different stable relaxation periodic regimes coexist in the original problem.

Keywords: asymptotics, stability, large parameter, relaxation oscillation, periodic solution

About the authors:

Aleksandra A. Kashchenko, orcid.org/0000-0003-3823-9351, PhD,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: a.kashchenko@uniyar.ac.ru

Acknowledgments:

This work was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project no. 2014/258-1875).