©Марушкина Е.А., 2016

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-6-850-859

УДК 517.9

Устойчивые циклы и торы системы из трех и четырех диффузионно связанных осцилляторов

Марушкина Е.А.

получена 15 сентября 2016

Аннотация. Рассматриваются цепочки идентичных диффузионно слабо связанных колебательных систем с различными условиями связи на границе цепочки. Предполагается, что с каждым из взаимодействующих осцилляторов происходит бифуркация Андронова – Хопфа, а коэффициент связи пропорционален величине надкритичности. В этой ситуации на устойчивом интегральном многообразии системы построена нормальная форма, для которой в случае трех взаимодействующих осцилляторов удается проанализировать простейшие состояния равновесия и их фазовые перестройки. При изменении параметра связи для однородного состояния равновесия, соответствующего однородному циклу задачи, возможны два случая, в первом из которых оно теряет устойчивость с появлением двух устойчивых неоднородных состояний, а во втором с ним сливаются два неустойчивых неоднородных состояния и отбирают у него устойчивость. Для состояния равновесия, соответствующего колебаниям осцилляторов в противофазе, также можно выделить два случая. В первом из них это состояние равновесия становится устойчивым в результате стягивания к нему устойчивого предельного цикла системы (бифуркация Андронова – Хопфа), а во втором случае оно становится устойчивым после ответвления от него неустойчивого предельного цикла. В случае, когда число осцилляторов в цепочке равно четырем, проанализирована система разностей фаз осцилляторов, получающаяся при достаточно малом коэффициенте связи.

Ключевые слова: нормальная форма, автоколебания, автогенераторы, бифуркация, инвариантный тор

Для цитирования: Марушкина Е.А., "Устойчивые циклы и торы системы из трех и четырех диффузионно связанных осцилляторов", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23:6** (2016), 850–859.

Об авторах:

Марушкина Елена Александровна, канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник Лаборатории дискретной и вычислительной геометрии им. Б.Н. Делоне, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль 150003, Россия, e-mail: marushkina-ea@yandex.ru

Благодарности:

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-60039 мол_а_дк.

1. Постановка задачи

Рассматриваются разностные аппроксимации краевой задачи (см. [1–5])

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu D \Delta u + \Phi(u), \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (2)$$

представляющей собой систему типа «реакция-диффузия» и часто встречающейся в физических и биологических приложениях. В системе (1) вектор-функция $u(t, x) \in \mathbb{R}^m$ определена в области Ω с достаточно гладкой границей Γ , D — $m \times m$ диагональная матрица с положительными элементами, Δ — оператор Лапласа, μ — положительный параметр, $\partial u / \partial \nu$ — производная по направлению внешней нормали. Фазовым пространством задачи (1), (2) считаем $\mathring{W}_2^2(\Omega; \mathbb{R}^m)$, где $\mathring{W}_2^2$ — соболевское пространство функций, удовлетворяющих нулевым граничным условиям Неймана. Кроме того, полагаем, что система обыкновенных дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^m$

$$\dot{u} = \Phi(u) \quad (3)$$

имеет единственный аттрактор — экспоненциально орбитально устойчивый цикл.

Предположим далее, что область Ω одномерная и представляет собой отрезок $[0, 1]$, а наличие у системы (3) экспоненциально орбитально устойчивого цикла обусловлено происходящей в ней бифуркацией Андронова – Хопфа. Тогда после замены в этой краевой задаче второй частной производной по пространственной переменной на ее разностный аналог приходим к системе диффузионно связанных осцилляторов, связь в которой будем считать слабой

$$\dot{u}_j = \varepsilon D(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}) + (A_0 + \varepsilon A_1)u_j + F_2(u_j, u_j) + F_3(u_j, u_j, u_j) + O(\|u_j\|^4), \quad (4)$$

где $u_j(t) \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, $j = 1, \dots, n$, с условиями на границах цепочки

$$u_0 = u_2, \quad u_{n+1} = u_{n-1}. \quad (5)$$

Будем, кроме того, предполагать, что $m \times m$ матрица A_0 имеет пару чисто мнимых собственных чисел $\pm i\omega$, причем остальные ее собственные числа лежат в левой комплексной полуплоскости. Для $m \times m$ матрицы A_1 и квадратичной и кубической нелинейностей $F_2(u, u)$ и $F_3(u, u, u)$ будем считать выполненными условия бифуркации Андронова – Хопфа, то есть при достаточно малых значениях параметра $0 < \varepsilon \ll 1$ у каждого отдельного осциллятора от нулевого состояния равновесия ответвляется орбитально устойчивый цикл. Обозначим a собственный вектор матрицы A_0 такой, что $A_0 a = i\omega a$, соответственно b — удовлетворяет сопряженной системе $A^T b = -i\omega b$, причем $(a, b) = 1$. Величины

$$\varphi_0 + i\psi_0 = (A_1 a, b), \quad (6)$$

$$d_0 + ic_0 = (F_3(\bar{a}, a, a) + F_3(a, \bar{a}, a) + F_3(a, a, \bar{a}) + F_2(a, w_0) + F_2(w_0, a) + F_2(w_1, \bar{a}) + F_2(\bar{a}, w_1), b), \quad (7)$$

где $w_0 = -A_0^{-1}(F_2(a, \bar{a}) + F_2(\bar{a}, a))$, $w_1 = (2i\omega E - A_0)^{-1}F_2(a, a)$, позволяют сформулировать условие возникновения указанной фазовой перестройки (см., например, [1, 6]). Для рождения цикла необходимо, чтобы для величин φ_0 и d_0 в формулах (6), (7) выполнялись неравенства

$$\varphi_0 > 0, \quad d_0 < 0. \quad (8)$$

Рассмотрим задачу об устойчивых режимах, возникающих у системы (4) при изменении матрицы связи D .

Выполним в (4) стандартную замену асимптотического метода Крылова–Боголюбова–Митропольского (нами использовался алгоритм из [6])

$$u_j = \sqrt{\varepsilon} u_{0,j}(t, s) + \varepsilon u_{1,j}(t, s) + \varepsilon^{3/2} u_{2,j}(t, s) + \dots, \quad j = 1, \dots, n, \quad (9)$$

где $s = \varepsilon t$ — медленное время,

$$u_{0,j}(t, s) = z_j(s) \exp(i\omega t) a + \bar{z}_j(s) \exp(-i\omega \tau_j) \bar{a}, \quad (10)$$

функции $u_{k,j}(t, s)$ являются векторными тригонометрическими полиномами аргумента ωt . В результате этой замены на третьем шаге выполнения алгоритма после отбрасывания слагаемых высшего порядка малости система (4) преобразуется к виду

$$z'_j = (\varphi_0 + i\psi_0) z_j + (d_0 + ic_0) |z_j|^2 z_j + \kappa \exp(i\delta) (z_{j-1} - 2z_j + z_{j+1}), \quad j = 1, \dots, n, \quad (11)$$

где $z_0 = z_2$, $z_{n-1} = z_{n+1}$, $(Da, b) = \kappa \exp(i\delta)$, штрихом обозначена производная по s .

Полученную систему комплексных амплитуд будем рассматривать при $n = 3$ и $n = 4$.

2. Синхронные режимы амплитудной системы при $n = 3$

Будем называть (см. [1, 6]) *автомодельным циклом* системы (11) ее периодическое решение вида

$$z_j(s) = z_j^0 \exp(i\sigma s), \quad j = 1, \dots, n, \quad (12)$$

где $z_j^0 \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2$ и $\sigma \in \mathbb{R}$ — некоторые постоянные. В свою очередь *двумерным автомодельным тором* системы (11) будем называть ее квазипериодическое решение вида

$$z_j(s) = z_j^0(s) \exp(i\sigma s), \quad j = 1, \dots, n, \quad (13)$$

где σ — вещественная постоянная, а комплекснозначные функции $z_j^0(s)$, $j = 1, \dots, n$ периодичны по s с некоторым периодом $T_0 > 0$. Предполагаем, что решение (13) не приводится к виду (12).

Для автомодельных циклов и торов системы (11) выполнена следующая стандартная теорема о соответствии (см., например, [6, 8]).

Теорема 1. *Предположим, что система (11) имеет некоторый автомодельный цикл (тор), экспоненциально орбитально устойчивый или дихотомичный. Тогда найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ исходная система (4) имеет цикл (двумерный инвариантный тор) с теми же свойствами устойчивости, асимптотика которого задается формулами (9), (10) с учетом равенств (12) или (13) соответственно.*

Впервые система (11) была выписана и исследована для двух уравнений Хатчинсона в [9], затем в работах [10–13] для этой системы были выписаны условия

существования и устойчивости синхронного цикла и цикла, соответствующего колебаниям в противофазе. Общие результаты для автомодельных циклов и торов двумерной системы были получены в статье [1].

Рассмотрим далее случай трех осцилляторов $n = 3$, тогда для упрощения анализа системы (11) выполним в ней полярную замену (см. [4, 5, 7])

$$z_j(s) = \sqrt{-\frac{\operatorname{Re}(A_1 a, b)}{d_0}} \xi_j(s) \exp(i\tau_j(s)), \quad j = 1, 2, 3 \quad (14)$$

и нормирующую замену времени $\operatorname{Re}(A_1 a, b)s \rightarrow s$, в результате имеем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \xi_1' &= 2\kappa \xi_2 \cos(\tau_2 - \tau_1 + \delta) + (1 - 2\kappa \cos \delta - \xi_1^2) \xi_1, \\ \xi_2' &= \kappa (\xi_1 \cos(\tau_2 - \tau_1 - \delta) + \xi_3 \cos(\tau_2 - \tau_3 - \delta)) + (1 - 2\kappa \cos \delta - \xi_2^2) \xi_2, \\ \xi_3' &= 2\kappa \xi_2 \cos(\tau_2 - \tau_3 + \delta) + (1 - 2\kappa \cos \delta - \xi_3^2) \xi_3, \\ \tau_1' &= \psi_0 - 2\kappa \sin \delta + 2\kappa \frac{\xi_2}{\xi_1} \sin(\tau_2 - \tau_1 + \delta) - b_0 \xi_1^2, \\ \tau_2' &= \psi_0 - 2\kappa \sin \delta + \kappa \left(\frac{\xi_1}{\xi_2} \sin(\tau_1 - \tau_2 + \delta) + \frac{\xi_3}{\xi_2} \sin(\tau_3 - \tau_2 + \delta) \right) - b_0 \xi_2^2, \\ \tau_3' &= \psi_0 - 2\kappa \sin \delta + 2\kappa \frac{\xi_2}{\xi_3} \sin(\tau_2 - \tau_3 + \delta) - b_0 \xi_3^2, \end{aligned} \quad (15)$$

где $\psi_0 = \frac{\operatorname{Im}(A_1 a, b)}{\operatorname{Re}(A_1 a, b)}$, $\kappa = \frac{|(Da, b)|}{\operatorname{Re}(A_1 a, b)}$, $\delta = \arg((Da, b))$, $b_0 = \frac{c_0}{d_0}$.

От полученной шестимерной системы может быть отщеплена пятимерная система относительно переменных ξ_1, ξ_2, ξ_3 и $\alpha_1 = \tau_2 - \tau_1, \alpha_2 = \tau_2 - \tau_3$,

$$\begin{aligned} \xi_1' &= 2\kappa \xi_2 \cos(\alpha_1 + \delta) + (1 - 2\kappa \cos \delta - \xi_1^2) \xi_1, \\ \xi_2' &= \kappa (\xi_1 \cos(\alpha_1 - \delta) + \xi_3 \cos(\alpha_2 - \delta)) + (1 - 2\kappa \cos \delta - \xi_2^2) \xi_2, \\ \xi_3' &= 2\kappa \xi_2 \cos(\alpha_2 + \delta) + (1 - 2\kappa \cos \delta - \xi_3^2) \xi_3, \\ \alpha_1' &= -\kappa \left[\left(\frac{\xi_1}{\xi_2} + 2 \frac{\xi_2}{\xi_1} \right) \sin(\alpha_1 - \delta) + \frac{\xi_3}{\xi_2} \sin(\alpha_2 - \delta) \right] + b_0 (\xi_1^2 - \xi_2^2), \\ \alpha_2' &= -\kappa \left[\frac{\xi_1}{\xi_2} \sin(\alpha_1 - \delta) + \left(\frac{\xi_3}{\xi_2} + 2 \frac{\xi_2}{\xi_3} \right) \sin(\alpha_2 - \delta) \right] + b_0 (\xi_3^2 - \xi_2^2). \end{aligned} \quad (16)$$

Система (16) имеет два простейших состояния равновесия

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 1, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad (17)$$

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \sqrt{1 - 2\kappa \cos \delta}, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \pi, \quad (18)$$

Первое из них соответствует синфазным колебаниям в исходной системе, а второе — колебаниям в противофазе.

Следующее утверждение позволяет выяснить характер потери устойчивости состояния равновесия (17).

Теорема 2. Пусть $(\kappa - \kappa_{cr})c > 0$, где

$$c = c(\delta, b_0) \equiv \frac{1}{\kappa_{cr}} \left(2b_0 \sqrt{1 - \cos^2 \delta} (b_0^2 \cos \delta - 5 \cos \delta + 2) + \right. \\ \left. + 2(3 \cos^2 \delta - 1)(b_0^2 + 1) \right), \quad \kappa_{cr} = -\cos \delta - b_0 \sin \delta, \quad (19)$$

тогда в достаточно малой окрестности неподвижной точки $(1, 1, 1, 0, 0)^T$ имеются два состояния равновесия $(\xi_1^*, \xi_2^*, \xi_3^*, \alpha_1^*, \alpha_2^*)^T$ и $(\xi_3^*, \xi_2^*, \xi_1^*, -\alpha_1^*, -\alpha_2^*)^T$, которые устойчивы при $\kappa - \kappa_{cr} < 0$ и $c < 0$ и неустойчивы при $\kappa - \kappa_{cr} > 0$ и $c > 0$. Величины $\xi_1^*, \xi_2^*, \xi_3^*, \alpha_1^*, \alpha_2^*$ допускают при $|\kappa - \kappa_{cr}| \ll 1$ асимптотическое представление

$$\begin{aligned} \xi_1^* &= 1 - \sqrt{(\kappa - \kappa_{cr})/c} + O(\kappa - \kappa_{cr}), \\ \xi_2^* &= 1 + 2\sqrt{(\kappa - \kappa_{cr})/c} + O(\kappa - \kappa_{cr}), \\ \xi_3^* &= 1 - \sqrt{(\kappa - \kappa_{cr})/c} + O(\kappa - \kappa_{cr}), \\ \alpha_1^* &= -\alpha_2^* = -2(1 + \kappa \cos \delta) \sqrt{\frac{\kappa - \kappa_{cr}}{c(1 - \cos^2 \delta)}} + O(\kappa - \kappa_{cr}). \end{aligned} \quad (20)$$

Утверждение теоремы получается на основе разложения правых частей системы (16) в ряд по степеням $\sqrt{|\kappa - \kappa_{cr}|}$. Коэффициент разложения при $\sqrt{|\kappa - \kappa_{cr}|}$ и, соответственно, асимптотика (20) определяется из условий разрешимости алгебраической системы при $|\kappa - \kappa_{cr}|^{3/2}$.

Из результатов теорем 1 и 2 можно заключить, что при изменении параметра связи для однородного состояния равновесия, соответствующего однородному циклу задачи, возможны два случая, в первом из которых оно теряет устойчивость с появлением двух устойчивых неоднородных состояний, а во втором — с ним сливаются два неустойчивых неоднородных состояния и отбирают у него устойчивость.

Условия устойчивости точки (18) позволят определить критическое значение

$$\kappa_\pi = \frac{1}{4 \cos \delta} \quad (21)$$

так, что при $\kappa > \kappa_\pi$ данная неподвижная точка неустойчива, а при $\kappa < \kappa_\pi$ — устойчива.

Обозначим $\sigma = \kappa - \kappa_\pi$ и рассмотрим характер потери устойчивости данного состояния равновесия, в частности, докажем следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $b_0 > -\operatorname{ctg} 2\delta$ и $\sigma d_\pi < 0$, где

$$d_\pi = -\frac{3(-3 + 3b^2 + (1 + 3b^2) \cos 2\delta + 2b \sin 2\delta)}{8(-2b \cos \delta + \sin \delta)^2}, \quad (22)$$

тогда при $d_\pi < 0$ ($d_\pi > 0$) найдется такое $\sigma_0 > 0$, что для любого $0 < \sigma \leq \sigma_0$ ($-\sigma_0 \leq \sigma < 0$) в достаточно малой окрестности неподвижной точки (18) имеется орбитально асимптотически устойчивый (неустойчивый) цикл, асимптотика которого задается формулой

$$\begin{aligned} (\xi_1(\tau), \xi_2(\tau), \xi_3(\tau), \alpha_1(\tau), \alpha_2(\tau))^T &= \sqrt{-\frac{\sigma \phi_\pi}{d_\pi}} \times \\ &\times \left(\exp \left(\left(i\omega_* + \sigma \left(\psi_\pi - \frac{\phi_\pi c_\pi}{d_\pi} \right) \right) \tau \right) (a_1, -2a_1, a_1, 1, -1)^T + \kappa.c. \right) + O(\sigma), \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\omega_* = \frac{1}{2} \sqrt{-1 - 2b \operatorname{tg} \delta + \operatorname{tg}^2 \delta}, \quad a_1 = -\frac{2i\omega_* + \sec^2 \delta - 2b \operatorname{tg} \delta}{4\sqrt{2}(1 + i\omega_*)(2b - \operatorname{tg} \delta)}, \quad (24)$$

$$\phi_\pi + i\psi_\pi = 2 \cos \delta \left(2 - \frac{2i\omega_*}{\cos 2\delta + b \sin 2\delta} \right), \quad (25)$$

$$c_\pi = -\frac{3\omega_* \cos \delta ((3 - 13b^2) \cos \delta + (1 + b^2) \cos 3\delta + 8b \sin \delta)}{8(-2b \cos \delta + \sin \delta)^2 (\cos 2\delta + b \sin 2\delta)}. \quad (26)$$

Для доказательства данного утверждения при $|\sigma| \ll 1$ в системе (16) выполняется стандартная замена метода нормальных форм

$$(\xi_1(\tau), \xi_2(\tau), \xi_3(\tau), \alpha_1(\tau), \alpha_2(\tau))^T = (\xi^*, \xi^*, \pi)^T + \sqrt{|\sigma|} (\eta(\tau) e^{i\omega_* s} (a_1, -2a_1, a_1, 1, 1)^T + \text{к.с.}) + \sigma w_1(s, \tau) + |\sigma|^{3/2} w_2(s, \tau) + \dots, \quad \tau = |\sigma|s.$$

Из условий разрешимости задачи, возникающей при $|\sigma|^{3/2}$ для $w_2(s, \tau)$, в классе $2\pi/\omega_*$ -периодических по s функций получается уравнение

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \operatorname{sign}(\sigma)(\phi_\pi + i\psi_\pi)\eta + (d_\pi + ic_\pi)|\eta|^2\eta \quad (27)$$

относительно комплекснозначной функции $\eta(\tau)$. Утверждение теоремы получается из требования существования и устойчивости (неустойчивости) автомодельных циклов уравнения (27).

Применение теорем 1 и 3 позволяет заключить, что для состояния равновесия, соответствующего колебаниям осцилляторов в противофазе, можно выделить два случая. В первом из них это состояние равновесия становится устойчивым в результате стягивания к нему устойчивого предельного цикла системы (бифуркация Андронова – Хопфа), а во втором случае оно становится устойчивым после отталкивания от него неустойчивого предельного цикла.

Система (16) имеет и другие состояния равновесия, однако их определение оказывается технически трудной задачей.

3. Фазовая модель системы из четырех диффузионно слабо связанных осцилляторов

Рассмотрим теперь систему (11) при $n = 4$. В этом случае удастся лишь при $\varkappa = \mu\nu$, где μ — положительный малый параметр, построить систему фазовых уравнений. В [3, 4] показано, что при $\mu = 0$ система (11) имеет глобально экспоненциально устойчивое интегральное многообразие $\xi_j = (-\varphi_0/d_0)^{1/2}$, $j = 1, 2, 3, 4$, поведение траекторий на котором описывается уравнениями

$$\dot{\alpha}_j = 0, \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Можно показать, что при всех малых μ она имеет аналогичное глобально экспоненциально устойчивое интегральное многообразие, уравнения на котором имеют в первом приближении вид (см. [4])

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_1 &= 2 \sin \alpha_1 - \sin \alpha_2 + \nu(1 - \cos \alpha_2), \\ \dot{\alpha}_2 &= 2 \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1 - \sin \alpha_3 + \nu(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_3), \\ \dot{\alpha}_3 &= 2 \sin \alpha_3 - \sin \alpha_2 + \nu(\cos \alpha_2 - 1).\end{aligned}\quad (28)$$

При определении состояний равновесия системы (28) центральное значение имеет уравнение

$$\sin((\alpha_1 + \alpha_3)/2) \cdot \cos(\gamma_3 - (\alpha_1 - \alpha_3)/2) = 0, \quad (29)$$

где $\gamma_3 = \arcsin(\nu(\nu^2 + 1)^{-1/2})$, получающееся после сложения всех правых частей системы (28). Учитывая 2π -периодичность переменных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ системы (28), из условия $\sin((\alpha_1 + \alpha_3)/2) = 0$ получаем следующие состояния равновесия:

$$(0, 0, 0), \quad (30)$$

$$(\pi, 0, \pi), \quad (31)$$

$$(-\arcsin(\nu), \pi, \arcsin(\nu)), \quad (32)$$

$$(\pi + \arcsin(\nu), \pi, \pi - \arcsin(\nu)), \quad (33)$$

последние два из которых существуют лишь при $|\nu| \leq 1$. Анализ матрицы устойчивости позволяет заключить, что тривиальное решение системы при любых значениях ν – неустойчивый узел, состояние равновесия (31), соответствующее колебаниям в противофазе, – седло-узел, состояние равновесия (32) – также седло-узел и, наконец, точка (33) является устойчивым узлом при $0 < \nu < \sqrt{(\sqrt{5} - 1)/2}$ и седло-узлом при $\sqrt{(\sqrt{5} - 1)/2} < \nu < 1$, напомним, что при $\nu > 1$ этого состояния равновесия не существует.

Все состояния равновесия, получающиеся в результате обнуления второго сомножителя уравнения (29), оказываются неустойчивыми, и их вид здесь приводиться не будет.

Система (28) имеет инвариантные множества, позволяющие прояснить характер расположения траекторий системы. В частности, выполнено следующее простое утверждение:

Теорема 4. *Прямая $\alpha_1 + \alpha_3 = 0$, $\alpha_2 = \pi$ является инвариантным множеством системы (28).*

Подстановка $\alpha_1 + \alpha_3 = 0$, $\alpha_2 = \pi$, превращает все уравнения системы (28) в одно соотношение:

$$\dot{\alpha}_1 = 2 \sin \alpha_1 + 2\nu,$$

которое имеет два состояния равновесия: неустойчивое $\alpha_1 = -\arcsin(\nu)$ и устойчивое $\alpha_1 = \pi - \arcsin(\nu)$.

Суммируя сказанное, можно утверждать, что состояние равновесия (33) является единственным устойчивым режимом исследуемой динамической системы при $0 < \nu < \sqrt{(\sqrt{5} - 1)/2}$.

Увеличение ν приводит к усложнению динамики. Численный анализ системы (28), выполненный в [4], показал, что при $\nu > \sqrt{(\sqrt{5} - 1)/2}$ возникают устойчивые

однообходные циклы, которые, по-видимому, остаются единственными устойчивыми режимами системы (28) при всех ν за исключением промежутка (ν_1, ν_2) , где $\nu_1 \approx 1.13, \nu_2 \approx 1.20$. В этом промежутке поведение решений системы носит неупорядоченный характер.

Представляет интерес сравнение полученных результатов со случаем, когда в системе (11) $n = 4$ и заданы периодические условия $z_0 = z_4, z_5 = z_1$.

Уравнения на устойчивом интегральном многообразии имеют в этом случае следующее первое приближение:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_1 &= 2 \sin \alpha_1 + \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - \sin \alpha_2 + \nu(\cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - \cos \alpha_2), \\ \dot{\alpha}_2 &= 2 \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1 - \sin \alpha_3 + \nu(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_3), \\ \dot{\alpha}_3 &= 2 \sin \alpha_3 + \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - \sin \alpha_2 + \nu(\cos \alpha_2 - \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)).\end{aligned}\quad (34)$$

Для системы (34) в [4] показано, что в ее фазовом пространстве имеются области, заполненные предельными циклами. Негрубый характер полученных режимов не позволяет сделать каких-либо выводов относительно существования устойчивых режимов в системе (4), поэтому построим для системы (11) асимптотические формулы устойчивого интегрального многообразия и системы фазовых уравнений на нем более высокой степени точности. Уточненная система, выписанная для переменных

$$x_1 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + \frac{\pi}{2}, \quad x_2 = \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} + \frac{\pi}{2}, \quad x_3 = \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2} + \frac{\pi}{2}, \quad (35)$$

приобретает в данном случае вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \varkappa^* \cos x_1 \sin x_2 \sin(x_3 + \gamma) - \frac{\mu}{2} \left(\cos x_3 \left(\cos x_3 + x_0(\sin x_3 - 2 \sin x_3 \cos 2x_2) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\nu}{2} \left(-\frac{1}{2} \sin 2x_3 + x_0(\cos^2 x_3 - \cos 2x_3 \cos 2x_2) \right) \right) \sin 2x_1, \\ \dot{x}_2 &= \varkappa^* \sin x_1 \cos x_2 \sin(x_3 - \gamma) - \frac{\mu}{2} \left(\cos x_3 \left(\cos x_3 + x_0(\sin x_3 - 2 \sin x_3 \cos 2x_1) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\nu}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 2x_3 + x_0(\cos^2 x_3 - \cos 2x_3 \cos 2x_1) \right) \right) \sin 2x_2, \\ \dot{x}_3 &= 4 \sin x_1 \sin x_2 \cos x_3 + \frac{\mu}{2} \nu \left(\cos x_3 (\cos 2x_2 - \cos 2x_1) + \right. \\ &\quad \left. + x_0 \sin x_3 (2 \cos 2x_1 \cos 2x_2 - \cos 2x_1 - \cos 2x_2) \right) \cos x_3.\end{aligned}$$

где $\varkappa^* = (4 + \nu^2)^{1/2}$, $\gamma = \arccos(2(4 + \nu^2)^{-1/2})$.

При $\mu \neq 0$ представляет интерес найти все негрубые решения полученной системы.

В заключение отметим, что анализ диффузионного взаимодействия осцилляторов для $n = 3$ и $n = 4$ позволил проанализировать простейшие состояния равновесия нормализованных систем и их фазовые перестройки. Оказалось, что при изменении параметра связи для однородного состояния равновесия, соответствующего однородному циклу задачи, возможны два случая, в первом из которых оно теряет устойчивость с появлением двух устойчивых неоднородных состояний, а во втором — с ним сливаются два неустойчивых неоднородных состояния и отбирают у

него устойчивость. Для состояния равновесия, соответствующего колебаниям осцилляторов в противофазе, также выделяются два случая. В первом из них это состояние равновесия становится устойчивым в результате стягивания к нему устойчивого предельного цикла системы (бифуркация Андронова – Хопфа), а во втором случае оно становится устойчивым после ответвления от него неустойчивого предельного цикла. Для числа осцилляторов, равного четырем, удастся проанализировать лишь систему для разностей фаз осцилляторов, которая получается при достаточно малом коэффициенте связи и может иметь довольно сложную динамику.

Список литературы / References

- [1] Глызин С. Д., “Динамические свойства простейших конечноразностных аппроксимаций краевой задачи “реакция-диффузия””, *Дифференц. уравнения*, **33:6** (1997), 805–811; [English transl.: Glyzin S. D., “Dynamic properties of the simplest finite-difference approximations of the “reaction-diffusion” boundary value problem”, *Differential Equations*, **33:6** (1997), 808–814].
- [2] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Хаотическая буферность в цепочках связанных осцилляторов”, *Дифференц. уравнения*, **41:1** (2005), 41–49; [English transl.: Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., and Rozov N. Kh., “Chaotic buffering property in chains of coupled oscillators”, *Differential Equations*, **41:1** (2005), 41–49].
- [3] Колесов А. Ю., “Описание фазовой неустойчивости системы гармонических осцилляторов, слабо связанных через диффузию”, *Докл. АН СССР*, **300:1** (1988), 831 – 835; [English transl.: Kolesov A. Yu., “Description of Phase Instability of a System of Harmonic Oscillators Weakly Coupled by Diffusion”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **300** (1988), 831 – 835].
- [4] Глызин С. Д., “Разностные аппроксимации уравнения «реакция-диффузия» на отрезке”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **16:3** (2009), 96 – 116; [Glyzin S. D., “Difference approximations of “reaction – diffusion” equation on a segment”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **16:3** (2009), 96 – 116 (in Russian)].
- [5] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Конечномерные модели диффузионного хаоса”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **50:5** (2010), 860–875; [English transl.: Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., and Rozov N. Kh., “Finite-dimensional models of diffusion chaos”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **50:5** (2010), 816–830].
- [6] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., *Локальные методы анализа динамических систем: учебное пособие*, ЯрГУ, Ярославль, 2006, 92 с.; [Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., *Lokalnye metody analiza dinamicheskikh sistem: uchebnoe posobie*, YrGU, Yaroslavl, 2006, 92 pp., (in Russian)].
- [7] Глызин С. Д., “Размерностные характеристики диффузионного хаоса”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **20:1** (2013), 30 – 51; [Glyzin S. D., “Dimensional Characteristics of Diffusion Chaos”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **20:1** (2013), 30 – 51 (in Russian)].
- [8] Колесов А. Ю., Розов Н. Х., *Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений*, Физматлит, М., 2004; [Kolesov A. Yu., and Rozov N. Kh., *Invariant Tori of Nonlinear Wave Equations*, FIZMATLIT, Moscow, 2004 (in Russian)].
- [9] Глызин С. Д., “Стационарные режимы одной конечноразностной аппроксимации уравнения Хатчинсона с диффузией”, *Качественные и приближенные методы исследования операторных уравнений: Межвуз. сб.*, ЯрГУ, Ярославль, 1986, 112–127; [Glyzin S. D., “Statsionarnyye rezhimy odnoy konechnoraznostnoy approksimatsii uravneniya Hatchinsona s diffuziyey”, *Kachestvennyye i priblizhennyye metody issledovaniya operatornykh uravneniy: Mezhvuz. sb.*, YrGU, Yaroslavl, 1986, 112–127 (in Russian)].

- [10] Aronson D.G., Ermentrout G.B., Kopell N., “Amplitude Response of Coupled Oscillators”, *Physica D*, **41** (1990), 403–449.
- [11] Somers D., Kopell N., “Rapid synchronization through fast threshold modulation”, *Biol. Cybern.*, **68** (1993), 393–407.
- [12] Somers D., Kopell N., “Anti-phase solutions in relaxation oscillators coupled through excitatory interactions”, *J. Math. Biol.*, **33** (1995), 261–280.
- [13] Terman D., “An Introduction to Dynamical Systems and Neuronal Dynamics”, *Tutorials in Mathematical Biosciences I, Lecture Notes in Mathematics*, **1860** (2005), 21–68.

Marushkina E.A., "Stable Cycles and Tori of a System of Three and Four Diffusive Coupled Oscillators", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:6 (2016), 850–859.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-6-850-859

Abstract. We consider chains of identical diffusive weakly coupled oscillation systems with different conditions on coupling on a chain bound. We suppose that every interacting oscillator undergoes Andronov–Hopf bifurcation, and the coefficient of coupling is proportional to the supercriticality value. For this case on a stable integral manifold of the system a normal form is constructed for which, in case of three oscillators interact, we can study the simplest stationary states and their phase transformations. As the coupling parameter changes, for the uniform stationary state corresponding to the uniform cycle of the problem there can be two cases, in the former case it loses stability with the emergence of two stable nonuniform states, and in the latter one it merges with two unstable nonuniform states and transfers to them its stability. For the stationary state corresponding to oscillations in antiphase two cases can be also distinguished. In the first one, this stationary state becomes stable due to the contraction of a stable limit cycle of the system into it (Andronov–Hopf bifurcation), and in the second case it becomes stable after branching from it an unstable limit cycle. If there are four oscillators in the chain, the system of phase difference for a small coupling coefficient was studied.

Keywords: normal form, self-oscillations, oscillators, bifurcation, invariant torus

About the authors:

Elena A. Marushkina, PhD, Researcher
 P.G. Demidov Yaroslavl State University,
 14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: marushkina-ea@yandex.ru

Acknowledgments:

The reported study was funded by RFBR, according to the research project No. 16-31-60039 mol_a_dk.