Модел. и анализ информ. систем. Т. **19**, № **4** (2012) 67–71

УДК 510.53+512.54.0+512.54.03+512.54.05+512.543.72

Об одном вопросе А.И. Мальцева из "Коуровской тетради"

Дурнев В.Г.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: durnev@univ.uniyar.ac.ru

получена 10 мая 2012

Ключевые слова: свободная группа, коммутаторная подгруппа, формульно определимая подгруппа

Устанавливается, что коммутант свободной нециклической группы не является ее формульной подгруппой.

В "Коуровскую тетрадь" [1] под номером 1.19 Ю.Л. Ершов включил вопрос А.И. Мальцева о формульно определимых подгруппах и подмножествах свободной группы, заключительная часть которого звучит следующим образом "... будет ли коммутант формульно (или относительно элементарно) определим в свободной группе?".

В настоящей заметке показывается, что из результата автора настоящей заметки [2] и результата О. Харлампович и А. Мясникова [3] о разрешимости элементарной теории любой свободной группы можно получить отрицательный ответ на эту часть вопроса 1.19.

Обозначим через F_m свободную группу ранга m со свободными образующими a_1, ..., a_m. Имеет место следующая теорема.

Теорема. *При любом $m \geq 2$ невозможно построить формулу $CF_m(x)$ языка первого порядка с равенством групповой сигнатуры, содержащей обозначения для групповой операции $\cdot$, обращения $^{-1}$ и константные символы для свободных образующих a_1, ..., a_m, с одной свободной переменной x такую, что для произвольного элемента g свободной группы F_m справедлива эквивалентность:*

формула $CF_m(g)$ истинна на группе F_m тогда и только тогда, когда элемент g принадлежит коммутанту $F_m^{(1)}$ группы F_m.

Замечание. Аналогичная теорема справедлива, если в ее формулировке заменить первый коммутант $F_m^{(1)}$ свободной группы F_m на любой ее k-й коммутант $F_m^{(k)}$ или на любой ее s-й член $F_{m,(s)}$ нижнего центрального ряда.

Для удобства будем использовать обозначения: a для a_1 и b для a_2.

Лемма. *Для произвольного рекурсивно перечислимого множества A натуральных чисел в свободной группе F_2 со свободными образующими a и b можно построить такое уравнение вида*

$$w_A(x, x_1, \dots, x_n, a, b) = 1$$

с неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$, константами a и b и параметром x, что для произвольного натурального числа справедлива эквивалентность

$$k \in A \iff F_2 \models (\exists x_1 \dots x_n)(w_A(a^k, x_1, \dots, x_n, a, b) = 1 \; \& \; \mathop{\&}_{j=1}^{t} x_j \in [F_2, F_2]),$$

где t – некоторое фиксированное число между 1 и n.

Доказательство. Рассмотрим предикат

$$\mathbb{Z}(x) \rightleftharpoons ([x, a] = 1).$$

Хорошо известно, что для любого элемента $g \in F_2$:

$$F_2 \models \mathbb{Z}(g) \iff \text{“}g - \textit{степень } a''.$$

Рассмотрим предикаты

$$T(x_1, x_2) \rightleftharpoons ([x_1, a] = 1 \& [x_2, b] = 1) \; \& \; (\exists x\, y)([x, ab] = 1 \; \& \; y = x x_1^{-1} x_2^{-1} \; \& \; y \in [F_2, F_2]);$$

$$M(x_1, x_2, x_3) \rightleftharpoons (\exists x\, y\, z)(T(x_2, x) \; \& \; [y, x_1 b] = 1 \; \& \; z = y x_3^{-1} x^{-1} \; \& \; z \in [F_2, F_2]).$$

Для произвольных элементов g и h группы F_2:

$$F_2 \models T(g, h) \iff \text{” \textit{существует такое целое число } } p, \textit{ что } g = a^p,\ h = b^p\text{”}.$$

Поэтому для произвольных целых чисел s, t и r имеет место эквивалентность

$$F_2 \models M(a^s, a^t, a^r) \iff r = s \cdot t.$$

Воспользуемся *целочисленным вариантом непосредственного следствия теоремы Ю.В. Матиясевича о диофантовости рекурсивно перечислимых множеств* [4]:

Для произвольного рекурсивно перечислимого множества A натуральных чисел можно построить такую формулу $\Phi_A(x_1)$ вида

$$(\exists x_2 \dots x_p)\Psi, \quad \textit{где} \quad \Psi = \mathop{\&}_{i=1}^{s} \varphi_i$$

и каждая формула φ_i *имеет один из следующих видов*:

$$x_l + x_j = x_t, \quad x_j = x_l, \quad x_l\, x_j = x_t, \quad x_j = c, \quad \text{где } c \text{ – целое число},$$

что для произвольного натурального числа k *справедлива эквивалентность*:

$k \in A$ *тогда и только тогда, когда формула* $\Phi_A(k)$ *истинна на кольце целых чисел.*

Пусть A – рекурсивно перечислимое множество, а $\Phi_A(x_1)$ – соответствующая формула.

По формуле $\Phi_A(x_1)$ построим формулу $\Phi_1(x_1)$ следующим образом:

$$\Phi_1(x_1) \rightleftharpoons (\exists\, x_2 \ldots x_p)(\Psi_1 \,\&\, (\mathop{\&}_{i=2}^{p} \mathbb{Z}(x_i))),$$

где Ψ_1 получено из Ψ заменой каждой формулы φ_i вида $x_l + x_j = x_t$ на $x_l\, x_j = x_t$, формулы вида $x_l\, x_j = x_t$ – на $M(x_l, x_j, x_t)$, формулы вида $x_j = x_l$ – на $x_j = x_l$, а формулы вида $x_j = c$ – на $x_j = a^c$.

Подходящим образом переименовав переменные в формуле $\Phi_1(x_1)$, приведем полученную формулу $\Phi(x)$ к виду

$$(\exists\, x_1 \ldots x_n)((\mathop{\&}_{i=1}^{l} w_i = 1) \,\&\, (\mathop{\&}_{j=1}^{t} x_j \in [F_2, F_2])).$$

Воспользовавшись уравнением $[x, a] = ([x, b]\, y^2)^2$, имеющим в свободной группе F_m при любом $m \geq 2$ лишь тривиальное решение $x = 1$, $y = 1$, заменим систему уравнений $\mathop{\&}_{i=1}^{l} w_i = 1$ одним уравнением $w_A = 1$, ей равносильным, в итоге получим:

для произвольного натурального числа k

$$k \in A \iff F_2 \models (\exists\, x_1 \ldots x_n)(w_A(a^k, x_1, \ldots, x_n, a, b) = 1 \,\& \mathop{\&}_{j=1}^{t} x_j \in [F_2, F_2]).$$

□

Так как для произвольного натурального числа $m \geq 2$ справедлива эквивалентность

$$F_2 \models (\exists\, x_1 \ldots x_n)(w_A(a^k, x_1, \ldots, x_n, a, b) = 1 \,\& \mathop{\&}_{j=1}^{t} x_j \in [F_2, F_2]) \iff F_m \models (\exists\, x_1 \ldots x_n)(w_A(a^k, x_1, \ldots, x_n, a, b) = 1 \,\& \mathop{\&}_{j=1}^{t} x_j \in [F_m, F_m]),$$

то получаем следствие

Следствие. *Для произвольного рекурсивно перечислимого множества A натуральных чисел и произвольного натурального числа $m \geq 2$ в свободной группе F_m со свободными образующими $a_1 = a$, $a_2 = b$, a_3, ..., a_m можно построить такое уравнение вида*

$$w_A\,(\,x,\,x_1,\,\ldots\,,\,x_n,\,a,\,b\,)\;=\;1$$

с неизвестными x_1, x_2,..., x_n, константами a и b и параметром x, что для произвольного натурального числа справедлива эквивалентность

$$k\,\in\,A\iff F_m\,\models\,(\,\exists\,x_1\,\ldots\,x_n\,)\,(\,w_A\,(\,a^k,\,x_1,\,\ldots,\,x_n,\,a,\,b\,)\;=\;1\;\&\;\mathop{\&}_{j=1}^{t}\,x_j\,\in\,[F_m,\,F_m]\,),$$

где t – некоторое фиксированное число между 1 и n.

Доказательство теоремы. Предположим, что при некотором $m \geq 2$ можно построить формулу $CF_m(x)$ языка первого порядка с равенством групповой сигнатуры, содержащей обозначения для групповой операции $\cdot$, обращения $^{-1}$ и константные символы для свободных образующих a_1, ..., a_m, с одной свободной переменной x такую, что для произвольного элемента g свободной группы F_m справедлива эквивалентность:

формула $CF_m(g)$ истинна на группе F_m тогда и только тогда, когда элемент g принадлежит коммутанту $F_m^{(1)}$ группы F_m.

Тогда для произвольного натурального числа k

$$k\,\in\,A\iff F_m\,\models\,(\,\exists\,x_1\,\ldots\,x_n\,)\,(\,w_A\,(\,a^k,\,x_1,\,\ldots,\,x_n,\,a,\,b\,)\;=\;1\;\&\;\mathop{\&}_{j=1}^{t}\,CF_m(x_j)\,).$$

Если теперь в качестве A взять рекурсивно перечислимое, но *нерекурсивное* множество, то получим противоречие с теоремой О. Харлампович и А. Мясникова [3] о разрешимости элементарной теории любой свободной группы. □

Список литературы

1. Коуровская тетрадь. Издание 17-е, дополненное и включающее Архив решенных задач. Новосибирск: Институт математики СО РАН, 2010. 219 с.

2. *Дурнев В.Г.* Об уравнениях на свободных полугруппах и группах // Матем. заметки. 1974. Т. 16, № 5. С. 717 – 724.

3. *Kharlampovich O., Myasnikov A.* Elementary theory of free non-abelian groups // Journal of Algebra. 2006. Vol. 302 2. P. 451–552.

4. *Матиясевич Ю.В.* Диофантовость перечислимых множеств // Докл. АН СССР. 1970. Т. 130, № 3. С. 495 – 498.

On one A.I. Mal'cev's Question from the "Kourovskaya Notebook"

Durnev V.G.

Keywords: free group, derived subgroup, first-oder definable subgroup

It is shown that the derived subgroup of the free group is not first-oder definable.

Сведения об авторе:
Дурнев Валерий Георгиевич,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
заведующий кафедрой, профессор