

©Кащенко С. А., 2016

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-1-13-30

УДК 517.9

Асимптотические законы распределений собственных значений периодической и антипериодической краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка

Кащенко С. А.

получена 14 октября 2016

Аннотация. Рассматривается асимптотическое распределение собственных значений периодической и антипериодической краевых задач для линейного уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами. Это дает возможность получить асимптотики зон устойчивости и неустойчивости решений. Показано, что в отсутствие точек поворота ($r(t) > 0$) длины зон неустойчивости стремятся к нулю с ростом их номера, а длины зон устойчивости – к некоторой положительной величине. Ситуация, когда $r(t) \geq 0$ и имеются нули $r(t)$, приводит к тому, что длины зон устойчивости и зон неустойчивости имеют конечный ненулевой предел при неограниченном увеличении номера соответствующей зоны. Если же функция $r(t)$ знакопеременна, то длины всех зон устойчивости стремятся к нулю, а длины зон неустойчивости – к некоторым конечным величинам. Эти выводы позволили сформулировать ряд интересных критериев устойчивости и неустойчивости решений линейного уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами.

Приведенные результаты иллюстрируются содержательным примером. Методика исследования основана на детальном изучении так называемых специальных эталонных уравнений и последующем сведении исходных уравнений к тому или иному виду эталонных уравнений. При этом используются асимптотические методы теории сингулярных возмущений, а также известные свойства ряда специальных функций.

Ключевые слова: сингулярно возмущенное уравнение, точки поворота, асимптотика, краевая задача, собственные числа

Для цитирования: Кащенко С. А., "Асимптотические законы распределений собственных значений периодической и антипериодической краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка", *Моделирование и анализ информационных систем*, **24**:1 (2017), 13–30.

Об авторах:

Кащенко Сергей Александрович, orcid.org/0000-0002-8777-4302, доктор физико-математических наук, профессор, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Каширское ш., 31, г. Москва, 115409 Россия
e-mail: kasch@uniyar.ac.ru

Введение

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами занимают особое место при исследовании многих прикладных задач.

Их изучению посвящена значительная литература (см., например, обзор [1]). К анализу решений таких уравнений сводятся многие задачи об устойчивости периодических решений в нелинейных уравнениях. Выдающийся вклад в теорию линейных уравнений с периодическими коэффициентами внес А.М. Ляпунов, работы которого [2, 3] (см., также, [4]) стали отправной точкой для формирования теории зон устойчивости. Изложение основ этой теории приведено в работах [1, 5].

В работе [6] приведены пионерские результаты о законах распределения собственных значений ряда краевых задач для некоторых линейных уравнений второго порядка. В настоящей работе, существенно использующей результаты из [6], получены асимптотические законы распределения собственных значений периодической и антипериодической краевых задач. Это, в свою очередь, позволило дать ответ на вопрос об асимптотическом распределении длины ляпуновских зон устойчивости и неустойчивости.

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + [\lambda^2 r(t) + q(t)]x = 0, \quad (1)$$

где T -периодические функции $r(t)$ и $q(t)$ достаточно гладкие. Отметим, что нули функции $r(t)$ называют точками поворота. В разделе 1 исследуется случай, когда $r(t) > 0$, т.е. точки поворота отсутствуют. В разделе 2 предполагается, что $r(t) \geq 0$ и для некоторых t функция $r(t)$ обращается в нуль. Наиболее интересны результаты раздела 3, в котором функция $r(t)$ знакопеременна.

Методика исследования основана на изучении асимптотики решений уравнения (1) при достаточно больших значениях λ . Здесь существенно используются результаты работ [6–10]. Отметим еще работы [11–15], в которых получены асимптотические законы разложения собственных значений периодической и антипериодической краевых задач для сингулярно возмущенных уравнений второго порядка.

1. Асимптотика собственных значений для уравнений без точек поворота

Основное предположение этого раздела состоит в том, что отсутствуют точки поворота, т.е.

$$r(t) > 0, \quad t \in [0, T].$$

Поставим для уравнения (1) периодическую краевую задачу, т.е. задачу нахождения всех таких λ , для которых существует ненулевое T -периодическое решение $x(t)$: $x(t+T) \equiv x(t)$. Такие значения λ называются собственными значениями периодической краевой задачи.

Одновременно будем изучать для (1) антипериодическую краевую задачу, т.е. задачу нахождения всех таких λ , для которых (1) имеет ненулевое T -антипериодическое решение $x(t+T) \equiv -x(t)$. Такие λ называются собственными значениями антипериодической краевой задачи.

Согласно ляпуновской теории зон устойчивости [1–5], существует бесконечно много собственных значений λ_n^+ ($n = 0, 1, \dots$) периодической и λ_n^- ($n = 1, 2, \dots$) антипериодической краевых задач, причем

$$(\lambda_0^+)^2 < (\lambda_1^-)^2 \leq (\lambda_2^-)^2 < (\lambda_1^+)^2 < (\lambda_3^-)^2 \leq \dots$$

Нас будет интересовать вопрос о зависимости собственных значений λ_n^+ и λ_n^- от номера n , когда n стремится к бесконечности. Поскольку при больших номерах n величины $(\lambda_n^\pm)^2$ положительны, то через $\lambda_n^\pm$ удобно обозначать в дальнейшем арифметическое значение корня из $(\lambda_n^\pm)^2$.

Теорема 1. *Имеют место асимптотические неравенства*

$$\lambda_{2n-1}^+ = \frac{2\pi n}{\int_0^T \sqrt{r(t)} dt} + O(n^{-\frac{1}{2}}), \quad \lambda_{2n}^+ = \frac{2\pi n}{\int_0^T \sqrt{r(t)} dt} + O(n^{-\frac{1}{2}}),$$

$$\lambda_{2n-1}^- = \frac{(2n-1)\pi}{\int_0^T \sqrt{r(t)} dt} + O(n^{-\frac{1}{2}}), \quad \lambda_{2n}^- = \frac{(2n-1)\pi}{\int_0^T \sqrt{r(t)} dt} + O(n^{-\frac{1}{2}}).$$

Доказательство. Сначала приведем уравнение (1) к более удобному для исследования виду. Для этого выполним в нем последовательно несколько преобразований. Сначала произведем замену времени

$$t = \varphi(\tau) \quad (\varphi'(\tau) > 0),$$

затем положим $x(\varphi(\tau)) = z(\tau)$ и, наконец,

$$z(\tau) = \left(\sqrt{\dot{\varphi}(\tau)} \right)^{-1} y(\tau).$$

Тогда для функции $y(\tau)$ получаем дифференциальное уравнение

$$\ddot{y} + [\lambda r(\varphi(\tau)) \dot{\varphi}^2(\tau) + g(\tau)] y = 0,$$

где

$$g(\tau) = \dot{\varphi}^2(\tau) g(\varphi(\tau)) + \frac{2\ddot{\varphi}(\tau)\dot{\varphi}(\tau) - \ddot{\varphi}^2(\tau)}{4\dot{\varphi}^2(\tau)}.$$

Функцию $\varphi(\tau)$ определим из условия равенства единице коэффициента при λ^2 , т.е.

$$r(\varphi(\tau)) \dot{\varphi}^2(\tau) = 1.$$

Решая это уравнение, находим неявное выражение для $\varphi(\tau)$:

$$\tau = \int_0^{\varphi(\tau)} \sqrt{r(t)} dt.$$

Отсюда функция $\varphi(\tau)$ легко определяется. Для уравнения с $T_1 = \int_0^T \sqrt{r(t)} dt$ -периодическими коэффициентами

$$\ddot{y} + [\lambda^2 + g(\tau)] y = 0 \tag{2}$$

в [1, 6, 15] была получена асимптотика при больших λ следа $f(\lambda)$ матрицы монодромии:

$$f(\lambda) = 2 \cos \lambda T_1 + O(\lambda^{-1}). \tag{3}$$

Отметим, что $f(\lambda)$ является также следом матрицы монодромии уравнения (1). Поэтому собственные значения рассматриваемых краевых задач и только они являются решениями уравнений

$$f(\lambda) = 2, \quad f(\lambda) = -2. \quad (4)$$

Положим затем $\lambda_{2n-1}^+ = \frac{2\pi n}{\int_0^T \sqrt{r(t)} dt} + \delta_{2n-1}$, $\lambda_{2n}^+ = \frac{2\pi n}{\int_0^T \sqrt{r(t)} dt} + \delta_{2n}$. Тогда, используя в первом равенстве (4) выражение (3), для определения δ_{2n-1} и δ_{2n} получим равенства

$$4 \sin^2 \frac{1}{2} \delta_{2n-1} = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad 4 \sin^2 \frac{1}{2} \delta_{2n} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Из общих свойств функции $f(\lambda)$ вытекает, что эти уравнения разрешимы, а значит, $\delta_{2n-1} = O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$ и $\delta_{2n} = O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$. Для того чтобы установить наличие нужного числа нулей у собственных функций $x_{2n-1}^+(t)$ и $x_{2n}^+(t)$, опять используем полученные в [1, 6, 15] асимптотические представления решений (2). Для величин λ_{2n-1}^- и λ_{2n}^- рассуждения те же. Тем самым теорема доказана.

Сделаем одно замечание. Можно показать, что для любого натурального $k \geq 1$ имеют место асимптотические равенства

$$\begin{aligned} \lambda_{2n-1}^+ &= 2\pi n \left(\int_0^T \sqrt{r(t)} dt \right)^{-1} + \frac{c_1^1}{n} + \dots + \frac{c_k^1}{n^k} + O(n^{-k-1}), \\ \lambda_{2n}^+ &= 2\pi n \left(\int_0^T \sqrt{r(t)} dt \right)^{-1} + \frac{c_1^1}{n} + \dots + \frac{c_k^1}{n^k} + O(n^{-k-1}), \\ \lambda_{2n-1}^- &= (2n-1)\pi \left(\int_0^T \sqrt{r(t)} dt \right)^{-1} + \frac{c_1^2}{n} + \dots + \frac{c_k^2}{n^k} + O(n^{-k-1}), \\ \lambda_{2n}^- &= (2n-1)\pi \left(\int_0^T \sqrt{r(t)} dt \right)^{-1} + \frac{c_1^2}{n} + \dots + \frac{c_k^2}{n^k} + O(n^{-k-1}), \end{aligned}$$

в которых коэффициенты c_j^i выражаются через $r(\varphi(\tau))$, $g(\tau)$ и их производные. Обратим внимание, что для любого целого k

$$(\lambda_{2n-1}^\pm - \lambda_{2n}^\pm) = O(n^{-k}),$$

т.е. длина зон неустойчивости стремится к нулю (быстрее любой отрицательной степени n). Длина зон устойчивости, очевидно, стремится к числу $\pi \left(\int_0^T \sqrt{r(t)} dt \right)^{-1}$.

2. Асимптотика собственных значений при условии $r(t) \geq 0$

1. Формулировка результатов. Основным предположением здесь является неотрицательность и наличие нулей функции $r(t)$ в уравнении

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + [\lambda^2 r(t) + q(t)]x = 0. \quad (5)$$

Ограничимся для простоты изложения рассмотрением случая, когда $r(t)$ имеет конечное число $t_1, \dots, t_m$ ($m \geq 1$) нулей на промежутке $(0, T)$ длины периода, причем будем считать, что кратность каждого нуля равна двум. Далее, как обычно, предположим, что непрерывно дифференцируемая функция $p(t)$ такова, что

$$M(p) = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \geq 0.$$

Наряду с (5) введем в рассмотрение самосопряженное уравнение

$$\ddot{y} + [\lambda^2 r(t) + g(t)] y = 0, \quad (6)$$

где

$$g(t) = q(t) - \frac{1}{2}\dot{p}(t) - \frac{1}{4}p^2(t).$$

Напомним, что решения (5) и (6) связаны соотношением

$$x = ye^{-\frac{1}{2} \int_0^t p(s) ds}.$$

Поставим для каждого из уравнений (5) и (6) периодическую и антипериодическую краевые задачи. Собственные значения этих краевых задач для уравнения (6) обозначим через λ_n^+ ($n = 0, 1, \dots$) и λ_n^- ($n = 1, 2, \dots$) соответственно. Нас будет интересовать вопрос об асимптотической зависимости $\lambda_n^\pm$ от номера n , когда n велико, а также вопрос о существовании бесконечного множества вещественных собственных значений рассматриваемых краевых задач для уравнения (5) и об их асимптотических законах распределения. Отметим, что уравнение (6) может иметь лишь конечное число комплексных (чисто мнимых) собственных значений.

Сначала сформулируем результаты для случая $m = 1$.

Теорема 2. *Имеют место равенства*

$$\begin{aligned} \lambda_{2n-1}^+ &= 2\pi \left(n - \frac{1}{8}\right) \left(\int_0^T \sqrt{r(t)} dt\right)^{-1} + O\left(n^{-\frac{1}{2}} \ln n\right), \\ \lambda_{2n}^+ &= 2\pi \left(n + \frac{1}{8}\right) \left(\int_0^T \sqrt{r(t)} dt\right)^{-1} + O\left(n^{-\frac{1}{2}} \ln n\right), \\ \lambda_{2n-1}^- &= 2\pi \left(n - \frac{5}{8}\right) \left(\int_0^T \sqrt{r(t)} dt\right)^{-1} + O\left(n^{-\frac{1}{2}} \ln n\right), \\ \lambda_{2n}^- &= 2\pi \left(n - \frac{3}{8}\right) \left(\int_0^T \sqrt{r(t)} dt\right)^{-1} + O\left(n^{-\frac{1}{2}} \ln n\right). \end{aligned}$$

Опишем теперь, как можно получить соответствующие результаты для произвольного $m > 1$. Сначала введем несколько обозначений. Считая, что нули $t_1, \dots, t_m$ функции $r(t)$ занумерованы в порядке возрастания, положим

$$t_{m+1} = t_1 + T, \quad a_i = \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{r(t)} dt - \frac{\pi}{8} \quad (i = 1, \dots, m).$$

Далее, введем матрицы

$$U_i(\lambda) = \begin{pmatrix} u_{11}^i(\lambda) & u_{12}^i(\lambda) \\ u_{21}^i(\lambda) & u_{22}^i(\lambda) \end{pmatrix} \quad (i = 1, \dots, m),$$

элементы которых определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} u_{11}^i(\lambda) &= \cos \lambda[a_i + a_{i+1}] - 2 \sin \lambda a_i \cdot \cos \lambda a_{i+1}, \\ u_{12}^i(\lambda) &= \lambda^{-1}(\sin \lambda[a_i + a_{i+1}] + 2 \cos \lambda a_i \cdot \cos \lambda a_{i+1}), \\ u_{21}^i(\lambda) &= -\lambda(\sin \lambda[a_i + a_{i+1}] - 2 \sin \lambda a_i \cdot \sin \lambda a_{i+1}), \\ u_{22}^i(\lambda) &= \cos \lambda[a_i + a_{i+1}] - 2 \cos \lambda a_i \cdot \sin \lambda a_{i+1}. \end{aligned}$$

Матрицу $U(\lambda)$ определим тогда по правилу

$$U(\lambda) = U_m(\lambda) \cdot \dots \cdot U_1(\lambda),$$

а след этой матрицы обозначим через $\varphi(\lambda)$.

В формулировке следующего результата будут участвовать решения уравнений

$$\varphi(\lambda) = 2 \text{ и } \varphi(\lambda) = -2.$$

Неотрицательные решения h_n^+ ($n = 0, 1, \dots$) первого и h_n^- ($n = 1, 2, \dots$) второго из этих уравнений удобно считать занумерованными в порядке возрастания с учетом кратности.

Теорема 3. *Имеют место равенства*

$$\lambda_n^+ = h_n^+ + O\left(n^{-\frac{1}{2}} \ln n\right), \quad \lambda_n^- = h_n^- + O\left(n^{-\frac{1}{2}} \ln n\right).$$

Если $M(p) = 0$, то собственные значения рассматриваемых краевых задач для уравнения (5) те же, что и у (6). Пусть

$$M(p) > 0. \tag{7}$$

Теорема 4. *Пусть $m = 1$ и выполняется неравенство*

$$\operatorname{ch} \left[\int_0^T \sqrt{r(t)} dt \right] > \sqrt{2}.$$

Тогда уравнение (5) имеет лишь конечное число вещественных собственных значений периодической и антипериодической краевых задач, причем при всех достаточно больших λ решения (5) устойчивы. Если же

$$\operatorname{ch} \left[\int_0^T \sqrt{r(t)} dt \right] < \sqrt{2}, \quad (8)$$

то уравнение (5) имеет лишь конечное число комплексных собственных значений тех же краевых задач, причем при неограниченном увеличении λ устойчивость и неустойчивость решений неограниченно чередуются.

Из приводимого ниже доказательства теоремы 4 будет следовать, что при условии (8) у уравнения (5) существует бесконечно много зон устойчивости и неустойчивости, причем длины этих зон имеют конечные ненулевые пределы при неограниченном росте n . Интересно отметить, что в случае $r(t) > 0$ существование конечного числа вещественных собственных значений (и устойчивость решений (5) при всех достаточно больших λ) следует уже из неравенства (7).

Можно сформулировать результаты, аналогичные теореме 4, и для $m > 1$, однако на этом останавливаться не будем.

2. Вспомогательные построения. Важным моментом доказательства является сведение случая, когда $m > 1$, к рассмотрению более простого случая $m = 1$. Для этого поступим следующим образом. Обозначим через $U(t, \lambda)$ фундаментальную матрицу решений уравнения (6). Все значения параметра λ , при которых матрица монодромии $U(T, \lambda)$ имеет собственные значения ± 1 (и только они), будут являться собственными значениями периодической и антипериодической краевых задач. Изучим асимптотику матрицы $U(t, \lambda)$. Считая, что

$$0 < t_1 < \dots < t_m < T,$$

введем в рассмотрение числа τ_i ($i = 0, \dots, m$) так, чтобы выполнялись неравенства

$$\tau_0 = 0 < t_1 < \tau_1 < t_2 < \tau_2 < \dots < t_m < T = \tau_m.$$

Если теперь обозначить через $U_i(t, \lambda)$ ($i = 1, \dots, m$) такие фундаментальные матрицы уравнения (6), что $U_i(\tau_{i-1}, \lambda) = I$, то получим следующее важное для нас равенство

$$U(T, \lambda) = U_m(\tau_m, \lambda) \cdot U_{m-1}(\tau_{m-1}, \lambda) \cdot \dots \cdot U_1(\tau_1, \lambda).$$

Из него вытекает, что асимптотика $U(T, \lambda)$ будет получена, если удастся получить асимптотику каждой из матриц $U_i(\tau_i, \lambda)$. Для этого, в свою очередь, достаточно изучить поведение одной из этих матриц при больших значениях λ . Выберем для определенности в качестве такой матрицы $U_1(\tau_1, \lambda)$ и займемся изучением ее свойств.

Введем несколько обозначений. Через $x_1(t, \lambda)$ и $x_2(t, \lambda)$ обозначим решения уравнения (6) с начальными условиями

$$x_1(0, \lambda) = \dot{x}_2(0, \lambda) = 1, \quad \dot{x}_1(0, \lambda) = x_2(0, \lambda) = 0.$$

Элементами матрицы $U_1(\tau_1, \lambda)$ являются величины $x_1(\tau_1, \lambda)$, $\dot{x}_1(\tau_1, \lambda)$, $x_2(\tau_1, \lambda)$ и $\dot{x}_2(\tau_1, \lambda)$. Поэтому изучим эти величины при больших λ . Как оказывается, это удобно сделать, вводя две вспомогательные функции $x_0(t, \lambda)$ и $x^0(t, \lambda)$, которые являются решениями того же уравнения, что и функции $x_1(t, \lambda)$ и $x_2(t, \lambda)$, а начальные условия их таковы:

$$x_0(t_1, \lambda) = \dot{x}^0(t_1, \lambda) = 1, \quad \dot{x}_0(t_1, \lambda) = x^0(t_1, \lambda) = 0.$$

Отметим, что функции $x_1(t, \lambda)$ и $x_2(t, \lambda)$ легко выражаются через $x_0(t, \lambda)$ и $x^0(t, \lambda)$, а именно

$$x_1(t, \lambda) = \dot{x}^0(0, \lambda) \cdot x_0(t, \lambda) - \dot{x}_0(0, \lambda) x^0(t, \lambda), \quad (9)$$

$$x_2(t, \lambda) = -x^0(0, \lambda) \cdot x_0(t, \lambda) + x_0(0, \lambda) x^0(t, \lambda). \quad (10)$$

Отсюда вытекает, что для получения асимптотики $U_1(\tau_1, \lambda)$ необходимо изучить асимптотическое поведение величин $x_0(t, \lambda)$, $x^0(t, \lambda)$ и их производных при $t = 0$ и $t = \tau_1$. Этим сейчас и займемся.

3. Обоснование результатов. Введем в рассмотрение модельное уравнение

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + s^2 y = 0.$$

Пусть решения $y_0(s)$ и $y^0(s)$ этого уравнения удовлетворяют начальным условиям

$$y_0(0) = \dot{y}^0(0) = 1, \quad y^0(0) = \dot{y}_0(0) = 0.$$

Асимптотические (при больших значениях s) представления этих функций хорошо известны (см., например, [6]):

$$\begin{aligned} y_0(s) &= 2^{\frac{1}{2}} \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) s^{-\frac{1}{2}} \cos\left[\frac{1}{2}s^2 - \frac{\pi}{8}\right] + O\left(s^{-\frac{5}{2}}\right), \\ \dot{y}_0(s) &= 2^{\frac{1}{2}} \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) s^{\frac{1}{2}} \cos\left[\frac{1}{2}s^2 + \frac{\pi}{8}\right] + O\left(s^{-\frac{3}{2}}\right), \\ y^0(s) &= 2^{\frac{3}{2}} \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{5}{4}\right) s^{-\frac{1}{2}} \cos\left[\frac{1}{2}s^2 - \frac{3\pi}{8}\right] + O\left(s^{-\frac{5}{2}}\right), \\ \dot{y}^0(s) &= 2^{\frac{3}{2}} \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{5}{4}\right) s^{-\frac{1}{2}} \cos\left[\frac{1}{2}s^2 - \frac{\pi}{8}\right] + O\left(s^{-\frac{3}{2}}\right). \end{aligned}$$

Лемма 1. *Имеют место асимптотические формулы*

$$\begin{aligned} (\omega'(t_1))^{-\frac{1}{2}} x_0(\tau, \lambda) &= (\omega'(\tau))^{-\frac{1}{2}} y_0\left[\lambda^{\frac{1}{2}} \omega(\tau)\right] + O(\lambda^{-\frac{1}{2}} \ln \lambda), \\ (\omega'(t_1))^{-\frac{1}{2}} \dot{x}_0(\tau, \lambda) &= \lambda^{\frac{1}{2}} \left[(\omega'(\tau))^{\frac{1}{2}} \dot{y}_0\left[\lambda^{\frac{1}{2}} \omega(\tau)\right] + O(\lambda^{-\frac{1}{2}} \ln \lambda)\right], \\ (\omega'(t_1))^{\frac{1}{2}} x^0(\tau, \lambda) &= \lambda^{-\frac{1}{2}} \left[(\omega'(\tau))^{-\frac{1}{2}} y^0\left[\lambda^{\frac{1}{2}} \omega(\tau)\right] + O(\lambda^{-\frac{1}{2}} \ln \lambda)\right], \\ (\omega'(t_1))^{\frac{1}{2}} \dot{x}^0(\tau, \lambda) &= (\omega'(\tau))^{\frac{1}{2}} \dot{y}^0\left[\lambda^{\frac{1}{2}} \omega(\tau)\right] + O(\lambda^{-\frac{1}{2}} \ln \lambda), \end{aligned} \quad (11)$$

где τ принимает значения 0 и τ_1 , а

$$\omega(t) = \left(2 \int_{t_1}^t \sqrt{r(\xi)} d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \quad (\omega(t)r(t) \geq 0). \quad (12)$$

О доказательстве леммы 1. В уравнении (6) произведем замены

$$s = \omega(t),$$

где $\omega(t)$ определяется формулой (12), а затем

$$x(t) = (\omega'(t))^{-\frac{1}{2}} y(s). \quad (13)$$

Тогда для функции $y(s)$ получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + \lambda^2 s^2 y = g(s)y, \quad (14)$$

в котором через $g(s)$ обозначена функция, легко вычисляющаяся в процессе замен (12) и (13). Точный вид этой функции нам не понадобится. Пусть $y_1(s, \lambda)$ и $y_2(s, \lambda)$ — решения уравнения (14) с начальными условиями

$$y_1(0, \lambda) = \dot{y}_2(0, \lambda) = 1, \quad \dot{y}_1(0, \lambda) = y_2(0, \lambda) = 0.$$

Метод вариации произвольной постоянной для уравнения (14) позволяет получить представления

$$u_1(s, \lambda) = \lambda^{-\frac{1}{2}} \int_0^s y_0\left(\lambda^{\frac{1}{2}} \tau\right) K(s, \tau) d\tau + \lambda^{-\frac{1}{2}} \int_0^s u_1(\tau, \lambda) K(s, \tau) d\tau, \quad (15)$$

$$u_2(s, \lambda) = \lambda^{-\frac{1}{2}} \int_0^s y^0\left(\lambda^{\frac{1}{2}} \tau\right) K(s, \tau) d\tau + \lambda^{-\frac{1}{2}} \int_0^s u_2(\tau, \lambda) K(s, \tau) d\tau, \quad (16)$$

где

$$K(s, \tau) = g(\tau) \left[y_0\left(\lambda^{\frac{1}{2}} s\right) y^0\left(\lambda^{\frac{1}{2}} \tau\right) - y^0\left(\lambda^{\frac{1}{2}} s\right) y_0\left(\lambda^{\frac{1}{2}} \tau\right) \right], \\ u_1(s, \lambda) = y_1(s, \lambda) - y_0\left(\lambda^{\frac{1}{2}} s\right), \quad u_2(s, \lambda) = \lambda^{\frac{1}{2}} \left(y_2(s, \lambda) - y^0\left(\lambda^{\frac{1}{2}} s\right) \right).$$

Учет в формулах (15) и (16) свойств функций $y_0(s)$ и $y^0(s)$ позволяет непосредственно получить оценки для функций $u_i(s, \lambda)$ ($i = 1, 2$) при фиксированном $s \neq 0$:

$$u_i(s, \lambda) = O\left(\lambda^{-\frac{1}{2}} \ln \lambda\right) \quad (i = 1, 2).$$

Отсюда уже, производя замену, обратную (13), приходим к обоснованию леммы.

Равенства (11) позволяют по формулам (9) и (10) определить асимптотические соотношения для элементов матрицы $U_1(\tau_1, \lambda)$. Производя необходимые вычисления, получаем

$$x_1(\tau_1, \lambda) = \sqrt{\frac{r(0)}{r(\tau_1)}} \left[\cos \left(\lambda \int_0^{\tau_1} \sqrt{r(t)} dt - \frac{\pi}{4} \right) - \right. \\ \left. - 2 \sin \left(\lambda \int_0^{\tau_1} \sqrt{r(t)} dt - \frac{\pi}{8} \right) \cos \left(\lambda \int_{t_1}^{\tau_1} \sqrt{r(t)} dt - \frac{\pi}{8} \right) \right] + O\left(\lambda^{-\frac{1}{2}} \ln \lambda\right),$$

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(\tau_1, \lambda) &= -\lambda \sqrt{r(0)r(\tau_1)} \left[\sin \left(\lambda \int_0^{\tau_1} \sqrt{r(t)} dt - \frac{\pi}{4} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - 2 \sin \left(\lambda \int_0^{t_1} \sqrt{r(t)} dt - \frac{\pi}{8} \right) \sin \left(\lambda \int_{t_1}^{\tau_1} \sqrt{r(t)} dt - \frac{\pi}{8} \right) + O \left(\lambda^{-\frac{1}{2}} \ln \lambda \right) \right], \\
 x_2(\tau_1, \lambda) &= -\lambda^{-1} \left(r(0)r(\tau_1) \right)^{-\frac{1}{2}} \left[\sin \left(\lambda \int_0^{\tau_1} \sqrt{r(t)} dt - \frac{\pi}{4} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \cos \left(\lambda \int_0^{t_1} \sqrt{r(t)} dt - \frac{\pi}{8} \right) \cos \left(\lambda \int_{t_1}^{\tau_1} \sqrt{r(t)} dt - \frac{\pi}{8} \right) + O \left(\lambda^{-\frac{1}{2}} \ln \lambda \right) \right], \\
 \dot{x}_2(\tau_1, \lambda) &= \sqrt{\frac{r(\tau_1)}{r(0)}} \left[\cos \left(\lambda \int_0^{\tau_1} \sqrt{r(t)} dt - \frac{\pi}{4} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - 2 \cos \left(\lambda \int_0^{t_1} \sqrt{r(t)} dt - \frac{\pi}{8} \right) \sin \left(\lambda \int_{t_1}^{\tau_1} \sqrt{r(t)} dt - \frac{\pi}{8} \right) \right] + O \left(\lambda^{-\frac{1}{2}} \ln \lambda \right).
 \end{aligned}$$

Тем самым найдено асимптотическое представление матрицы $U_1(\tau_1, \lambda)$. Аналогично получаются подобные выражения для всех остальных матриц, фигурирующих в определении $U(T, \lambda)$.

Заметим теперь, что при таком специальном выборе чисел $\tau_0, \dots, \tau_m$, при котором верны соотношения

$$\int_{\tau_i}^{t_{i+1}} \sqrt{r(t)} dt = \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{r(t)} dt,$$

справедливо равенство $U(T, \lambda) = U(\lambda) + O \left(\lambda^{-\frac{1}{2}} \ln \lambda \right)$. Отсюда, в свою очередь, следует, что

$$f(\lambda) = \varphi(\lambda) + O \left(\lambda^{-\frac{1}{2}} \ln \lambda \right). \quad (17)$$

Здесь через $f(\lambda)$ обозначен след матрицы монодромии $U(T, \lambda)$. Собственные значения λ_n^+ и λ_n^- являются корнями уравнений

$$f(\lambda) = 2 \text{ и } f(\lambda) = -2 \quad (18)$$

соответственно. Отсюда, из равенства (17) и из определения чисел h_n^+ и h_n^- вытекает доказательство теорем 2 и 3. Отметим еще, что проверку того, что собственные функции, отвечающие λ_n^+ и λ_n^- , имеют нужное число нулей, легко осуществить, используя асимптотические формулы решений.

Перейдем к доказательству теоремы 4. Собственные значения периодической и антипериодической краевых задач (и только они) являются соответственно решениями уравнений

$$f(\lambda) = 2 \operatorname{ch} \left[\int_0^T p(s) ds \right] \text{ и } f(\lambda) = -2 \operatorname{ch} \left[\int_0^T p(s) ds \right]. \quad (19)$$

Для следа матрицы монодромии справедлива формула

$$f(\lambda) = x_1(T, \lambda) + \dot{x}_2(T, \lambda).$$

Асимптотические представления для $x_1(T, \lambda)$ и $\dot{x}_2(T, \lambda)$ приводят к равенству

$$f(\lambda) = 2^{\frac{3}{2}} \cos \left(\lambda \int_0^T \sqrt{r(t)} dt \right) + O(\lambda^{-1} \ln \lambda).$$

Подставляя последнее выражения в (19), легко убеждаемся в справедливости теоремы 4.

Таким образом, сравнивая поведение собственных значений при $r(t) > 0$ и $r(t) \geq 0$, делаем вывод, что наличие нулей у $r(t)$ приводит к сдвигке всех собственных значений на некоторые постоянные величины.

3. Асимптотика собственных значений в случае знакопеременной $r(t)$

1. Формулировка результатов. Будем считать, что T -периодическая функция $r(t)$ в уравнении

$$\ddot{x} + [\lambda^2 r(t) + q(t)] x = 0, \quad (20)$$

имеет конечное число простых нулей $t_1 < t_2 < \dots < t_m$ на интервале $(0, T)$. При неограниченном увеличении λ количество нулей решений (20) на отрезке $[0, T]$ стремится к бесконечности. Отсюда и из результатов [1–5] вытекает, что существует бесконечно много собственных значений периодической и антипериодической краевых задач для уравнения (20). Очевидно, кроме бесконечного числа вещественных собственных значений существует и бесконечно много чисто мнимых собственных значений, однако, поскольку замена λ^2 на $-\lambda^2$ не меняет типа задачи, достаточно рассмотреть лишь вещественные собственные значения. Условимся о нумерации. Собственными значениями λ_{2n-1}^+ и λ_{2n}^+ будем называть такие неотрицательные собственные значения периодической краевой задачи, которым отвечают собственные функции, имеющие ровно $2n$ нулей на $[0, T)$. Аналогично, собственными значениями $\lambda_{2n-1}^- \geq 0$ и $\lambda_{2n}^- \geq 0$ назовем такие собственные значения антипериодической краевой задачи, отвечающие которым собственные функции имеют ровно $2n - 1$ нулей на $[0, T)$. Нас будет интересовать вопрос о зависимости $\lambda_n^\pm$ от номера n , когда n неограниченно растет.

Прежде чем перейти к формулировке результатов, введем несколько обозначений. Пусть (α_i, β_i) ($i = 1, \dots, \frac{m}{2}$) — все те интервалы отрезка $[t_1, t_1 + T]$, концами которых служат нули функции $r(t)$ и на которых $r(t)$ положительна. Положим

$$r_i(t) = \begin{cases} r(t), & t \in (\alpha_i + kT, \beta_i + kT) \ (k = 0, \pm 1, \dots), \\ 0, & t \in (\alpha_i + kT, \beta_i + kT) \ (k = 0, \pm 1, \dots). \end{cases}$$

Рассмотрим затем совокупность чисел

$$h_{ik} = \frac{\pi \left(k + \frac{1}{2}\right)}{T \int_0^{\beta_i + kT} \sqrt{r_i(t)} dt} \quad \left(i = 1, \dots, \frac{m}{2}; k = 0, 1, \dots\right).$$

Расположим все числа h_{ik} в ряд в порядке возрастания. Определим затем числа h_n , которые будем считать равными соответственно $(n + 1)$ -му члену этого ряда.

Теорема 5. *Имеют место асимптотические равенства*

$$\lambda_{n-1}^+ = h_n + O(n^{-1}), \quad \lambda_n^- = h_n + O(n^{-1}).$$

Рассмотрим затем несамосопряженное уравнение

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + [\lambda^2 r(t) + q(t)]x = 0, \quad (21)$$

где $r(t)$ та же, что и выше. Условие несамосопряженности означает, что

$$M(p) > 0.$$

Через $\tilde{\lambda}_{2n-1}^+$ и $\tilde{\lambda}_{2n}^+$ ($\tilde{\lambda}_{2n-1}^-$ и $\tilde{\lambda}_{2n}^-$) будем обозначать такие вещественные собственные числа (если они существуют) периодической (антипериодической) краевой задачи, отвечающие которым собственные функции имеют ровно $2n$ ($2n - 1$) нулей на полуинтервале $[0, T)$.

Теорема 6. *Для уравнения (21) имеют место следующие утверждения:*

1. *Найдутся такое $\lambda_0 > 0$ и такое четное n_0 , что на полуоси $[\lambda_0, \infty)$ существует бесконечно много собственных значений $\tilde{\lambda}_n^+$ ($n = n_0, n_0 + 1, \dots$) и $\tilde{\lambda}_n^-$ ($n = n_0, n_0 + 1, \dots$), для которых справедливы неравенства*

$$\tilde{\lambda}_{n_0}^+ < \tilde{\lambda}_{n_0+1}^- \leq \tilde{\lambda}_{n_0+2}^- < \tilde{\lambda}_{n_0+1}^+ \leq \tilde{\lambda}_{n_0+2}^+ < \dots$$

2. *Решения устойчивы в том и только в том случае, когда*

$$\lambda \in \left(\tilde{\lambda}_{2n}^+, \tilde{\lambda}_{2n+1}^-\right) \quad \text{или} \quad \lambda \in \left(\tilde{\lambda}_{2n}^-, \tilde{\lambda}_{2n-1}^+\right).$$

3. *Имеют место асимптотические равенства*

$$\tilde{\lambda}_{n-1}^+ = h_n + O(n^{-1}), \quad \tilde{\lambda}_n^- = h_n + O(n^{-1}).$$

Из этой теоремы вытекает, в частности, что независимо от величины $M(p)$, длина зон устойчивости стремится к нулю с ростом n , а последовательность длин зон неустойчивости состоит, вообще говоря, из нескольких подпоследовательностей, имеющих конечный предел при $n \rightarrow \infty$, причем хотя бы один из этих пределов не равен нулю.

2. Об обосновании результатов. Так же, как и в предыдущем случае, здесь достаточно изучить асимптотику матрицы $U_1(\tau_1, \lambda)$. Считая, что $r(0) < 0$, в качестве модельного уравнения примем такое:

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + sy = 0. \quad (22)$$

Для решений $y_0(s)$ и $y^0(s)$ этого уравнения с начальными условиями $y_0(0) = \dot{y}^0(0) = 1$, $\dot{y}_0(0) = y^0(0) = 0$ воспользуемся известными [6] асимптотическими формулами для больших значений s . Эти формулы имеют вид:

$$\begin{aligned} y_0(s) &= 3^{\frac{1}{6}} \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) s^{-\frac{1}{4}} \left\{ \cos \left[\frac{2}{3} s^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{12} \right] + O\left(s^{-\frac{3}{2}}\right) \right\}, \quad s > 0, \\ y_0(s) &= 2^{-1} \pi^{-\frac{1}{2}} 3^{\frac{1}{6}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) (-s)^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3}(-s)^{\frac{3}{2}}} \left\{ 1 + O\left(s^{-\frac{3}{2}}\right) \right\}, \quad s < 0, \\ y^0(s) &= 3^{\frac{5}{6}} \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) s^{-\frac{1}{4}} \left\{ \cos \left[\frac{2}{3} s^{\frac{3}{2}} - \frac{5\pi}{12} \right] + O\left(s^{-\frac{3}{2}}\right) \right\}, \quad s > 0, \\ y^0(s) &= 3^{\frac{5}{6}} 2^{-1} \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) (-s)^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3}(-s)^{\frac{3}{2}}} \left\{ 1 + O\left(s^{-\frac{3}{2}}\right) \right\}, \quad s < 0, \\ \dot{y}_0(s) &= -3^{\frac{1}{6}} \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) s^{\frac{1}{4}} \left\{ \cos \left[\frac{2}{3} s^{\frac{3}{2}} - \frac{7\pi}{12} \right] + O\left(s^{-\frac{3}{2}}\right) \right\}, \quad s > 0, \\ \dot{y}_0(s) &= -3^{\frac{1}{6}} \pi^{-\frac{1}{2}} 2^{-1} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) s^{\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}} \left\{ 1 + O\left(s^{-\frac{3}{2}}\right) \right\}, \quad s < 0, \\ \dot{y}^0(s) &= 3^{\frac{5}{6}} \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) s^{\frac{1}{4}} \cos \left[\frac{2}{3} s^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{12} \right] \left\{ 1 + O\left(s^{-\frac{3}{2}}\right) \right\}, \quad s > 0, \\ \dot{y}^0(s) &= 3^{\frac{5}{6}} 2^{-1} \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) s^{\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}} \left\{ 1 + O\left(s^{-\frac{3}{2}}\right) \right\}, \quad s < 0. \end{aligned} \quad (23)$$

На следующем этапе, действуя так же, как при доказательстве леммы 1, получаем выражения для функций $x_0(\tau, \lambda)$ и $x^0(\tau, \lambda)$ через $y_0(s, \lambda)$ и $y^0(s, \lambda)$. Окончательные формулы здесь такие:

$$\begin{aligned} [\omega'(t_1)]^{-\frac{1}{2}} x_0(\tau, \lambda) &= [\omega'(\tau)]^{-\frac{1}{2}} y_0\left(\lambda^{\frac{2}{3}} \omega(\tau)\right) [1 + O(\lambda^{-1})], \\ [\omega'(t_1)]^{-\frac{1}{2}} \dot{x}_0(\tau, \lambda) &= \lambda^{\frac{2}{3}} [\omega'(\tau)]^{\frac{1}{2}} \dot{y}_0\left(\lambda^{\frac{2}{3}} \omega(\tau)\right) [1 + O(\lambda^{-1})], \\ [\omega'(t_1)]^{\frac{1}{2}} x^0(\tau, \lambda) &= \lambda^{-\frac{2}{3}} \left\{ [\omega'(\tau)]^{-\frac{1}{2}} y^0\left(\lambda^{\frac{2}{3}} \omega(\tau)\right) [1 + O(\lambda^{-1})] \right\}, \\ [\omega'(t_1)]^{\frac{1}{2}} \dot{x}^0(\tau, \lambda) &= [\omega'(\tau)]^{-\frac{1}{2}} \dot{y}^0\left(\lambda^{\frac{2}{3}} \omega(\tau)\right) [1 + O(\lambda^{-1})], \end{aligned} \quad (24)$$

где τ принимает значения 0 и τ_1 , а функция $\omega(t)$ определяется равенством

$$\omega(t) = \left[\frac{3}{2} \int_{t_1}^t \sqrt{r(s)} ds \right]^{\frac{2}{3}}.$$

По формулам (23) и (24) находим асимптотические выражения для $x_0(\tau, \lambda)$ и $x^0(\tau, \lambda)$, а затем из равенств (9) и (10) получим асимптотику $U_1(\tau_1, \lambda)$. Для того

чтобы подобным образом изучить матрицу $U_2(\tau_2, \lambda)$, необходимо в качестве модельного уравнения принять

$$\frac{d^2 y}{ds^2} - sy = 0.$$

Отметим, что это уравнение получается из уравнения (22) с помощью замены времени s на $-s$. Учитывая это, можно воспользоваться предыдущими формулами.

Для упрощения вычислений можно положить $|r(\tau_1)| = |r(\tau_2)| = \dots = |r(\tau_m)|$. Прежде чем привести окончательные формулы, введем еще два обозначения:

$$\begin{aligned} \psi(\lambda) &= 2^{\frac{m}{2}} \cos \left(\lambda \int_0^T \sqrt{r_1(t)} dt \right) \cdot \dots \cdot \cos \left(\lambda \int_0^T \sqrt{r_{\frac{m}{2}}(t)} dt \right), \\ r_-(t) &= \begin{cases} -r(t), & \text{если } r(t) \leq 0, \\ 0, & \text{если } r(t) > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} x_1(T, \lambda) &= [\psi(\lambda) + O(\lambda^{-1})] e^{\lambda \int_0^T \sqrt{r_-(t)} dt}, \\ \dot{x}_1(T, \lambda) &= \lambda [\psi(\lambda) + O(\lambda^{-1})] e^{\lambda \int_0^T \sqrt{r_-(t)} dt}, \\ x_2(T, \lambda) &= \lambda^{-1} [\psi(\lambda) + O(\lambda^{-1})] e^{\lambda \int_0^T \sqrt{r_-(t)} dt}, \\ \dot{x}_2(T, \lambda) &= [\psi(\lambda) + O(\lambda^{-1})] e^{\lambda \int_0^T \sqrt{r_-(t)} dt}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем соотношение для следа $f(\lambda)$ матрицы монодромии:

$$f(\lambda) = 2 [\psi(\lambda) + O(\lambda^{-1})] e^{\lambda \int_0^T \sqrt{r_-(t)} dt}. \quad (25)$$

Подставляя (25) в равенства (18) и (19) и анализируя получающиеся выражения, приходим к обоснованию всех сформулированных в первом пункте результатов.

3. Пример. Изучим асимптотические законы распределения собственных значений периодической и антипериодической краевых задач для уравнения

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \lambda^2 r(t)x = 0, \quad (26)$$

где $\alpha > 0$, а периодическая с периодом $T = 1$ функция $r(t)$ имеет вид

$$r(t) = \begin{cases} \beta^2, & \text{если } t \in [0, a], \beta > 0, 0 < a < 1, \\ -1, & \text{если } t \in [a, 1]. \end{cases}$$

Несмотря на то, что функция $r(t)$ не принадлежит к рассмотренному выше классу, тем не менее выводы для уравнения (25) будут примерно такими же, что и в случае непрерывной и знакопеременной $r(t)$. Уравнение (26) интегрируется в явном

виде. Найдём решения $x_1(t, \lambda)$ и $x_2(t, \lambda)$ этого уравнения с начальными условиями $x_1(0, \lambda) = \dot{x}_2(0, \lambda) = 1$, $\dot{x}_1(0, \lambda) = x_2(0, \lambda) = 0$. Для значений t из отрезка $[0, a]$ находим, что

$$x_1(t, \lambda) = \left[\cos \left(\sqrt{\lambda^2 \beta^2 - \alpha^2} t \right) + \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda^2 \beta^2 - \alpha^2}} \sin \left(\sqrt{\lambda^2 \beta^2 - \alpha^2} t \right) \right] e^{-\alpha t}, \quad (27)$$

$$x_2(t, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 \beta^2 - \alpha^2}} \sin \left(\sqrt{\lambda^2 \beta^2 - \alpha^2} t \right) e^{-\alpha t}. \quad (28)$$

Учитывая это, получим следующее выражение для значений $t \in (a, 1]$:

$$x_1(t, \lambda) = \left(2\sqrt{\lambda^2 \beta^2 + \alpha^2} \right)^{-1} \times \\ \times \left\{ \left[\left(\alpha + \sqrt{\lambda^2 \beta^2 + \alpha^2} \right) x_1(a, \lambda) + \dot{x}_1(a, \lambda) \right] e^{(-\alpha + \sqrt{\lambda^2 \beta^2 + \alpha^2})(t-a)} - \right. \\ \left. - \left[\dot{x}_1(a, \lambda) + \left(\alpha + \sqrt{\lambda^2 \beta^2 + \alpha^2} \right) x_1(a, \lambda) \right] e^{(-\alpha - \sqrt{\lambda^2 \beta^2 + \alpha^2})(t-a)} \right\}, \quad (29)$$

$$x_2(t, \lambda) = \left(2\sqrt{\lambda^2 \beta^2 + \alpha^2} \right)^{-1} \times \\ \times \left\{ \left[\left(\alpha + \sqrt{\lambda^2 \beta^2 + \alpha^2} \right) x_2(a, \lambda) + \dot{x}_2(a, \lambda) \right] e^{(-\alpha + \sqrt{\lambda^2 \beta^2 + \alpha^2})(t-a)} - \right. \\ \left. - \left[\dot{x}_2(a, \lambda) + \left(\alpha + \sqrt{\lambda^2 \beta^2 + \alpha^2} \right) x_2(a, \lambda) \right] e^{(-\alpha - \sqrt{\lambda^2 \beta^2 + \alpha^2})(t-a)} \right\}, \quad (30)$$

причем входящие в эти равенства величины $x_i(a, \lambda)$ и $\dot{x}_i(a, \lambda)$ ($i = 1, 2$) определяются в (27) и (28) при $t = a$. Формулы (29) и (30) дают возможность получить асимптотическое выражение для следа $f(\lambda)$ матрицы монодромии уравнения (26). Имеем

$$f(\lambda) = x_1(1, \lambda) + \dot{x}_2(1, \lambda) = \\ = [\cos \lambda \beta + O(\lambda^{-1})] e^{\lambda(1-a+O(\lambda^{-1}))}.$$

Уравнения для нахождения собственных значений принимают после простых преобразований вид

$$[\cos \lambda \beta + O(\lambda^{-1})] e^{\lambda(1-a+O(\lambda^{-1}))} = \pm 1.$$

Отсюда собственные значения легко находятся. Очевидно, что при неограниченном увеличении λ они стремятся к нулям функции $\cos \lambda \beta$, т.е. к числам вида $\pi \left(n + \frac{1}{2} \right) \beta^{-1}$.

4. Пример. Устойчивость решений уравнений с медленно меняющимися коэффициентами. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + p(\varepsilon t)\dot{x} + q(\varepsilon t)x = 0 \quad (31)$$

с периодическими медленно меняющимися коэффициентами, т.е. при условии $0 < \varepsilon \ll 1$. Рассмотрим вопрос об устойчивости решений уравнения (31) для достаточно малых значений ε и при условии

$$M(p) > 0.$$

После замены $\varepsilon t \rightarrow t$ рассматриваемое уравнение принимает вид

$$\varepsilon^2 \ddot{x} + \varepsilon p(t)\dot{x} + q(t)x = 0.$$

Выполним стандартную замену

$$x = y \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t p(s) ds\right),$$

в результате которой получим уравнение

$$\varepsilon^2 \ddot{y} + [r(t) + \varepsilon m(t)]y = 0, \quad (32)$$

где $r(t) = q(t) - \frac{1}{4}p^2(t)$, $m(t) = -\frac{1}{2}\dot{p}(t)$. Положим

$$r_+ = \int_0^T \left[\frac{(|r(t)| + r(t))}{2} \right]^{1/2} dt, \quad r_- = \int_0^T \left[\frac{(|r(t)| - r(t))}{2} \right]^{1/2} dt.$$

Асимптотические формулы для решения уравнения (32) приведены выше. Из них вытекает следующее утверждение

Теорема 7. Пусть

$$M(p) > 2r_-.$$

Тогда при всех достаточно малых ε решения уравнения (31) асимптотически устойчивы.

Пусть

$$M(p) < 2r_- \text{ и } r_+ = 0,$$

тогда при всех достаточно малых ε решения уравнения (31) неустойчивы.

Пусть

$$M(p) < 2r_- \text{ и } r_+ > 0.$$

Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ устойчивость и неустойчивость уравнения (31) неограниченно чередуются.

4. Заключение

Получены асимптотические законы распределения собственных значений периодической и антипериодической краевых задач для линейного уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами. Показано, что в отсутствие точек поворота ($r(t) > 0$) длины зон неустойчивости стремятся к нулю с ростом их номера, а длины зон устойчивости – к некоторой положительной величине. Ситуация, когда $r(t) \geq 0$ и имеются нули $r(t)$, приводит к тому, что длины зон устойчивости и зон неустойчивости имеют конечный ненулевой предел при неограниченном увеличении номера соответствующей зоны. Если же функция $r(t)$ знакопеременна, то длины всех зон устойчивости стремятся к нулю, а длины зон неустойчивости – к некоторым конечным величинам. Эти выводы позволили сформулировать ряд интересных критериев устойчивости и неустойчивости решений уравнения (1).

Список литературы / References

- [1] Якубович В. А., Старжинский В. М., *Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами*, Наука, М., 1972; [Yakubovich V. A., Starzhinskiy V. M., *Lineynye differentsialnye uravneniya s periodicheskimi koeffitsientami*, Nauka, M., 1972, (in Russian).]
- [2] Ляпунов А. М., “Об одном линейном дифференциальном уравнении второго порядка”, *Собр. соч.*, **2**, Изд-во АН СССР, М.; Л., 1956., 401–403; [Lyapunov A. M., “Ob odnom lineynom differentsialnom uravnenii vtorogo poryadka”, *Sobr. soch.*, **2**, Izd-vo AN SSSR, M.; L., 1956., 401–403, (in Russian).]
- [3] Ляпунов А. М., “Об одном трансцендентном уравнении и о линейных дифференциальных уравнениях второго порядка с периодическими коэффициентами”, *Собр. соч.*, **2**, Изд-во АН СССР, М.; Л., 1956, 404–406; [Lyapunov A. M., “Ob odnom transtsendentnom uravnenii i o lineynykh differentsialnykh uravneniyakh vtorogo poryadka s periodicheskimi koeffitsientami”, *Sobr. soch.*, **2**, Izd-vo AN SSSR, M.; L., 1956, 404–406, (in Russian).]
- [4] Смирнов В. И., “Научный архив А. М. Ляпунова по вопросам устойчивости и теории обыкновенных дифференциальных уравнений”, *Тр. III Всесоюзн. матем. съезда, I*, Изд-во АН СССР, М., 1956, 236; [Smirnov V. I., “Nauchnyy arkhiv A. M. Lyapunova po voprosam ustoychivosti i teorii obyknovennykh differentsialnykh uravneniy”, *Tr. III Vsesoyuzn. matem. sezda, I*, Izd-vo AN SSSR, M., 1956, 236, (in Russian).]
- [5] Коддингтон Э., Левинсон И., *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, ИЛ, М., 1958; [Koddington E., Levinson I., *Teoriya obyknovennykh differentsialnykh uravneniy*, IL, M., 1958, (in Russian).]
- [6] Дородницын А. А., “Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка”, *УМН*, **7**, 6:52 (1952), 3–96; [Dorodnitsyn A. A., “Asimptoticheskie zakony raspredeleniya sobstvennykh znacheniy dlya nekotorykh osobyykh vidov differentsialnykh uravneniy vtorogo poryadka”, *UMN*, **7**, 6:52 (1952), 3–96, (in Russian).]
- [7] Тихонов А. Н., “Системы дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных”, *Математический сборник*, **31 (73)**:3 (1952), 575–586; [Tikhonov A. N., “Systems of differential equations containing small parameters in the derivatives”, *Mat. Sb.*, **31**:3 (1952), 575–586.
- [8] Бутузов В. Ф., Васильева А. Б., Федорюк М. В., “Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений”, *Итоги науки. Математический анализ 1967*, ВИНТИ АН СССР, М., 1969; [Butuzov V. F., Vasil’eva A. B., Fedoryuk M. V., “Asymptotic methods in the theory of ordinary differential equations”, *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, **8** (1970), 1–82].
- [9] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., *Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений*, Наука, М., 1973; [Vasil’eva A. B., Butuzov V. F., *Asimptoticheskie razlozheniya resheniy singulyarno vozmushchennykh uravneniy*, Nauka, M., 1973, (in Russian).]
- [10] Крейн М. Г., “Основные положения теории λ -зон устойчивости канонических систем линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами”, *Сборник Памяти А. А. Андропова*, Изд-во АН СССР, М., 1955; [Kreyn M. G., “Osnovnye polozheniya teorii λ -zon ustoychivosti kanonicheskikh sistem lineynykh differentsialnykh uravneniy s periodicheskimi koeffitsientami”, *Sbornik Pamyati A. A. Andronova*, Izd-vo AN SSSR, M., 1955, (in Russian).]
- [11] Кащенко С. А., “Предельные значения собственных чисел первой краевой задачи для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка с точками поворота”, *Вест. Яросл. ун-та*, **10**, 1974, 3–39; [Kashchenko S. A., “Predelnye znacheniya sobstvennykh chisel pervoy kraevoy zadachi dlya singulyarno vozmushchennogo differentsialnogo uravneniya vtorogo poryadka s tochkami povorota”, *Vest. Yarosl. un-ta*, **10**, 1974, 3–39, (in Russian).]
- [12] Кащенко С. А., “Асимптотика собственных чисел первой краевой задачи для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка с точками

- поворота”, *Вест. Ярослав. ун-та*, **10**, 1974, 40–64; [Kashchenko S. A., “Asimptotika sobstvennykh chisel pervoy kraevoy zadachi dlya singulyarno vozmushchennogo differentsialnogo uravneniya vtorogo poryadka s tochkami povorota”, *Vest. Yarosl. un-ta*, **10**, 1974, 40–64, (in Russian).]
- [13] Kashchenko S. A., “Asymptotics of Eigenvalues of the First Boundary-Value Problem for Singularly Perturbed Second-Order Differential Equation with Turning Points”, *Automatic Control and Computer Sciences*, **50**:7 (2016), 636–656.
- [14] Кащенко С. А., “Асимптотика собственных значений периодической и антипериодической краевых задач для сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений второго порядка с точками поворота”, *Вестник Ярослав. ун-та*, **13**, 1975, 20–83; [Kashchenko S. A., “Asimptotika sobstvennykh znacheniy periodicheskoy i antiperiodicheskoy kraevykh zadach dlya singulyarno vozmushchennykh differentsialnykh uravneniy vtorogo poryadka s tochkami povorota”, *Vestnik Yarosl. un-ta*, **13**, 1975, 20–83, (in Russian).]
- [15] Кащенко С. А., “Асимптотические законы распределения собственных значений периодической и антипериодической краевой задачи для дифференциальных уравнений второго порядка с точками поворота”, *Исслед. по устойчив. и теории колеб.*, Ярославль: ЯрГУ, 1976, 95–113; [Kashchenko S. A., “Asimptoticheskie zakony raspredeleniya sobstvennykh znacheniy periodicheskoy i antiperiodicheskoy kraevoy zadachi dlya differentsial'nykh uravneniy vtorogo poryadka s tochkami povorota”, *Issled. po ustoych. i teorii koleb.*, YarGU, Yaroslavl, 1976, 95–113, (in Russian).]

Kashchenko S. A., "Asymptotic of Eigenvalues of Periodic and Antiperiodic Boundary Value Problem for Second Order Differential Equations", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:1 (2017), 13–30.

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-1-13-30

Abstract. The article considers asymptotic distribution of characteristic constants in periodic and antiperiodic boundary-value problems for the second-order linear equation with periodic coefficients. It allows getting asymptotics of stability and instability zones of solutions. It was shown that in the absence of turning points ($r(t) > 0$) the instability zones lengths converge to zero with their number increasing, and the stability zones lengths converge to a positive quantity. The situation, when ($r(t) \geq 0$) and there are zeroes $r(t)$, results in the fact that the lengths of stability and instability zones have a finite nonzero bound at an unbounded increase of the number of the corresponding zone. But if the function $r(t)$ is alternating, the lengths of all stability zones converge to zero, and the lengths of instability zones converge to some finite quantities. These conclusions allowed to formulate a series of interesting criteria of stability and instability of solutions of the second-order equation with periodic coefficients. The results given are illustrated by a substantial example. The methods of investigation are based on a detailed study of the so-called special standard equations and the consequent reduction of original equations to any particular type of standard equations. Here, asymptotic methods of the theory of singular perturbation, as well as certain properties of a series of special functions are used.

Keywords: singularly perturbed equation, turning points, asymptotic, boundary value problem, eigenvalues

On the authors:

Sergey A. Kashchenko, orcid.org/0000-0002-8777-4302, doctor of science, professor,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia,
National Research Nuclear University MEPhI,
Kashirskoye shosse, 31, Moscow, 115409 Russia,
e-mail: kasch@uniyar.ac.ru