Моделирование и анализ информационных систем. Т. 24, № 1 (2017), с. 64–81
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 24, No 1 (2017), pp. 64–81

©Нестеров П. Н., 2016

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-1-64-81

УДК 517.968.72

Об асимптотике решений гармонического осциллятора с интегральным возмущением

Нестеров П. Н.

получена 10 ноября 2016

Аннотация.

В работе строятся асимптотические формулы для решений гармонического осциллятора с интегральным возмущением при стремлении независимой переменной к бесконечности. Особенностью рассматриваемого интегрального возмущения является колебательно убывающий характер его ядра. Предполагается, что интегральное ядро является вырожденным. Данное обстоятельство позволяет свести исходное интегро-дифференциальное уравнение к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. При построении асимптотических формул для базисных решений полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений используется специальный метод асимптотического интегрирования линейных динамических систем с колебательно убывающими коэффициентами. В результате серии специальных преобразований система обыкновенных дифференциальных уравнений приводится к так называемому L-диагональному виду. Асимптотика фундаментальной матрицы L-диагональной системы может быть построена с помощью классической теоремы Н. Левинсона. Полученные асимптотические формулы позволяют выявить так называемые резонансные частоты, т. е. частоты колебательной составляющей ядра, при которых у исходного интегро-дифференциального уравнения имеются неограниченные решения. Как оказывается, эти частоты несколько отличаются от резонансных частот в адиабатическом осцилляторе с синусоидальной колебательной составляющей убывающего во времени возмущения.

Ключевые слова: асимптотика, интегро-дифференциальные уравнения типа Вольтерра, гармонический осциллятор, колебательно убывающие ядра, метод усреднения, теорема Левинсона

Для цитирования: Нестеров П. Н., "Об асимптотике решений гармонического осциллятора с интегральным возмущением", *Моделирование и анализ информационных систем*, **24**:1 (2017), 64–81.

Об авторах:
Нестеров Павел Николаевич, orcid.org/0000-0002-9102-9436, канд. физ.-мат. наук, доцент,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: nesterov.pn@gmail.com

Благодарности:
Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации № МК-4625.2016.1.

Постановка задачи

Уравнение возмущенного гармонического осциллятора

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x + q(t)x = 0, \tag{1}$$

где функция $q(t)$ мала в некотором смысле при $t \to \infty$, называют обычно адиабатическим осциллятором. Пример уравнения (1) доставляет адиабатический осциллятор с функцией

$$q(t) = \frac{a}{t^\rho} \sin \lambda t, \qquad a, \lambda \neq 0, \quad \rho > 0, \tag{2}$$

где a, λ — вещественные числа. Известно (см. [2, 7, 9, 10, 14, 15]), что если ($\lambda = \pm 2$) и ($\rho \le 1$) или ($\lambda = \pm 1$) и ($\rho \le 1/2$), уравнение (1) с функцией $q(t)$ вида (2) имеет неограниченные решения при любых значениях параметра $a \neq 0$. В этом случае говорят, что в уравнении (1) имеет место параметрический резонанс. Если $\lambda \neq \pm 1, \pm 2$, то все ненулевые решения этого уравнения ограничены и не стремятся к нулю при $t \to \infty$. В работе [13] (см. также [5]) рассматривается уравнение адиабатического осциллятора с запаздыванием

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x + q(t)x(t-h) = 0, \tag{3}$$

где $h > 0$ и функция $q(t)$ имеет вид (2). Как оказывается, динамика решений уравнения (3) при $\rho \le 1/2$ существенно отличается от динамики решений уравнения (1). В частности, все решения уравнения (3) могут стремиться к нулю при $t \to \infty$.

В этой статье исследуется динамика решений интегро-дифференциального уравнения (ИДУ) типа Вольтерра

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x + q(t) \int\limits_{t_0}^{t} x(s)ds = 0, \qquad t \ge t_0 > 0, \tag{4}$$

где функция $q(t)$ определяется формулой (2). Мы построим асимптотические представления для решений уравнений (4) при $t \to \infty$. Асимптотическое поведение решений ИДУ второго порядка, к которым относится и уравнение вида (4), изучалось, например, в работах [8, 16]. Следует заметить, что теория асимптотического интегрирования ИДУ по сравнению с соответствующей теорией для ОДУ существенно менее развита. Для линейных ИДУ попытка развития такой теории предпринимается в статье [12]. В отмеченных работах авторами, в частности, указываются условия, при которых асимптотика решений ИДУ, в главном, определяется фундаментальными решениями предельного уравнения, которое, в свою очередь, является, ОДУ. Как будет нами показано, асимптотика всех решений уравнения (4) при $t \to \infty$ не всегда имеет вид

$$x(t) = c_1 e^{\mathrm{i}t} + c_2 e^{-\mathrm{i}t} + o(1), \tag{5}$$

где c_1, c_2 — произвольные комплексные постоянные, т.е. не всегда определяется фундаментальными решениями гармонического осциллятора. Мы также отметим замечательную монографию [6], в которой отражено современное состояние теории ИДУ типа Вольтерра.

1. Метод асимптотического интегрирования

Ставший уже классическим результат об асимптотическом представлении решений систем линейных дифференциальных уравнений был сформулирован Н. Левинсоном в работе [11] применительно к системам вида

$$\dot{x} = \big[A_0 + V(t) + R(t)\big]x, \quad x \in \mathbb{C}^m. \tag{6}$$

Относительно квадратных матриц A_0, $V(t)$ и $R(t)$ предполагаются выполненными следующие условия:

А.1. Все собственные числа постоянной матрицы A_0 различны.

А.2. Матрица $V(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

А.3. Матрица $\dot{V}(t)$ принадлежит классу $L_1[t_0, \infty)$ для некоторого $t_0 \in \mathbb{R}$, т. е.

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} |\dot{V}(t)| dt < \infty,$$

где $|\cdot|$ — какая-либо матричная норма.

А.4. Матрица $R(t)$ принадлежит классу $L_1[t_0, \infty)$.

Теорема Левинсона базируется на двух основных утверждениях, первый из которых известен как лемма о диагонализации переменной матрицы (см., например, [1]).

Лемма 1. *Пусть выполнены условия А.1 – А.3. Тогда при достаточно больших t существует невырожденная матрица $C(t)$ такая, что:*

(i) *по столбцам этой матрицы расположены собственные векторы матрицы $A_0 + V(t)$ и $C(t) \to C_0$ при $t \to \infty$. Постоянная матрица C_0 составлена из собственных векторов матрицы A_0;*

(ii) $\dot{C}(t) \in L_1[t_0, \infty)$*;*

(iii) *она приводит матрицу $A_0 + V(t)$ к диагональному виду, т. е.*

$$C^{-1}(t)\big[A_0 + V(t)\big]C(t) = \Lambda(t),$$

где $\Lambda(t) = \mathrm{diag}\big(\lambda_1(t), \ldots, \lambda_m(t)\big)$ — диагональная матрица, составленная из собственных чисел матрицы $A_0 + V(t)$.

В системе (6) осуществим замену

$$x(t) = C(t)y(t), \tag{7}$$

где $C(t)$ — матрица из леммы 1. Эта замена приводит систему (6) к так называемому L-диагональному виду:

$$\dot{y} = \big[\Lambda(t) + R_1(t)\big]y, \tag{8}$$

где

$$R_1(t) = C^{-1}(t)R(t)C(t) - C^{-1}(t)\dot{C}(t).$$

В силу свойств (i) и (ii) матрицы $C(t)$ и условия А.4 матрица $R_1(t)$ принадлежит классу $L_1[t_0, \infty)$. Оказывается, что остаточный член $R_1(t)$ не влияет в главном на асимптотику решений системы (8) в предположении некоторой регулярности относительно поведения функций $\lambda_1(t), \ldots, \lambda_m(t)$. Эта регулярность задается следующим условием дихотомии: для каждой пары индексов (i, j) имеет место либо неравенство

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{Re}\big(\lambda_i(s) - \lambda_j(s)\big) ds \le K_1, \qquad t_2 \ge t_1 \ge t_*, \tag{9}$$

либо неравенство

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{Re}\big(\lambda_i(s) - \lambda_j(s)\big) ds \ge K_2, \qquad t_2 \ge t_1 \ge t_*, \tag{10}$$

где K_1, K_2 — некоторые постоянные. Основной результат, полученный Левинсоном, состоит в следующем (см. [3, 7, 11]).

Теорема 1 (Levinson). *Пусть выполнено условие дихотомии* (9), (10). *Тогда фундаментальная матрица L-диагональной системы* (8) *допускает следующее асимптотическое представление при $t \to \infty$:*

$$Y(t) = \big(I + o(1)\big) \exp\Big\{ \int_{t^*}^{t} \Lambda(s) ds \Big\}. \tag{11}$$

Возвращаясь к системе (6) с помощью замены (7) и учитывая свойство (i) матрицы $C(t)$, заключаем, что фундаментальная матрица этой системы имеет следующую асимптотику при $t \to \infty$:

$$X(t) = \big(C_0 + o(1)\big) \exp\Big\{ \int_{t^*}^{t} \Lambda(s) ds \Big\}. \tag{12}$$

Таким образом, для использования теоремы Левинсона исходную систему следует привести к виду (6) или (8). В тех случаях, когда исходная система содержит колебательно убывающие величины, особенную эффективность в решении этой задачи показали усредняющие замены переменных [2, 4].

Рассмотрим следующую систему ОДУ:

$$\dot{x} = \big(A_1(t)v(t) + A_2(t)v^2(t) + \ldots + A_k(t)v^k(t) + R(t)\big)x. \tag{13}$$

Здесь x — m-мерный комплекснозначный вектор; $A_i(t)$ $(i = 1, \ldots, k)$, $R(t)$ — квадратные матрицы размера $m \times m$; $v(t)$ — скалярная абсолютно непрерывная на $[t_0, \infty)$ функция. Пусть

B.1. $v(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

B.2. $\dot{v}(t) \in L_1[t_0, \infty)$.

B.3. $v^{k+1}(t) \in L_1[t_0, \infty)$ для некоторого целого неотрицательного k.

B.4. Элементами матриц $A_l(t)$ $(l = 1, \ldots, k)$ являются тригонометрические многочлены, т. е.

$$A_l(t) = \sum_{j=1}^{M} \beta_j^{(l)} e^{\mathrm{i}\lambda_j t}, \tag{14}$$

где λ_j — произвольные действительные числа, а $\beta_j^{(l)}$ — постоянные, вообще говоря, комплексные матрицы;

B.5. Матрица $R(t) \in L_1[t_0, \infty)$. Имеет место следующая теорема (см. [2, 4]).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия B.1 — B.5. Тогда система (13) при достаточно больших t заменой*

$$x = \big[I + Y_1(t)v(t) + Y_2(t)v^2(t) + \ldots + Y_k(t)v^k(t)\big]y, \tag{15}$$

где I — единичная матрица, а элементами матриц $Y_i(t)$ $(i = 1, \ldots, k)$ являются тригонометрические многочлены с нулевым средним значением, приводится к виду

$$\dot{y} = \big(A_1 v(t) + A_2 v^2(t) + \ldots + A_k v^k(t) + R_1(t)\big)y \tag{16}$$

с постоянными матрицами A_i $(i = 1, \ldots, k)$ и матрицей $R_1(t) \in L_1[t_0, \infty)$.

Матрицы $Y_i(t)$ $(i = 1, \ldots, k)$ в замене (15) определяются как решения матричных дифференциальных уравнений

$$\frac{dY_i(t)}{dt} = \sum_{l=0}^{i-1} A_{i-l}(t)Y_l(t) - \sum_{l=0}^{i-1} Y_l(t)A_{i-l} \tag{17}$$

с нулевым средним значением. В уравнении (17) полагаем $Y_0(t) = I$. Матрицы A_i $(i = 1, \ldots, k)$ выбираются из условия однозначной разрешимости уравнений (17) в классе матриц, элементами которых являются тригонометрические многочлены с нулевым средним значением. Именно,

$$A_i = \mathrm{M}\left[\sum_{l=0}^{i-1} A_{i-l}(t)Y_l(t)\right], \qquad \left(\mathrm{M}\big[F(t)\big] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T F(s)ds\right). \tag{18}$$

В частности,

$$A_1 = \mathrm{M}\big[A_1(t)\big], \quad A_2 = \mathrm{M}\big[A_2(t) + A_1(t)Y_1(t)\big]. \tag{19}$$

Здесь матрица $Y_1(t)$ с нулевым средним значением определяется из уравнения

$$\frac{dY_1}{dt} = A_1(t) - A_1. \tag{20}$$

Замены вида (15) называют усредняющими.

Система (16) проще исходной системы (13) в том смысле, что она, вообще говоря, не содержит осциллирующих коэффициентов в главной части. Предположим, что первым ненулевым слагаемым в системе (16) является матрица $A_s v^s(t)$. Это означает, что систему (16) можно записать в виде

$$\dot{y} = \big[A_s + V(t)\big]v^s(t)y(t) + R_1(t)y(t), \tag{21}$$

где $(m \times m)$-матрица $V(t)$ удовлетворяет условиям A.2 и A.3. Тогда, если все собственные числа матрицы A_s различны, то заменой $y(t) = C(t)z(t)$, где $C(t)$ — матрица из леммы 1, система (21) приводится к L-диагональному виду

$$\dot{z} = \big[\Lambda(t)v^s(t) + R_2(t)\big]z(t). \tag{22}$$

Здесь диагональная матрица $\Lambda(t)$ составлена из собственных чисел матрицы $A_s + V(t)$ и

$$R_2(t) = -C^{-1}(t)\dot{C}(t) + C^{-1}(t)R_1(t)C(t).$$

В силу свойств (i) и (ii) матрицы $C(t)$ матрица $R_2(t)$ принадлежит классу $L_1[t_0, \infty)$. Теперь для построения асимптотики решений системы (22) остается лишь воспользоваться теоремой 1.

2. Построение асимптотики решений уравнения (4)

Полагая

$$\dot{x} = y, \qquad z(t) = \int\limits_{t_0}^{t} x(s)ds, \qquad u_0 = (x, y, z)^T,$$

от уравнения (4) перейдем к системе

$$\dot{u}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} u_0 + q(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} u_0, \tag{23}$$

которая должна рассматриваться вместе с дополнительным условием

$$z(t_0) = 0. \tag{24}$$

В системе (23) осуществим замену

$$u_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} & 0 \\ -\mathrm{i} & \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} u_1. \tag{25}$$

В результате этой замены приходим к системе

$$\dot{u}_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} u_1 + \frac{q(t)}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & \mathrm{i} \\ -1 & 1 & -\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} & -2\mathrm{i} & -2 \end{pmatrix} u_1. \tag{26}$$

Рассмотрим сначала случай, когда параметр ρ в формуле (2), определяющей функцию $q(t)$, удовлетворяет неравенству

$$\rho > 1. \tag{27}$$

При выполнении этого условия система (26) является L-диагональной. В силу теоремы 1 фундаментальная матрица системы (26) имеет следующую асимптотику при $t \to \infty$:

$$U_1(t) = \big[I + o(1)\big]\operatorname{diag}\big(e^{\mathrm{i}t}, e^{-\mathrm{i}t}, 1\big).$$

Возвращаясь теперь к системе (23) с помощью замены (25), приходим к следующим асимптотическим представлением для первых компонент ее фундаментальных решений:

$$x^{(1,2)}(t) = \big(1 + o(1)\big)e^{\pm \mathrm{i}t}, \qquad x^{(3)}(t) = o(1). \tag{28}$$

Условие (24) выделяет в пространстве решений системы (23) линейное двумерное подпространство. В качестве базиса в этом пространстве могут быть выбраны некоторые линейные комбинации фундаментальных решений системы (23) (очевидно, линейно независимые). Отсюда следует, что в качестве фундаментальных решений уравнения (4) следует взять некоторые линейные комбинации функций (28). Выпишем линейную комбинацию последних компонент фундаментальных решений системы (23). Имеем

$$z(t) = c_1\big(-\mathfrak{i} + o(1)\big)e^{\mathrm{i}t} + c_2\big(\mathfrak{i} + o(1)\big)e^{-\mathrm{i}t} + c_3\big(1 + o(1)\big),$$

где c_1, c_2, c_3 — произвольные комплексные постоянные. Подставляя теперь полученное выражение для $z(t)$ в (24) и выбирая величину t_0 достаточно большой, выражаем из полученного равенства величину c_3 линейным образом через c_1 и c_2. Записывая затем линейную комбинацию функций (28) и подставляя в нее полученное выражение для c_3, приходим к следующим асимптотическим формулам для линейно независимых решений уравнения (4) при $t \to \infty$:

$$x_{1,2}(t) = \big(1 + o(1)\big)e^{\pm \mathrm{i}t}. \tag{29}$$

Таким образом, справедливость асимптотических представлений (29) обоснована нами, по крайней мере, для достаточно больших t_0.

Пусть теперь

$$\frac{1}{2} < \rho \le 1. \tag{30}$$

В результате замены

$$u_1 = \operatorname{diag}\big(e^{\mathrm{i}t}, e^{-\mathrm{i}t}, 1\big)u_2 \tag{31}$$

система (26) преобразуется к следующему виду:

$$\dot{u}_2 = t^{-\rho}A_1(t)u_2. \tag{32}$$

Матрица коэффициентов этой системы определяется выражением

$$A_1(t) = \frac{a}{4}\begin{pmatrix} (-\mathfrak{i})\big(e^{\mathrm{i}\lambda t} - e^{-\mathrm{i}\lambda t}\big) & \mathfrak{i}\big(e^{\mathrm{i}(\lambda-2)t} - e^{-\mathrm{i}(\lambda+2)t}\big) & \big(e^{\mathrm{i}(\lambda-1)t} - e^{-\mathrm{i}(\lambda+1)t}\big) \\ \mathfrak{i}\big(e^{\mathrm{i}(\lambda+2)t} - e^{-\mathrm{i}(\lambda-2)t}\big) & (-\mathfrak{i})\big(e^{\mathrm{i}\lambda t} - e^{-\mathrm{i}\lambda t}\big) & -\big(e^{\mathrm{i}(\lambda+1)t} - e^{-\mathrm{i}(\lambda-1)t}\big) \\ 2\big(e^{\mathrm{i}(\lambda+1)t} - e^{-\mathrm{i}(\lambda-1)t}\big) & (-2)\big(e^{\mathrm{i}(\lambda-1)t} - e^{-\mathrm{i}(\lambda+1)t}\big) & 2\mathfrak{i}\big(e^{\mathrm{i}\lambda t} - e^{-\mathrm{i}\lambda t}\big) \end{pmatrix}. \tag{33}$$

В силу теоремы 2 осуществим в системе (32) усредняющую замену переменной

$$u_2 = \big[I + t^{-\rho}Y_1(t)\big]u_3 \tag{34}$$

Приходим к системе

$$\dot{u}_3 = \big[t^{-\rho}A_1 + R(t)\big]u_3, \tag{35}$$

где $A_1 = \mathrm{M}\big[A_1(t)\big]$ и $R(t) \in L_1[t_0, \infty)$. Вид матрицы A_1 будет различаться в следующих случаях.

Предположим сначала, что

$$\lambda \neq \pm 1, \pm 2. \tag{36}$$

Тогда $A_1 = 0$ и система (35) имеет L-диагональную форму. Из теоремы Левинсона следует, что фундаментальная матрица этой системы имеет следующую асимптотику при $t \to \infty$:

$$U_3(t) = I + o(1).$$

Возвращаясь теперь к исходной системе (23), получаем асимптотические представления (28) для первых компонент ее фундаментальных решений. Точно так же, как и в случае (27), устанавливаем справедливость асимптотических формул (29) для линейно независимых решений уравнения (4).

Поскольку в силу вида функции $q(t)$ замена параметра λ в (2) на $(-\lambda)$ эквивалентна замене параметра a на $(-a)$, то в дальнейшем мы будем рассматривать лишь положительные значения параметра λ. Изучим далее случай, когда

$$\lambda = 1. \tag{37}$$

Матрица A_1 в этой ситуации имеет следующий вид:

$$A_1 = \frac{a}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственными числами этой матрицы являются

$$\mu_{1,2} = \pm\frac{a\mathrm{i}}{2}, \quad \mu_3 = 0. \tag{38}$$

Поскольку собственные числа матрицы A_1 различны, то в силу леммы 1 система (35) может быть приведена к L-диагональной форме, например, с помощью замены

$$u_3 = Cu_4, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2\mathrm{i} & -2\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Из теоремы 1 тогда следует, что фундаментальная матрица системы (35) имеет следующую асимптотику при $t \to \infty$:

$$U_3(t) = \big[C + o(1)\big]\,\mathrm{diag}\Big(\exp\Big\{\frac{a\mathrm{i}}{2}\int t^{-\rho}dt\Big\}, \exp\Big\{-\frac{a\mathrm{i}}{2}\int t^{-\rho}dt\Big\}, 1\Big).$$

Здесь матрица C определяется формулой (39). Возвращаясь к системе (23), получаем следующие асимптотические формулы для первых компонент ее фундаментальных решений при $t \to \infty$:

$$x^{(1,2)}(t) = \Big[\big(1 + o(1)\big)e^{\mathrm{i}t} + \big(1 + o(1)\big)e^{-\mathrm{i}t}\Big]\exp\Big\{\pm\frac{a\mathrm{i}}{2}\int t^{-\rho}dt\Big\}, \tag{40}$$
$$x^{(3)}(t) = \big(1 + o(1)\big)e^{\mathrm{i}t} - \big(1 + o(1)\big)e^{-\mathrm{i}t}.$$

Построим асимптотики фундаментальных решений уравнения (4), когда величина t_0 достаточно велика. Выписывая линейную комбинацию последних компонент фундаментальных решений системы (23), получаем

$$z(t) = c_1\Big[\big(-\mathrm{i}+o(1)\big)e^{\mathrm{i}t} + \big(\mathrm{i}+o(1)\big)e^{-\mathrm{i}t} + 2\mathrm{i} + o(1)\Big]\exp\Big\{\frac{a\mathrm{i}}{2}\int t^{-\rho}dt\Big\} +$$
$$+ c_2\Big[\big(-\mathrm{i}+o(1)\big)e^{\mathrm{i}t} + \big(\mathrm{i}+o(1)\big)e^{-\mathrm{i}t} - 2\mathrm{i} + o(1)\Big]\exp\Big\{-\frac{a\mathrm{i}}{2}\int t^{-\rho}dt\Big\} +$$
$$+ c_3\Big[\big(-\mathrm{i}+o(1)\big)e^{\mathrm{i}t} - \big(\mathrm{i}+o(1)\big)e^{-\mathrm{i}t} + o(1)\Big].$$

Здесь c_1, c_2, c_3 — произвольные комплексные постоянные. Подставим полученное для $z(t)$ выражение в условие (24). Заметим, что коэффициент при c_2 не обращается в ноль, если t_0 достаточно велико. Тогда величина c_2 может быть линейным образом выражена через c_1 и c_3. Выписывая затем линейную комбинацию функций из (40) с учетом полученного представления для c_2, приходим к следующим асимптотическим формулам для линейно независимых решений уравнения (4) при $t \to \infty$:

$$x_{1,2}(t) = x^{(1,3)}(t) + \delta_{1,2}x^{(2)}(t). \tag{41}$$

Здесь $\delta_{1,2}$ — некоторые комплексные числа, которые определяются в силу условия (24).

Перейдем теперь к рассмотрению случая

$$\lambda = 2. \tag{42}$$

Нетрудно видеть, что матрица A_1 в системе (35) определяется выражением

$$A_1 = \frac{a}{4}\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа этой матрицы имеют вид

$$\mu_{1,2} = \pm\frac{a}{4}, \quad \mu_3 = 0. \tag{43}$$

В силу леммы 1 система (35) с помощью замены

$$u_3 = Cu_4, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\mathrm{i} & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{44}$$

может быть приведена к L-диагональной форме. Из теоремы Левинсона тогда следует, что фундаментальная матрица системы (35) имеет следующую асимптотику при $t \to \infty$:

$$U_3(t) = \big[C + o(1)\big]\,\mathrm{diag}\Big(\exp\Big\{\frac{a}{4}\int t^{-\rho}dt\Big\}, \exp\Big\{-\frac{a}{4}\int t^{-\rho}dt\Big\}, 1\Big).$$

Здесь матрица C определяется выражением (44). Для первых компонент фундаментальных решений системы (23) получаем следующие асимптотические формулы при $t \to \infty$:

$$x^{(1,2)}(t) = \Big[\big(1 + o(1)\big)e^{\mathrm{i}t} \mp \big(\mathrm{i} + o(1)\big)e^{-\mathrm{i}t}\Big] \exp\Big\{\pm\frac{a}{4}\int t^{-\rho}dt\Big\}, \tag{45}$$
$$x^{(3)}(t) = o(1).$$

Как и в предыдущих случаях, выпишем линейную комбинацию последних компонент фундаментальных решений системы (23). Получаем

$$z(t) = c_1\Big[\big(-\mathrm{i} + o(1)\big)e^{\mathrm{i}t} + \big(1 + o(1)\big)e^{-\mathrm{i}t}\Big] \exp\Big\{\frac{a}{4}\int t^{-\rho}dt\Big\} +$$
$$+ c_2\Big[\big(-\mathrm{i} + o(1)\big)e^{\mathrm{i}t} - \big(1 + o(1)\big)e^{-\mathrm{i}t}\Big] \exp\Big\{-\frac{a}{4}\int t^{-\rho}dt\Big\} + c_3\big(1 + o(1)\big),$$

где c_1, c_2, c_3 — произвольные комплексные постоянные. Подставляя теперь полученное выражение для $z(t)$ в (24) и выбирая величину t_0 достаточно большой, выражаем величину c_3 линейным образом через c_1 и c_2. Записывая затем линейную комбинацию функций (45) и подставляя в нее полученное выражение для c_3, приходим к следующим асимптотическим формулам для фундаментальных решений уравнения (4) при $t \to \infty$:

$$x_{1,2}(t) = x^{(1,2)}(t) + o(1). \tag{46}$$

Таким образом, при условиях (30), (42) уравнение (4) имеет неограниченные решения.

Рассмотрим далее случай, когда

$$\frac{1}{3} < \rho \leq \frac{1}{2}.$$

В результате усредняющей замены

$$u_2 = \big[I + t^{-\rho}Y_1(t) + t^{-2\rho}Y_2(t)\big]u_3 \tag{47}$$

система (32) приводится к виду

$$\dot{u}_3 = \big[t^{-\rho}A_1 + t^{-2\rho}A_2 + R(t)\big]u_3. \tag{48}$$

Здесь $A_1 = \mathrm{M}\big[A_1(t)\big]$, $A_2 = \mathrm{M}\big[A_1(t)Y_1(t)\big]$, где матрица $Y_1(t)$ определяется как решение матричного дифференциального уравнения (20) с нулевым средним значением, и, наконец, $R(t) \in L_1[t_0, \infty)$. Несложные, но довольно утомительные вычисления приводят к следующей формуле для матрицы $A_1(t)Y_1(t)$:

$$A_1(t)Y_1(t) = \frac{a^2}{16}\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ \bar{a}_{12}(t) & \bar{a}_{11}(t) & \bar{a}_{13}(t) \\ a_{31}(t) & \bar{a}_{31}(t) & a_{33}(t) \end{pmatrix}. \tag{49}$$

Здесь символом $\bar{z}$ обозначено число, комплексно сопряженное с z. Элементы матрицы (49) определяются следующими выражениями:

$$a_{11}(t) = \frac{\mathrm{i}}{\lambda}\Big(e^{2\mathrm{i}\lambda t} - e^{-2\mathrm{i}\lambda t}\Big) + \mathrm{i}\Big(\frac{e^{2\mathrm{i}\lambda t}}{\lambda+2} + \frac{1}{\lambda-2} - \frac{1}{\lambda+2} - \frac{e^{-2\mathrm{i}\lambda t}}{\lambda-2}\Big) -$$
$$-2\mathrm{i}\Big(\frac{e^{2\mathrm{i}\lambda t}}{\lambda+1} + \frac{1}{\lambda-1} - \frac{1}{\lambda+1} - \frac{e^{-2\mathrm{i}\lambda t}}{\lambda-1}\Big),$$
$$a_{12}(t) = (-\mathrm{i})\Big(\frac{e^{2\mathrm{i}(\lambda-1)t}}{\lambda-2} + \frac{e^{-2\mathrm{i}t}}{\lambda+2} - \frac{e^{-2\mathrm{i}t}}{\lambda-2} - \frac{e^{-2\mathrm{i}(\lambda+1)t}}{\lambda+2}\Big) -$$
$$-\frac{\mathrm{i}}{\lambda}\Big(e^{2\mathrm{i}(\lambda-1)t} - e^{-2\mathrm{i}(\lambda+1)t}\Big) + 2\mathrm{i}\Big(\frac{e^{2\mathrm{i}(\lambda-1)t}}{\lambda-1} + \frac{e^{-2\mathrm{i}t}}{\lambda+1} - \frac{e^{-2\mathrm{i}t}}{\lambda-1} - \frac{e^{-2\mathrm{i}(\lambda+1)t}}{\lambda+1}\Big),$$
$$a_{13}(t) = -\Big(\frac{e^{\mathrm{i}(2\lambda-1)t}}{\lambda-1} - \frac{e^{-\mathrm{i}(2\lambda+1)t}}{\lambda+1}\Big) - \Big(\frac{e^{\mathrm{i}(2\lambda-1)t}}{\lambda+1} - \frac{e^{-\mathrm{i}(2\lambda+1)t}}{\lambda-1}\Big) + \frac{2}{\lambda}\Big(e^{\mathrm{i}(2\lambda-1)t} - e^{-\mathrm{i}(2\lambda+1)t}\Big),$$
$$a_{31}(t) = -\frac{2}{\lambda}\Big(e^{\mathrm{i}(2\lambda+1)t} - e^{-\mathrm{i}(2\lambda-1)t}\Big) - 2\Big(\frac{e^{\mathrm{i}(2\lambda+1)t}}{\lambda+2} + \frac{e^{\mathrm{i}t}}{\lambda-2} - \frac{e^{\mathrm{i}t}}{\lambda+2} - \frac{e^{-\mathrm{i}(2\lambda-1)t}}{\lambda-2}\Big) +$$
$$+4\Big(\frac{e^{\mathrm{i}(2\lambda+1)t}}{\lambda+1} + \frac{e^{\mathrm{i}t}}{\lambda-1} - \frac{e^{\mathrm{i}t}}{\lambda+1} - \frac{e^{-\mathrm{i}(2\lambda-1)t}}{\lambda-1}\Big),$$
$$a_{33}(t) = (-2\mathrm{i})\Big(\frac{e^{2\mathrm{i}\lambda t}}{\lambda-1} - \frac{e^{-2\mathrm{i}\lambda t}}{\lambda+1}\Big) - 2\mathrm{i}\Big(\frac{e^{2\mathrm{i}\lambda t}}{\lambda+1} - \frac{e^{-2\mathrm{i}\lambda t}}{\lambda-1}\Big) + \frac{4\mathrm{i}}{\lambda}\Big(e^{2\mathrm{i}\lambda t} - e^{-2\mathrm{i}\lambda t}\Big). \tag{50}$$

Заметим, что интерес представляет лишь изучение случая, когда выполнены неравенства (36). Действительно, если $\lambda = 1$ или $\lambda = 2$, то матрица A_1 в системе (48) ненулевая и ее собственные числа различны. Воспользовавшись леммой 1, систему (48) заменой $u_3 = C(t)u_4$ можно привести к L-диагональному виду

$$\dot{u}_4 = \big[t^{-\rho}\Lambda(t) + R_1(t)\big]u_4, \tag{51}$$

где диагональная матрица $\Lambda(t)$ составлена из собственных чисел матрицы $A_1 + t^{-\rho}A_2$, а $R_1(t) \in L_1[t_0, \infty)$. Построим затем асимптотику фундаментальной матрицы системы (51) при $t \to \infty$ согласно теореме Левинсона и вернемся к исходной системе (23). Тогда для фундаментальных решений уравнения (4) в случае $\lambda = 1$ мы получаем асимптотические формулы (40), (41), а в случае $\lambda = 2$ — формулы (45), (46) с тем лишь изменением, что величину $\int t^{-\rho}dt$ в отмеченных формулах следует заменить выражением

$$\frac{t^{1-\rho}}{1-\rho}\big(1 + o(1)\big). \tag{52}$$

Итак, будем далее рассматривать случай, когда выполнены неравенства (36). Тогда матрица $A_1 = 0$ и необходимо вычислить матрицу A_2. Вновь нам потребуется рассмотреть несколько ситуаций. Пусть сначала

$$\lambda \neq \pm\frac{1}{2}, \pm1, \pm2. \tag{53}$$

Используя (49), (50), несложно убедиться в том, что

$$A_2 = \big[A_1(t)Y_1(t)\big] = \mu\mathrm{i}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu = \frac{3a^2}{4(\lambda^2-1)(\lambda^2-4)}. \tag{54}$$

Из вида матрицы A_2 следует, что система (48) является L-диагональной и асимптотика ее фундаментальной матрицы может быть построена на основании теоремы 1. Первые компоненты фундаментальных решений системы (23) имеют тогда следующие асимптотики при $t \to \infty$:

$$x^{(1,2)}(t) = \big(1 + o(1)\big) \exp\Big\{\pm \mathrm{i}\Big(t + \mu \int t^{-2\rho} dt\Big)\Big\}, \qquad x^{(3)}(t) = o(1). \tag{55}$$

Как и ранее, будем предполагать, что величина t_0 в (24) достаточно велика. Выпишем линейную комбинацию последних компонент фундаментальных решений системы (23). Имеем

$$z(t) = c_1\big(-\mathrm{i} + o(1)\big) \exp\Big\{\mathrm{i}\Big(t + \mu \int t^{-2\rho} dt\Big)\Big\} + \\ + c_2\big(\mathrm{i} + o(1)\big) \exp\Big\{-\mathrm{i}\Big(t + \mu \int t^{-2\rho} dt\Big)\Big\} + c_3\big(1 + o(1)\big),$$

где c_1, c_2, c_3 — произвольные комплексные постоянные. Подставляя это равенство в (24), выражаем при достаточно больших t_0 величину c_3 линейно через c_1 и c_2. Выписывая теперь линейную комбинацию функций (55) с учетом полученного выражения для c_3, получаем следующие асимптотики для линейно независимых решений уравнения (4) при $t \to \infty$:

$$x_{1,2}(t) = x^{(1,2)}(t) + o(1). \tag{56}$$

Предположим теперь, что

$$\lambda = \frac{1}{2}. \tag{57}$$

Из (49), (50) следует, что

$$A_2 = \big[A_1(t) Y_1(t)\big] = \frac{a^2}{15} \begin{pmatrix} 4\mathrm{i} & 0 & 5 \\ 0 & -4\mathrm{i} & 5 \\ 10 & 10 & 0 \end{pmatrix}. \tag{58}$$

Несложный подсчет показывает, что собственные числа этой матрицы имеют вид

$$\mu_{1,2} = \pm \frac{2\sqrt{21}}{15} a^2, \quad \mu_3 = 0. \tag{59}$$

Система (48) заменой

$$u_3 = C u_4, \qquad C = \begin{pmatrix} \delta & -\bar{\delta} & 1 \\ \bar{\delta} & -\delta & -1 \\ 1 & 1 & -\frac{4}{5}\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad \delta = \frac{\sqrt{21} + 2\mathrm{i}}{10} \tag{60}$$

может быть приведена к L-диагональной форме. В силу теоремы Левинсона фундаментальная матрица системы (48) имеет тогда следующую асимптотику при $t \to \infty$:

$$U_3(t) = \big[C + o(1)\big] \operatorname{diag}\Big(\exp\Big\{\mu_1 \int t^{-2\rho} dt\Big\}, \exp\Big\{\mu_2 \int t^{-2\rho} dt\Big\}, 1\Big).$$

Здесь матрица C имеет вид (60), а величины μ_1 и μ_2 определяются выражениями (59). Первые компоненты фундаментальных решений системы (23) допускают тогда следующие асимптотические представления при $t \to \infty$:

$$\begin{gathered} x^{(1)}(t) = \Big[\big(\delta + o(1)\big)e^{\mathrm{i}t} + \big(\bar\delta + o(1)\big)e^{-\mathrm{i}t}\Big]\exp\Big\{\mu_1\int t^{-2\rho}dt\Big\}, \\ x^{(2)}(t) = \Big[\big(-\bar\delta + o(1)\big)e^{\mathrm{i}t} - \big(\delta + o(1)\big)e^{-\mathrm{i}t}\Big]\exp\Big\{\mu_2\int t^{-2\rho}dt\Big\}, \\ x^{(3)}(t) = \big(1 + o(1)\big)e^{\mathrm{i}t} - \big(1 + o(1)\big)e^{-\mathrm{i}t}. \end{gathered} \tag{61}$$

Вновь выпишем линейную комбинацию z-компонент фундаментальных решений системы (23). Имеем

$$\begin{aligned} z(t) = c_1\Big[\big(-\mathrm{i}\delta + o(1)\big)e^{\mathrm{i}t} + \big(\mathrm{i}\bar\delta + o(1)\big)e^{-\mathrm{i}t} + 1 + o(1)\Big]\exp\Big\{\mu_1\int t^{-2\rho}dt\Big\} + \\ + c_2\Big[\big(\mathrm{i}\bar\delta + o(1)\big)e^{\mathrm{i}t} - \big(\mathrm{i}\bar\delta + o(1)\big)e^{-\mathrm{i}t} + 1 + o(1)\Big]\exp\Big\{\mu_2\int t^{-2\rho}dt\Big\} + \\ + c_3\Big[\big(-\mathrm{i} + o(1)\big)e^{\mathrm{i}t} - \big(\mathrm{i} + o(1)\big)e^{-\mathrm{i}t} - \frac{4\mathrm{i}}{5} + o(1)\Big], \end{aligned}$$

где c_1, c_2, c_3 — произвольные комплексные постоянные. Подставим это выражение в (24). Заметим, что коэффициент при c_3 для достаточно больших t_0 сколь угодно близок к величине $\big(-2\mathrm{i}\cos t_0 - \frac{4\mathrm{i}}{5}\big)$. Следовательно, c_3 можно линейно выразить через c_1 и c_2 для достаточно больших t_0, таких что $\cos t_0 \neq -\frac{2}{5}$. В таком случае для фундаментальных решений уравнения (4) получаем следующие асимптотики при $t \to \infty$:

$$x_{1,2}(t) = x^{(1,2)}(t) + \delta_{1,2}x^{(3)}(t). \tag{62}$$

где $\delta_{1,2}$ — некоторые комплексные числа, которые определяются в силу условия (24). Заметим, что в рассмотренной ситуации уравнение (4) имеет неограниченные при $t \to \infty$ решения.

Рассмотрим, наконец, случай, когда

$$\rho \leq \frac{1}{3}.$$

Систему (32) с помощью усредняющей замены

$$u_2 = \big[I + t^{-\rho}Y_1(t) + \ldots + t^{-k\rho}Y_k(t)\big]u_3 \tag{63}$$

приводим к виду

$$\dot u_3 = \big[t^{-\rho}A_1 + t^{-2\rho}A_2 + \ldots + t^{-k\rho}A_k + R(t)\big]u_3. \tag{64}$$

Здесь $k \in \mathbb{N}$ выбрано так, что $0 < k\rho \leq 1 < (k+1)\rho$, матрицы $Y_i(t)$ и A_i определяются согласно формулам (17), (18), а матрица $R(t) \in L_1[t_0, \infty)$. Очевидно, что поведение решений системы (64) при $t \to \infty$ будет определяться видом собственных чисел матрицы

$$A(t) = t^{-\rho}A_1 + t^{-2\rho}A_2 + \ldots + t^{-k\rho}A_k. \tag{65}$$

Исследуем структуру этой матрицы более подробно. Нам потребуется несколько вспомогательных утверждений.

Предложение 1. *Пусть в системе* (13) *каждая матрица* $A_i(t)$, $i = 1, \ldots, k$, *имеет следующую структуру:*

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ \bar{y} & \bar{x} & \bar{z} \\ w & \bar{w} & r \end{pmatrix}, \tag{66}$$

где x, y, z, w *— некоторые комплекснозначные функции, а* r *— некоторая действительнозначная функция, зависящие от номера матрицы. Тогда каждая из постоянных матриц* A_i, $i = 1, \ldots, k$, *в усредненной системе* (16) *также имеет структуру вида* (66), *где* x, y, z, w *— некоторые комплексные числа, а* r *— некоторое действительное число.*

Справедливость этого утверждения следует из легко проверяемого факта о том, что сумма и произведение матриц вида (66) также является матрицей подобного вида, а также из формул (17), (18). Кроме того, очевидно, что интегрирование матрицы вида (66), а значит, и вычисление среднего значения такой матрицы также не изменяет ее структуру.

Будем говорить, что тригонометрический многочлен

$$p(t) = \sum_{j=1}^{N} c_j e^{\mathrm{i}\lambda_j t}, \quad \lambda_j \in \mathbb{R},$$

относится к классу $\mathcal{A}$, если все его коэффициенты c_j, $j = 1, \ldots, N$, — чисто мнимые, и к классу $\mathcal{B}$ — если действительны. Например, функция $p(t) = \sin t$ относится к классу $\mathcal{A}$, а $p(t) = \cos t$ — к классу $\mathcal{B}$.

Предложение 2. *Пусть в системе* (13) *каждая матрица* $A_i(t)$, $i = 1, \ldots, k$, *имеет следующую структуру:*

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{A} & \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \mathcal{B} & \mathcal{A} \end{pmatrix}, \tag{67}$$

где символами $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *обозначена принадлежность соответствующего элемента тому или иному классу. Тогда каждая из постоянных матриц* A_i, $i = 1, \ldots, k$, *в усредненной системе* (16) *имеет следующий вид:*

$$\begin{pmatrix} \boxed{\mathrm{i}} & \boxed{\mathrm{i}} & \boxed{r} \\ \boxed{\mathrm{i}} & \boxed{\mathrm{i}} & \boxed{r} \\ \boxed{r} & \boxed{r} & \boxed{\mathrm{i}} \end{pmatrix}, \tag{68}$$

где символом $\boxed{\mathrm{i}}$ *обозначено некоторое чисто мнимое число или ноль, а символом* $\boxed{r}$ *— некоторое действительное число или ноль.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по номеру матрицы A_i. Поскольку

$$\mathrm{M}\left[\begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{A} & \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \mathcal{B} & \mathcal{A} \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \boxed{\mathrm{i}} & \boxed{\mathrm{i}} & \boxed{r} \\ \boxed{\mathrm{i}} & \boxed{\mathrm{i}} & \boxed{r} \\ \boxed{r} & \boxed{r} & \boxed{\mathrm{i}} \end{pmatrix}, \tag{69}$$

то в силу (19) утверждение справедливо для матрицы A_1. Кроме того, из (20) следует, что матрица $Y_1(t)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \mathcal{B} & \mathcal{B} & \mathcal{A} \\ \mathcal{B} & \mathcal{B} & \mathcal{A} \\ \mathcal{A} & \mathcal{A} & \mathcal{B} \end{pmatrix}, \tag{70}$$

поскольку такой вид имеет интеграл от матрицы (67). Предположим далее, что все матрицы A_j для $j \le i-1$, $i \ge 2$, имеют вид (68), а все матрицы $Y_j(t)$, $j \le i-1$, имеют вид (70). Покажем, что матрицы A_i и $Y_i(t)$ имеют тогда такую же структуру. Заметим, что произведение матрицы вида (67) и матрицы вида (70) есть матрица вида (67). Тогда из (18) в силу (69) следует, что матрица A_i имеет вид (68). Далее, произведение матрицы вида (70) и матрицы вида (68) есть матрица вида (67). Из (17) заключаем, что матрица $Y_i(t)$ имеет вид (70), поскольку, как было отмечено ранее, такой вид имеет интеграл от матрицы (67). □

Вернемся к рассмотрению матрицы $A(t)$ из (65). Поскольку матрица $A_1(t)$ в системе (32) имеет вид (66), (67), то в силу утверждений 1, 2 каждая из матриц A_i, $i = 1, \ldots, k$, в усредненной системе (64) имеет вид (66), (68). Таким образом, сопоставляя формулы (66) и (68), заключаем, что

$$A(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\alpha(t) & \mathrm{i}\beta(t) & \gamma(t) \\ -\mathrm{i}\beta(t) & -\mathrm{i}\alpha(t) & \gamma(t) \\ \omega(t) & \omega(t) & 0 \end{pmatrix}, \tag{71}$$

где $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t), \omega(t)$ — некоторые действительнозначные функции. Для определения собственных чисел матрицы $A(t)$ получаем характеристический многочлен

$$p(\mu) = -\mu^3 + \mu\big(\beta^2(t) - \alpha^2(t) + 2\omega(t)\gamma(t)\big).$$

Следовательно, собственные числа $\mu_{1,2}(t)$ определяются как корни полинома

$$\mu^2 = \beta^2(t) - \alpha^2(t) + 2\omega(t)\gamma(t),$$

а значит, при достаточно больших t являются либо чисто мнимыми и комплексно сопряженными друг другу, либо действительными и разных знаков. Кроме того, собственное число $\mu_3(t) \equiv 0$. Заметим, что первой ненулевой матрицей в системе (64) является либо матрица A_1, либо матрица A_2. Из леммы 1 тогда следует, что система (64) приводится к L-диагональному виду

$$\dot{u}_4 = \big[\Lambda(t) + R_1(t)\big]u_4,$$

где матрица $\Lambda(t) = \mathrm{diag}\big(\mu_1(t), \mu_2(t), 0\big)$ составлена из собственных чисел матрицы (65).

Таким образом, мы можем сделать следующие выводы. Если $\lambda = 1$, то

$$\mu_{1,2}(t) = \mu_{1,2}t^{-\rho}\big(1 + o(1)\big), \tag{72}$$

где числа $\mu_{1,2}$ определяются формулой (38). В этом случае для фундаментальных решений уравнения (4) (во всяком случае при достаточно больших t_0) справедливы асимптотические формулы (40), (41), в которых величину $\int t^{-\rho}dt$ следует заменить выражением (52). Если $\lambda = 2$, то для собственных чисел матрицы (65) мы получаем представление (72), где на сей раз числа $\mu_{1,2}$ определяются формулой (43). Тогда для фундаментальных решений уравнения (4) мы получаем асимптотические представления (45), (46), в которых вновь следует заменить величину $\int t^{-\rho}dt$ выражением (52). Предположим теперь, что $\lambda = \frac{1}{2}$. В этом случае собственные числа матрицы (65) имеют вид

$$\mu_{1,2}(t) = \mu_{1,2}t^{-2\rho}\big(1 + o(1)\big), \tag{73}$$

где числа $\mu_{1,2}$ определяются формулой (59). Для фундаментальных решений уравнения (4) при $t \to \infty$ мы получаем асимптотические формулы (61), (62), в которых величину $\int t^{-2\rho}dt$ следует заменить выражением

$$\frac{t^{1-2\rho}}{1-2\rho}\big(1 + o(1)\big). \tag{74}$$

Наконец, если $\lambda \neq \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2$, то собственные числа матрицы (65) имеют асимптотику вида (73), где $\mu_{1,2} = \pm\mathrm{i}\mu$, а величина μ определяется формулой (54). В этом случае фундаментальные решения уравнения (4) при $t \to \infty$ описываются асимптотическими формулами (55), (56), в которых $\int t^{-2\rho}dt$ следует заменить выражением (74). Отметим также, что во всех рассмотренных случаях остаточный член $o(1)$ в формулах (72) и (73) есть величина действительная при достаточно больших t.

Анализируя полученные в этом разделе формулы мы можем заключить следующее. Неограниченные колебания в ИДУ (4) могут существовать, только если $(\lambda = \pm 2)$ и $(\rho \le 1)$ или $(\lambda = \pm 1/2)$ и $(\rho \le 1/2)$. Во всех остальных случаях ненулевые решения уравнения (4) ограничены и не стремятся к нулю при $t \to \infty$.

Заключение

Совершенно аналогично тому, как это было сделано для уравнения (4), можно строить асимптотики при $t \to \infty$ для решений ИДУ вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x + \int\limits_{t_0}^{t} K(t,s)x(s)ds = 0, \qquad t \ge t_0,$$

где ядро $K(t,s)$ допускает следующее представление (вырожденное ядро):

$$K(t,s) = \sum_{j=1}^{n} v_j(t)P_j(t)Q_j(s).$$

Здесь $v_1(t), \dots, v_n(t)$ — скалярные абсолютно непрерывные на $[t_0, \infty)$ функции такие, что

1^0. $v_1(t) \to 0, v_2(t) \to 0, \dots, v_n(t) \to 0$ при $t \to \infty$;

2^0. $\dot v_1(t), \dot v_2(t), \dots, \dot v_n(t) \in L_1[t_0, \infty)$;

3^0. Произведение $v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)\dots v_{i_{k+1}}(t) \in L_1[t_0,\infty)$ для любого набора $1 \le i_1 \le i_2 \le \dots \le i_{k+1} \le n$.

Относительно функций $P_j(t)$ и $Q_j(s)$ предполагается, что они или являются периодическими с одним и тем же периодом или представляют собой тригонометрические многочлены.

Список литературы / References

[1] Беллман Р., *Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений*, ИЛ, М., 1954; English transl.: [Bellman R., *Stability theory of differential equations*, McGraw-Hill, New York, 1953.]

[2] Бурд В. Ш., Каракулин В. А., "Асимптотическое интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами", *Матем. заметки*, **64**:5 (1998), 658–666; English transl.: [Burd V. Sh., Karakulin V. A., "On the asymptotic integration of systems of linear differential equations with oscillatory decreasing coefficients", *Math. Notes*, **64**:5 (1998), 571–578.]

[3] Коддингтон Э. А., Левинсон Н., *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, ИЛ, М., 1958; English transl.: [Coddington E. A., Levinson N., *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill, New York, 1955.]

[4] Нестеров П. Н., "Метод усреднения в задаче асимптотического интегрирования систем с колебательно убывающими коэффициентами", *Дифференц. уравнения*, **43**:6 (2007), 731–742; English transl.: [Nesterov P. N., "Averaging method in the asymptotic integration problem for systems with oscillatory-decreasing coefficients", *Differ. Equ.*, **43**:6 (2007), 745–756.]

[5] Нестеров П. Н., Агафончиков Е. Н., "Особенности колебания решений адиабатических осцилляторов с запаздыванием", *Модел. и анализ информ. систем*, **20**:5 (2013), 25–44; English transl.: [Nesterov P. N., Agafonchikov E. N., "Specific features of oscillations in adiabatic oscillators with delay", *Automatic Control and Computer Sciences*, **49**:7 (2015), 582–596.]

[6] Burton T. A., *Volterra integral and differential equations*, Elsevier, Amsterdam, 2005.

[7] Eastham M. S. P., *The asymptotic solution of linear differential systems*, Clarendon Press, Oxford, 1989.

[8] Grace S. R., Lalli B. S., "Asymptotic behaviour of certain second order integro-differential equations", *J. Math. Anal. Appl.*, **76** (1980), 84–90.

[9] Harris Jr. W. A., Lutz D. A., "Asymptotic integration of adiabatic oscillators", *J. Math. Anal. Appl.*, **51**:1 (1975), 76–93.

[10] Harris Jr. W. A., Lutz D. A., "A unified theory of asymptotic integration", *J. Math. Anal. Appl.*, **57**:3 (1977), 571–586.

[11] Levinson N., "The asymptotic nature of solutions of linear systems of differential equations", *Duke Math. J.*, **15**:1 (1948), 111–126.

[12] Naulin R., Vanegas C. J., "Asymptotic formulas for the solutions of integro-differential equations", *Acta Math. Hungar.*, **89**:4 (2000), 281–299.

[13] Nesterov P., "Asymptotic integration of functional differential systems with oscillatory decreasing coefficients", *Monatsh. Math.*, **171** (2013), 217–240.

[14] Wintner A., "The adiabatic linear oscillator", *Amer. J. Math.*, **68** (1946), 385–397.

[15] Wintner A., "Asymptotic integration of the adiabatic oscillator", *Amer. J. Math.*, **69** (1946), 251–272.

[16] Yang E. H., "Asymptotic behaviour of certain second order integro-differential equations", *J. Math. Anal. Appl.*, **106** (1985), 132–139.

Nesterov P. N., "Asymptotics for Solutions of Harmonic Oscillator with Integral Perturbation", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:1 (2017), 64–81.

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-1-64-81

Abstract. We construct the asymptotics for solutions of a harmonic oscillator with integral perturbation when the independent variable tends to infinity. The specific feature of the considered integral perturbation is an oscillatory decreasing character of its kernel. We assume that the integral kernel is degenerate. This makes it possible to reduce the initial integro-differential equation to an ordinary differential system. To get the asymptotic formulas for the fundamental solutions of the obtained ordinary differential system, we use a special method proposed for the asymptotic integration of linear dynamical systems with oscillatory decreasing coefficients. By the use of the special transformations we reduce the ordinary differential system to the so called L-diagonal form. We then apply the classical Levinson's theorem to construct the asymptotics for the fundamental matrix of the L-diagonal system. The obtained asymptotic formulas allow us to reveal the resonant frequencies, i. e., frequencies of the oscillatory component of the kernel that give rise to unbounded oscillations in the initial integro-differential equation. It appears that these frequencies differ slightly from the resonant frequencies that occur in the adiabatic oscillator with the sinusoidal component of the time-decreasing perturbation.

Keywords: asymptotics, Volterra integro-differential equations, harmonic oscillator, oscillatory decreasing kernels, method of averaging, Levinson's theorem

On the authors:
Pavel N. Nesterov, orcid.org/0000-0002-9102-9436, PhD,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: nesterov.pn@gmail.com

Acknowledgments:
This research was supported by the grant of the President of the Russian Federation No. MK-4625.2016.1.