Моделирование и анализ информационных систем. Т. 24, №1 (2017), с. 94–110
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 24, No 1 (2017), pp. 94–110

©Невский М. В., Ухалов А. Ю., 2016

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-1-94-110

УДК 514.17+517.51+519.6

Новые оценки числовых величин, связанных с симплексом

Невский М. В., Ухалов А. Ю.

получена 12 октября 2016

Аннотация. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $Q_n = [0,1]^n$. Для невырожденного симплекса $S \subset \mathbb{R}^n$ через σS обозначается результат гомотетии S относительно центра тяжести с коэффициентом гомотетии σ. Под $\xi(S)$ понимается минимальное $\sigma > 0$, такое что $Q_n \subset \sigma S$. Через $\alpha(S)$ обозначается минимальное $\sigma > 0$, при котором Q_n принадлежит трансляту симплекса σS. Через $d_i(S)$ обозначается i-й осевой диаметр S, представляющий собой максимальную длину отрезка, принадлежащего S и параллельного i-й координатной оси. Формулы для $\xi(S)$, $\alpha(S)$, $d_i(S)$ были ранее доказаны первым автором. Положим $\xi_n = \min\{\xi(S) : S \subset Q_n\}$. Всегда $\xi_n \geq n$. Обсуждаются некоторые гипотезы, сформулированные в предыдущих работах. Одной из них является следующее утверждение. *Для любого n существует константа $\gamma > 0$, не зависящая от $S \subset Q_n$, с которой выполняется неравенство $\xi(S) - \alpha(S) \leq \gamma(\xi(S) - \xi_n)$.* Минимальное γ с таким свойством обозначается через $\varkappa_n$. Доказывается, что $\varkappa_1 = \frac{1}{2}$ и при $n > 1$ справедливо $\varkappa_n \geq 1$. Если $n > 1$ и $\xi_n = n$, то $\varkappa_n = 1$. Равенство $\xi_n = n$ выполняется, если $n+1$ — число Адамара, т. е. существует матрица Адамара порядка $n+1$. Последнее утверждение известно; приводится ещё одно его доказательство, непосредственно использующее матрицы Адамара. Доказывается, что $\xi_5 = 5$. Таким образом, существуют такие n, для которых $n+1$ не является числом Адамара и, тем не менее, $\xi_n = n$. Минимальное n с таким свойством равно 5. Это влечёт $\varkappa_5 = 1$ и опровергает гипотезу о характеризации чисел Адамара в терминах гомотетии симплексов, высказанную ранее первым автором: $n+1$ *есть число Адамара тогда и только тогда, когда* $\xi_n = n$. Последнее утверждение оказывается верным лишь в одну сторону. Существует симплекс $S \subset Q_5$, для которого граница симплекса $5S$ содержит все вершины куба Q_5. Указывается однопараметрическое семейство симплексов, принадлежащих Q_5 и обладающих свойством $\alpha(S) = \xi(S) = 5$. Эти симплексы удаётся найти с помощью комбинации численных и символьных вычислений. Новым результатом является неравенство $\xi_6 < 6.0166$. Систематизируются оценки чисел ξ_n, θ_n, $\varkappa_n$, полученные авторами к моменту написания статьи. Здесь θ_n — минимальная величина нормы интерполяционного проектора на пространство линейных функций n переменных как оператора из $C(Q_n)$ в $C(Q_n)$.

Ключевые слова: симплекс, куб, гомотетия, осевой диаметр, интерполяция, проектор, численные методы

Для цитирования: Невский М. В., Ухалов А. Ю., "Новые оценки числовых величин, связанных с симплексом", *Моделирование и анализ информационных систем*, **24**:1 (2017), 94–110.

Об авторах:
Невский Михаил Викторович, orcid.org/0000-0002-6392-7618, доктор физ.-мат. наук, доцент,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: mnevsk55@yandex.ru

Ухалов Алексей Юрьевич, orcid.org/0000-0001-6551-5118, кандидат физ.-мат. наук,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: alex-uhalov@yandex.ru

1. Основные определения и обозначения

Числовые и геометрические характеристики n-мерных выпуклых тел и приложения этих характеристик к задачам полиномиальной интерполяции рассматривались в ряде работ первого автора, а также его монографии [6]. В недавней статье [8] теоретические исследования были дополнены вычислениями с применением специально написанных компьютерных программ. Этот подход позволил авторам улучшить ряд оценок и высказать некоторые предположения. Настоящая статья по своей тематике продолжает эту линию.

Остановимся на основных определениях. Ниже $n \in \mathbb{N}$, Q_n есть n-мерный единичный куб $[0,1]^n$. Для невырожденного симплекса $S \subset \mathbb{R}^n$ под σS понимается результат гомотетии S относительно центра тяжести с коэффициентом σ. Через $d_i(S)$ обозначим *i-й осевой диаметр* S, представляющий собой максимальную длину отрезка, содержащегося в S и параллельного i-й координатной оси. Понятие осевого диаметра выпуклого тела было введено Скоттом [14], [15]. Для многогранника G через $\mathrm{ver}(G)$ обозначается совокупность его вершин.

Для невырожденного симплекса S и выпуклого тела C в $\mathbb{R}^n$ определим

$$\xi(C;S) := \min\{\sigma \geq 1 : C \subset \sigma S\}.$$

Равенство $\xi(C;S) = 1$ эквивалентно включению $C \subset S$. Положим $\xi(S) := \xi(Q_n;S)$. Введём в рассмотрение величину

$$\xi_n := \min\{\xi(S) :\ S \text{ — } n\text{-мерный симплекс}, S \subset Q_n,\ \mathrm{vol}(S) \neq 0\}.$$

Через $\alpha(S)$ обозначим минимальное $\sigma > 0$, для которого Q_n принадлежит трансляту симплекса σS.

Ниже $C(Q_n)$ есть пространство непрерывных функций $f : C(Q_n) \to \mathbb{R}$ с равномерной нормой

$$\|f\|_{C(Q_n)} := \max_{x \in Q_n} |f(x)|,$$

$\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ — совокупность многочленов от n переменных степени ≤ 1 (линейных функций n переменных). Запись $L(n) \asymp M(n)$ означает, что существуют константы $c_1, c_2 > 0$, не зависящие от n, с которыми выполняется $c_1 M(n) \leq L(n) \leq c_2 M(n)$.

2. Вычисление и оценки числовых характеристик n-мерного симплекса

Пусть S — невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$ с вершинами $x^{(j)} = \left(x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}\right)$, $1 \leq j \leq n+1$. Рассмотрим матрицу

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \ldots & x_n^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & \ldots & x_n^{(2)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n+1)} & \ldots & x_n^{(n+1)} & 1 \end{pmatrix}.$$

Положим $\mathbf{A}^{-1} = (l_{ij})$. Обозначим через λ_j многочлен из $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$, коэффициенты которого составляют j-й столбец $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\lambda_j(x) = l_{1j}x_1 + \ldots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j}.$$

Многочлены λ_j обладают свойством $\lambda_j\left(x^{(k)}\right) = \delta_j^k$, где δ_j^k — символ Кронекера. Для $x \in \mathbb{R}^n$ числа $\lambda_j(x)$ являются *барицентрическими координатами* точки x относительно S. Многочлены λ_j имеют приложения, связанные с линейной интерполяцией функций n переменных по узлам, совпадающим с вершинами S. Мы называем λ_j *базисными многочленами Лагранжа,* соответствующими симплексу S. Подробнее о свойствах этих многочленов см. [6; гл. 1].

В [4] установлено, что i-й осевой диаметр S удовлетворяет равенству

$$\frac{1}{d_i(S)} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|\,. \tag{1}$$

Этот результат обобщается на максимальный в симплексе отрезок, параллельный произвольному вектору $v \neq 0$ (см. [7]).

Приведём формулы для вычисления введённых выше числовых характеристик, определённых посредством гомотетии. Пусть S — невырожденный симплекс, C — выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$. В [6; § 1.3] доказано, что если $C \not\subset S$, то

$$\xi(C;S) = (n+1)\max_{1\le k\le n+1}\max_{x\in C}(-\lambda_k(x)) + 1. \tag{2}$$

Соотношение

$$\max_{x\in C}(-\lambda_1(x)) = \ldots = \max_{x\in C}(-\lambda_{n+1}(x)) \tag{3}$$

эквивалентно тому, что симплекс $\xi(S)S$ описан вокруг C, т. е. каждая $(n-1)$-мерная грань этого симплекса содержит точку C. В случае $C = Q_n$ равенство (2) приводится к виду

$$\xi(S) = (n+1)\max_{1\le k\le n+1}\max_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)}(-\lambda_k(x)) + 1, \tag{4}$$

а (3) эквивалентно соотношению

$$\max_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)}(-\lambda_1(x)) = \ldots = \max_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)}(-\lambda_{n+1}(x))\,. \tag{5}$$

Для произвольного невырожденного симплекса S справедливо равенство

$$\alpha(S) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i(S)}. \tag{6}$$

В статье [13] (см. также [6; гл. 1]) даются два доказательства, а также ряд интересных следствий этого равенства.

Пусть $x^{(j)} \in Q_n$ — вершины невырожденного симплекса S. Интерполяционный проектор $P : C(Q_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ по набору узлов $x^{(j)}$ определяется равенствами $Pf\left(x^{(j)}\right) = f\left(x^{(j)}\right)$, $1 \le j \le n+1$. Норма проектора P как оператора из $C(Q_n)$ в $C(Q_n)$ вычисляется по формуле

$$\|P\| = \max_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)}\sum_{j=1}^{n+1}|\lambda_j(x)|.$$

Обозначим через θ_n минимальную величину $\|P\|$.

В [5] доказано, что для любого проектора P и соответствующего ему симплекса S справедливы соотношения

$$\frac{n+1}{2n}\left(\|P\|-1\right)+1 \le \xi(S) \le \frac{n+1}{2}\left(\|P\|-1\right)+1 \tag{7}$$

и дано необходимое и достаточное условие того, что правое соотношение является равенством. Из (7) следует, что для любого n

$$\frac{n+1}{2n}\left(\theta_n-1\right)+1 \le \xi_n \le \frac{n+1}{2}\left(\theta_n-1\right)+1. \tag{8}$$

Подробнее о соотношениях (7), (8) и их обобщениях см. [2], [3], [5], [6]. Начиная с некоторого n, правое неравенство в (8) становится строгим. Однако для $n=1,2,3,7$ оно обращается в равенство. По предположению авторов (см. [8]), минимальное n, при котором $\xi_n < \frac{n+1}{2}\left(\theta_n-1\right)+1$, равно 4.

Если $S \subset Q_n$, то $d_i(S) \le 1$. Из равенства (6) сразу следует, что

$$n \le \alpha(S) \le \xi(S). \tag{9}$$

Если $\xi(S)=n$, то (9) даёт $\alpha(S)=\xi(S)$. Последнее равенство эквивалентно тому, что симплекс $\xi(S)S$ описан вокруг Q_n, и также эквивалентно (5).

Применяя (8) и (9), имеем

$$\xi_n \ge n, \quad \theta_n \ge 3-\frac{4}{n+1}. \tag{10}$$

Первым автором доказаны соотношения $\theta_n \asymp n^{1/2}$, $\xi_n \asymp n$. Если $n+1$ — число Адамара, то $\xi_n=n$ (одно из доказательств этого утверждения приводится в п. 4 настоящей статьи). Большой материал, посвящённый числам ξ_n и θ_n, содержится в [6]. Отметим здесь общие оценки

$$n \le \xi_n \le \frac{n^2-3}{n-1} \quad (n>2); \qquad \frac{1}{4}\sqrt{n} < \theta_n < 3\sqrt{n}.$$

Были получены оценки и для конкретных n. Некоторые из них были улучшены в первой статье авторов [8]. В настоящей статье мы приведём новые оценки и систематизируем материал, имеющийся к данному моменту.

3. Об одном неравенстве для $\xi(S)$ и $\alpha(S)$

В этом пункте мы сначала докажем две теоремы.

Теорема 1. *Для любого невырожденного отрезка $S \subset Q_1$ выполняется неравенство*

$$\xi(S)-\alpha(S) \le \frac{1}{2}\Big(\xi(S)-\xi_1\Big) \tag{11}$$

с точной константой $\frac{1}{2}$.

Доказательство. Пусть $S = [x_1, x_2]$, $0 \le x_1 < x_2 \le 1$. Так как центром S является точка $\frac{x_1+x_2}{2}$, то по определению $\xi(S)$ имеем:

$$\xi(S) = \min\{\sigma \ge 1 : [0,1] \subset \sigma S\} = \max\left\{\frac{1-\frac{x_1+x_2}{2}}{x_2-\frac{x_1+x_2}{2}}, \frac{0-\frac{x_1+x_2}{2}}{x_1-\frac{x_1+x_2}{2}}\right\} =$$

$$= \frac{\max\{2-(x_1+x_2), x_1+x_2\}}{x_2-x_1}. \tag{12}$$

Тот же результат даёт и применение общей формулы (4). В нашем случае

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{x_1-x_2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -x_2 & x_1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_1(x) = \frac{x-x_2}{x_1-x_2}, \quad \lambda_2(x) = \frac{-x+x_1}{x_1-x_2}.$$

В соответствии с (4)

$$\xi(S) = 2\max\{-\lambda_1(0), -\lambda_1(1), -\lambda_2(0), -\lambda_2(1)\} + 1 =$$

$$= 2\max\left\{\frac{x_2}{x_1-x_2}, \frac{-1+x_2}{x_1-x_2}, \frac{-x_1}{x_1-x_2}, \frac{1-x_1}{x_1-x_2}\right\} + 1 =$$

$$= 2\max\left\{\frac{1-x_2}{x_2-x_1}, \frac{x_1}{x_2-x_1}\right\} + 1 = \frac{\max\{2-(x_1+x_2), x_1+x_2\}}{x_2-x_1},$$

что совпадает с (12). Заметим, что числитель последней дроби всегда ≥ 1, а знаменатель ≤ 1, причём они обращаются в 1 лишь при $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Это соответствует тому, что всегда $\xi(S) \ge 1$, причём $\xi(S) = 1$ только в случае $S = [0,1] = Q_1$.

Пусть $d(S)$ — осевой диаметр S. Очевидно, $d(S) = x_2 - x_1$, значит,

$$\alpha(S) = \frac{1}{d(S)} = \frac{1}{x_2-x_1}.$$

Поскольку $\xi_1 = 1$, то (11) записывается в виде

$$\frac{\max\{2-(x_1+x_2), x_1+x_2\}}{x_2-x_1} - \frac{1}{x_2-x_1} \le \frac{1}{2}\left(\frac{\max\{2-(x_1+x_2), x_1+x_2\}}{x_2-x_1} - 1\right). \tag{13}$$

Это эквивалентно неравенству

$$\max\{2-(x_1+x_2), x_1+x_2\} \le 2 - x_2 + x_1. \tag{14}$$

Как нетрудно видеть, (14) равносильно системе неравенств $x_1 \ge 0$, $x_2 \le 1$. Поэтому справедливо каждое из неравенств (14), (13) и (11).

Остаётся заметить, что константа $\frac{1}{2}$, стоящая в правой части (11), является точной (неуменьшаемой). Действительно, для $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}$, т. е. $S = [0, \frac{1}{2}]$, каждое из неравенств (14), (13) и (11) обращается в равенство. Теорема доказана. □

График функции $\varkappa(x_1, x_2) = \frac{\xi(x_1,x_2)-\alpha(x_1,x_2)}{\xi(x_1,x_2)-\xi_1}$ для $x_1, x_2 \in [0,1]$ приведен на рис. 1.

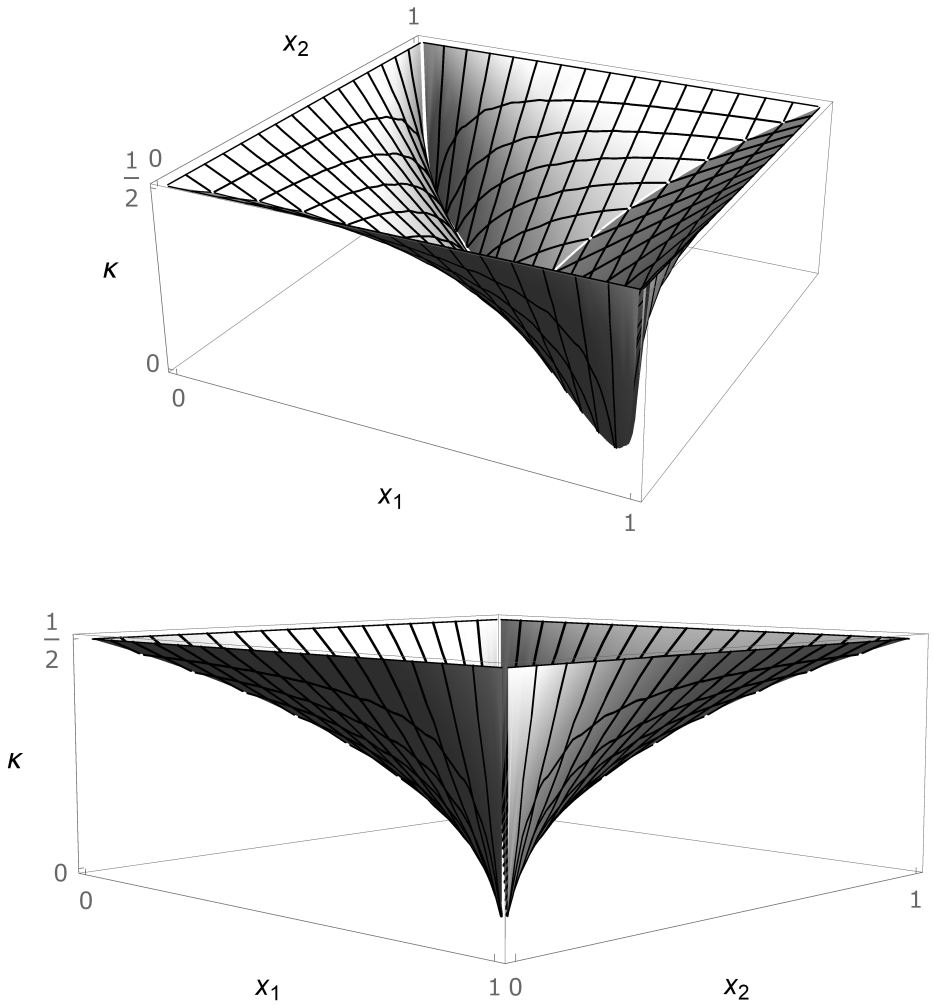

Рис. 1: Поверхность $\varkappa = \varkappa(x_1, x_2) = \frac{\xi(x_1,x_2)-\alpha(x_1,x_2)}{\xi(x_1,x_2)-\xi_1}$ для $x_1, x_2 \in [0, 1]$
Fig. 1: Surface $\varkappa = \varkappa(x_1, x_2) = \frac{\xi(x_1,x_2)-\alpha(x_1,x_2)}{\xi(x_1,x_2)-\xi_1}$ for $x_1, x_2 \in [0, 1]$

Теорема 2. *Пусть $n > 1$. Предположим, что существует константа $\gamma > 0$, такая что для любого невырожденного симплекса $S \subset Q_n$ справедливо неравенство*

$$\xi(S) - \alpha(S) \le \gamma \big(\xi(S) - \xi_n\big). \tag{15}$$

Тогда $\gamma \ge 1$. Если $\xi_n = n$, то точное значение γ равно 1.

Доказательство. Пусть S — *угловой* симплекс с вершинами $(1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $(0, 0, \dots, 1)$, $(0, 0, \dots, 0)$. Для этого симплекса в обозначениях п. 2

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_j(x) = x_j, \quad 1 \le j \le n; \quad \lambda_{n+1}(x) = -\sum_{j=1}^{n} x_j + 1.$$

Вычислим $\xi(S)$ по формуле (4):

$$\xi(S) = (n+1) \max_{1 \le k \le n+1} \max_{x \in \mathrm{ver}(Q_n)} (-\lambda_k(x)) + 1 =$$

$$= -(n+1)\lambda_{n+1}(1, \ldots, 1) + 1 = (n+1)(n-1) + 1 = n^2.$$

Очевидно, $d_i(S) = 1$, поэтому

$$\alpha(S) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(S)} = n.$$

Применяя к S неравенство (15), получим $n^2 - n \le \gamma(n^2 - \xi_n)$. При любом n выполняется $\xi_n \ge n$, поэтому, тем более, справедливо и неравенство $n^2 - n \le \gamma(n^2 - n)$. Так как $n > 1$, то отсюда следует $\gamma \ge 1$.

Интересно заметить, что это рассуждение не подходит к случаю $n = 1$, когда $n^2 - n = 0$. Одномерный случай — единственный, в котором симплекс S совпадает с кубом Q_n. Этот случай специально рассмотрен выше (см. теорему 1).

Предположим теперь, что $n > 1$ и $\xi_n = n$. Поскольку для любого $S \subset Q_n$ верны неравенства (9), то имеет место соотношение

$$\xi(S) - \alpha(S) \le \xi(S) - n = \xi(S) - \xi_n.$$

Таким образом, в этой ситуации неравенство (15) выполняется с константой 1. Из предыдущего следует, что эту константу, общую для всех S, уменьшить нельзя. Поэтому в случае $\xi_n = n > 1$ точное значение γ равно 1.

Теорема доказана. □

Теперь приведём две гипотезы о числах $\xi(S)$ и $\alpha(S)$, впервые сформулированные в [5] (см. также [6; § 3.10] и [8]).

(H1) *Пусть $S \subset Q_n$ — невырожденный n-мерный симплекс. Если $\xi(S) = \xi_n$, то $\xi(S) = \alpha(S)$.*

(H2) *Для любого n существует константа $\gamma > 0$, такая что для каждого невырожденного симплекса $S \subset Q_n$ выполняется неравенство* (15).

Для $n = 1, 2, 3$ полное описание симплексов с условием $\xi(S) = \xi_n$ дано в работах первого автора (см. [6; гл. 1].) Для каждого из них $\xi(S) = \alpha(S)$. Справедливость (H1) для $n = 4$ пока не ясна, но вычисления, приведённые в [8], означают, что в четырёхмерной ситуации эта гипотеза, по-видимому, верна.

Если $\xi_n = n$, то в силу соотношений $n \le \alpha(S) \le \xi(S)$ (см.(9)) условие $\xi(S) = \xi_n$ сразу даёт $\xi(S) = \alpha(S)$. Поэтому утверждение (H1) верно для всех n, при которых $\xi_n = n$. К этой совокупности относятся, в частности, те n, для которых $n + 1$ — число Адамара (см. п. 4), но не только они. Например, как будет доказано ниже, $\xi_5 = 5$; следовательно, (H1) верно для $n = 5$.

Очевидно, из справедливости (H2) следует справедливость (H1). Обозначим через $\varkappa_n$ минимальное $\gamma > 0$, с которым (15) выполняется для любого невырожденного симплекса $S \subset Q_n$. Иными словами, $\varkappa_n$ есть точная константа в неравенстве

$$\xi(S) - \alpha(S) \le \varkappa_n \big(\xi(S) - \xi_n\big), \quad S \subset Q_n.$$

Утверждение (H2) равносильно свойству: *для любого* n

$$\varkappa_n := \sup_{S \subset Q_n} \frac{\xi(S) - \alpha(S)}{\xi(S) - \xi_n} < \infty. \tag{16}$$

Точная верхняя грань в (16) берётся по совокупности симплексов S, содержащихся в Q_n и таких, что $\xi(S) \ne \xi_n$.

В настоящей работе в определении $\varkappa_n$ мы снимаем ограничение $\varkappa_n \ge 1$, которое присутствовало в [5], [6] и [8]. Это изменение сказывается только на значении $\varkappa_1$. Теперь в соответствии с теоремой 1 имеем $\varkappa_1 = \frac{1}{2}$; для $n > 1$ из теоремы 2 следует, что $\varkappa_n \ge 1$. Если же $n > 1$ таково, что $\xi_n = n$, то $\varkappa_n = 1$. Это выполняется, в частности, когда $n + 1$ — число Адамара, большее 2.

В статье [8] с помощью компьютерных методов установлено, что

$$\varkappa_2 = \frac{5 + 2\sqrt{5}}{3} = 3.1573\ldots$$

(это подтверждает гипотезу, высказанную первым автором в [5]). На основе вычислений высказано предположение, что

$$\varkappa_4 = \frac{4 + \sqrt{13}}{5} = 1.5211\ldots$$

В настоящей статье мы покажем, что $\varkappa_5 = 1$.

4. Если $n + 1$ — число Адамара, то $\xi_n = n$

Матрицей Адамара порядка m называется невырожденная $(m \times m)$-матрица $\mathbf{H}_m$, каждый элемент которой равен 1 или -1 и такая, что

$$\mathbf{H}_m^{-1} = \frac{1}{m}\mathbf{H}_m^T.$$

Некоторые сведения о матрицах Адамара содержатся в монографии Холла [9]. Если $\mathbf{H}_m$ существует, то $m = 1$, $m = 2$ или m кратно 4. Для бесконечного множества чисел вида $m = 4k$, включая степени $m = 2^l$, существование $\mathbf{H}_m$ давно установлено. Наименьшее m, для которого неизвестно, существует ли матрица Адамара порядка m, с 1985 г. равняется 428. Если для натурального m матрица Адамара существует, то m будем называть *числом Адамара* или *адамаровым числом.*

В случае, когда $n+1$ — число Адамара, и только тогда, существует правильный симплекс S, вписанный в Q_n таким образом, что его вершины находятся в вершинах Q_n (см. [10; теорема 4.5]). В статье [5] и монографии [6; § 3.2] разными способами доказано, что $\xi(S) = n$, что даёт $\xi_n = n$. Мы приведём здесь иное, нежели в [5] и [6], доказательство этого факта, непосредственно связанное с матрицами Адамара. Это доказательство мы дополним другими сведениями о симплексе S.

Теорема 3. *Пусть $n+1$ — число Адамара, S — правильный симплекс, вписанный в куб Q_n. Тогда $\xi_n = \xi(S) = n$.*

Доказательство. Пользуясь соображениями подобия, будем решать задачу для куба $Q'_n := [-1,1]^n$. Так как число $n+1$ — адамарово, существует *нормализованная матрица Адамара* порядка $n+1$, т. е. такая, у которой первая строка и первый столбец состоят из 1 (см. [9; гл. 14]). Запишем строки этой матрицы в обратном порядке и рассмотрим получившуюся матрицу

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

которая также будет матрицей Адамара порядка $n+1$. Пусть S' — n-мерный симплекс, координаты вершин которого записаны в первых n позициях строк $\mathbf{H}$. Очевидно, вершины S' совпадают с некоторыми вершинами Q'_n, следовательно, этот симплекс вписан в куб. Покажем, что симплекс S' является правильным, причём длина любого его ребра равна $\sqrt{2(n+1)}$. Пусть a, b — две различные строки $\mathbf{H}$. Поскольку $\mathbf{H}$ состоит из ± 1, имеем $\|a\|^2 = \|b\|^2 = n+1$. В силу попарной ортогональности строк матрицы Адамара

$$\|a-b\|^2 = (a-b, a-b) = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2(a,b) = 2(n+1).$$

Обозначим через u и w вершины S, которые получаются соответственно из a и b отбрасыванием последней компоненты, равной 1. Ясно, что n-мерная длина вектора $u-w$ совпадает с $(n+1)$-мерной длиной вектора $a-b$, т. е. также равна $\sqrt{2(n+1)}$.

Обозначим через λ_j базисные многочлены Лагранжа, соответствующие симплексу S'. В силу равенства $\mathbf{H}^{-1} = \frac{1}{n+1}\mathbf{H}^T$ коэффициенты многочленов $(n+1)\lambda_j$ содержатся в строках $\mathbf{H}$. Свободные члены этих многочленов попадают в последний столбец $\mathbf{H}$ и поэтому равны 1. Значит, свободные члены многочленов $-(n+1)\lambda_j$ равны -1. По этой причине при любом $j = 1, \dots, n+1$ выполняется равенство

$$(n+1) \max_{x \in \mathrm{ver}(Q'_n)} (-\lambda_j(x)) = n-1.$$

Так как коэффициенты многочленов $-(n+1)\lambda_j$ равны ± 1, то для любого j вершина v куба Q'_n, для которой справедливо $(n+1)(-\lambda_j(v)) = n-1$, является единственной. Именно, $v = (v_1, \dots, v_n)$ определяется равенствами $v_i = -\mathrm{sign}\, l_{ij}$, где l_{ij} — коэффициенты многочлена λ_j.

Теперь вычислим $\xi(Q'_n; S')$, применяя формулу (4) с заменой Q_n на Q'_n. Как и (4), эта формула следует из равенства (2) для произвольного выпуклого тела C. С учётом предыдущего имеем

$$\xi(Q'_n; S') = (n+1) \max_{1 \le j \le n+1} \max_{x \in \mathrm{ver}(Q'_n)} (-\lambda_j(x)) + 1 = n - 1 + 1 = n.$$

Пусть S — вписанный в Q_n правильный симплекс, который соответствует S' при преобразовании подобия, переводящем Q'_n в Q_n. Тогда $\xi(S) = \xi(S'; Q'_n) = n$. Отсюда

следует, что если $n+1$ — адамарово, то $\xi_n \le n$. Как отмечалось выше (см.(10)), для любого n верна и противоположная оценка $\xi_n \ge n$. Поэтому $\xi_n = \xi(S) = n$. Так как коэффициент подобия при преобразовании Q'_n в Q_n равен $\frac{1}{2}$, то длина любого ребра S равна $\sqrt{\frac{n+1}{2}}$.

Заметим, что из соотношения

$$\max_{x\in \mathrm{ver}(Q'_n)} (-\lambda_1(x)) = \ldots = \max_{x\in \mathrm{ver}(Q'_n)} (-\lambda_{n+1}(x)) = \frac{n-1}{n+1}$$

следует, что симплекс nS' описан вокруг куба Q'_n. Наше рассуждение также показывает, что каждая $(n-1)$-мерная грань nS' содержит лишь одну вершину Q'_n. Значит, симплекс nS аналогичным образом описан вокруг куба Q_n. Поскольку nS описан вокруг Q_n, имеем $\alpha(S) = \xi(S) = n$ и $d_i(S) = 1$. Эти равенства также следуют из оценки $n \le \alpha(S) \le \xi(S)$ и того, что $\xi(S) = n$. Наконец, равенства $d_i(S) = 1$ и $\alpha(S) = n$ вытекают и из того, что правильный симплекс S, вписанный в Q_n, имеет максимальный объём (см. [10]), а для любого симплекса в Q_n максимального объёма все осевые диаметры равны 1. Это свойство симплекса максимального объёма, впервые доказанное Лассаком [11], выводится и из равенства (6) (см. [6; § 1.6]).

Теорема доказана. □

Первый автор в статье [5] (см. также [6; § 3.10]) предположил, что верно и утверждение, обратное к теореме 3: *если $\xi_n = n$, то $n+1$ — число Адамара.* В связи с этим в [5] была высказана гипотеза, содержащая необходимое и достаточное условия того, что число $n+1$ является адамаровым. Эта гипотеза в 2011 г. была сформулирована в терминах гомотетии симплексов, содержащихся в Q_n:

(H3) *Число $n+1$ является числом Адамара тогда и только тогда, когда $\xi_n = n$.*

Однако позднее выяснилось, что утверждение, обратное к теореме 3, а значит, и гипотеза (H3) не верны. Компьютерные вычисления, проделанные в 2016 г. вторым автором, позволили доказать, что существуют такие n, для которых $\xi_n = n$ и число $n+1$ не является адамаровым. Минимальное n с таким свойством равно 5. Это свойство описывается в следующем пункте.

5. Точное значение ξ_5

Напомним, что Q_5 обозначает куб $[0,1]^5$.

Теорема 4. *Существует симплекс $S \subset Q_5$, такой что симплекс $5S$ описан вокруг куба Q_5, причём граница симплекса $5S$ содержит все вершины куба.*

Доказательство. Пусть $S \subset \mathbb{R}^5$ — симплекс с вершинами $\left(1, \frac{1}{3}, 0, 0, \frac{47}{100}\right)$, $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, \frac{47}{100}\right)$, $\left(0, 0, \frac{5}{9}, \frac{2}{3}, \frac{59}{100}\right)$, $\left(0, 1, \frac{5}{9}, \frac{2}{3}, 0\right)$, $\left(0, 1, \frac{5}{9}, \frac{2}{3}, 1\right)$, $\left(1, \frac{1}{3}, 1, 0, \frac{47}{100}\right)$. Очевидно, $S \subset Q_5$. Легко убедиться, что центр тяжести S есть точка $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^{-1}$ для симплекса S имеют вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{47}{100} & 1 \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & \frac{47}{100} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{9} & \frac{2}{3} & \frac{59}{100} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{9} & \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{9} & \frac{2}{3} & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{3} & 1 & 0 & \frac{47}{100} & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{77}{300} & -\frac{23}{300} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{41}{100} & \frac{59}{100} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 1 & \frac{59}{100} & -\frac{59}{100} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Выпишем для S базисные многочлены Лагранжа:

$$\lambda_1(x) = -x_3 - \frac{2}{3}\,x_4 + 1, \qquad \lambda_2(x) = \frac{2}{3}\,x_1 + x_4 - \frac{2}{3},$$
$$\lambda_3(x) = -\frac{2}{3}\,x_1 - x_2 + 1, \qquad \lambda_4(x) = -\frac{77}{300}\,x_1 + \frac{41}{100}\,x_2 - x_5 + \frac{59}{100},$$
$$\lambda_5(x) = -\frac{23}{300}\,x_1 + \frac{59}{100}\,x_2 + x_5 - \frac{59}{100}, \qquad \lambda_6(x) = \frac{1}{3}\,x_1 + x_3 - \frac{1}{3}\,x_4 - \frac{1}{3}.$$

Величину $\xi(S)$ найдём с помощью формулы (4). Непосредственные вычисления показывают, что

$$\max_{1\le k\le 6}\ \max_{x\in \mathrm{ver}(Q_5)} (-\lambda_k(x)) = \frac{2}{3}. \tag{17}$$

Применяя (4), получим

$$\xi(S) = 6 \max_{1\le k\le 6}\ \max_{x\in \mathrm{ver}(Q_5)} (-\lambda_k(x)) + 1 = 6\cdot\frac{2}{3} + 1 = 5.$$

Так как $\xi(S) = 5$, что совпадает с размерностью пространства, то $\alpha(S) = \xi(S)$ (см. п. 1). Поэтому симплекс $5S$ описан вокруг куба Q_5. Так как $\alpha(S) = 5$, то в силу (6) все осевые диаметры симплекса S равны 1.

Максимум (17) достигается следующим образом: при $k = 1$ — на вершинах $(0,0,1,1,0)$, $(0,0,1,1,1)$, $(0,1,1,1,0)$, $(0,1,1,1,1)$, $(1,0,1,1,0)$, $(1,0,1,1,1)$, $(1,1,1,1,0)$, $(1,1,1,1,1)$; при $k = 2$ — на вершинах $(0,0,0,0,0)$, $(0,0,0,0,1)$, $(0,0,1,0,0)$, $(0,0,1,0,1)$, $(0,1,0,0,0)$, $(0,1,0,0,1)$, $(0,1,1,0,0)$, $(0,1,1,0,1)$; при $k = 3$ — на вершинах $(1,1,0,0,0)$, $(1,1,0,0,1)$, $(1,1,0,1,0)$, $(1,1,0,1,1)$, $(1,1,1,0,0)$, $(1,1,1,0,1)$, $(1,1,1,1,0)$, $(1,1,1,1,1)$; при $k = 4$ — на вершинах $(1,0,0,0,1)$, $(1,0,0,1,1)$, $(1,0,1,0,1)$, $(1,0,1,1,1)$; при $k = 5$ — на вершинах $(1,0,0,0,0)$, $(1,0,0,1,0)$, $(1,0,1,0,0)$, $(1,0,1,1,0)$; при $k = 6$ — на вершинах $(0,0,0,1,0)$, $(0,0,0,1,1)$, $(0,1,0,1,0)$, $(0,1,0,1,1)$. Таким образом, выполняется соотношение (5), которое здесь имеет вид

$$\max_{x\in \mathrm{ver}(Q_5)} (-\lambda_1(x)) = \ldots = \max_{x\in \mathrm{ver}(Q_5)} (-\lambda_6(x)) = \frac{2}{3}.$$

Это также эквивалентно тому, что симплекс $5S$ описан вокруг куба Q_5.

Заметим теперь, что приведённый выше список вершин куба, на которых достигается максимум (17), содержит все вершины Q_5. Следовательно, $(n-1)$-мерные

грани симплекса $5S$, составляющие его границу, содержат все вершины куба. Последний результат может быть получен и посредством вычисления многочленов Лагранжа симплекса $5S$.

Теорема доказана. □

Следствие 1. *Справедливо равенство* $\xi_5 = 5$.

Доказательство. Пусть S — симплекс из условия теоремы 4. Тогда $\xi_5 \le \xi(S) = 5$. В силу (10) справедлива и обратная оценка $\xi_5 \ge 5$. Поэтому $\xi_5 = 5$. □

Следствие 2. *Имеет место равенство* $\varkappa_5 = 1$.

Доказательство. Сразу следует из теоремы 2 и определения $\varkappa_5$. □

Симплекс S, использованный при доказательстве теоремы 4, не является единственным симплексом, содержащимся в Q_5, для которого $\xi(S) = 5$.

Рассмотрим симплекс $R = R(t)$ с вершинами $(1,0,0,0,1)$, $(1,1,t,1,0)$, $(0,0,1-t,1,0)$, $(0,1,t,0,0)$, $(0,1,1-t,1,1)$, $(1,0,1,0,1)$. Заметим, что при любом t центром симплекса R является точка $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Матрица $\mathbf{A}(t)$ для симплекса R имеет вид

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & t & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-t & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & t & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1-t & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для вычисления определителя матрицы $\mathbf{A}(t)$ удобно вычесть из первой строки последнюю и разложить полученный определитель по первой строке.

$$\det(\mathbf{A}(t)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & t & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-t & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & t & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1-t & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & t & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-t & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & t & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1-t & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Таким образом, объем симплекса R не зависит от t:

$$\mathrm{vol}(R) = \frac{|\det(\mathbf{A}(t))|}{5!} = \frac{1}{40},$$

поэтому R является невырожденным. Для $t \in [0,1]$ симплекс R принадлежит Q_5.

Теорема 5. *При* $t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ *справедливы равенства* $\alpha(R) = \xi(R) = 5$. *Иначе говоря, при* $\frac{1}{3} \le t \le \frac{2}{3}$ *симплекс* $5R$ *описан вокруг куба* Q_5.

Доказательство. Для симплекса R матрица $[\mathbf{A}(t)]^{-1}$ имеет вид

$$[\mathbf{A}(t)]^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3t-1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 2-3t \\ 3t-2 & 1 & -2 & 1 & 1 & 1-3t \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1-3t & 1 & 1 & -2 & 1 & 3t-2 \\ 2-3t & -1 & -1 & -1 & 2 & 3t-1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому базисные многочлены Лагранжа симплекса R суть

$$\mu_1(x) = \frac{1}{3}\big((3t-1)\,x_1 + (3t-2)\,x_2 - 3x_3 + (1-3t)\,x_4 + (2-3t)\,x_5 + 2\big),$$

$$\mu_2(x) = \frac{1}{3}\big(2x_1 + x_2 + x_4 - x_5 - 1\big), \qquad \mu_3(x) = \frac{1}{3}\big(-x_1 - 2x_2 + x_4 - x_5 + 2\big),$$
$$\mu_4(x) = \frac{1}{3}\big(-x_1 + x_2 - 2x_4 - x_5 + 2\big), \qquad \mu_5(x) = \frac{1}{3}\big(-x_1 + x_2 + x_4 + 2x_5 - 1\big),$$

$$\mu_6(x) = \frac{1}{3}\big((2-3t)\,x_1 + (1-3t)\,x_2 + 3x_3 + (3t-2)\,x_4 + (3t-1)\,x_5 - 1\big).$$

По формулам (1) и (6) п. 2 находим величины $d_i(R)$ и $\alpha(R)$:

$$d_i(R) = \frac{6}{|1-3t| + |2-3t| + 5} \quad \text{для } i = 1,2,4,5; \quad d_3(R) = 1;$$

$$\alpha(R) = \frac{2}{3}\left(|1-3t| + |2-3t| + \frac{13}{2}\right).$$

При $t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ выполняются равенства $d_i(R) = 1$ $(i = 1, \ldots, 5)$ и, следовательно,

$$\alpha(R) = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{d_i(R)} = 5.$$

Теперь вычислим $\xi(R)$. Заметим, что справедливы соотношения

$$\max_{x \in \mathrm{ver} Q_5} (-\mu_2(x)) = \max_{x \in \mathrm{ver} Q_5} (-\mu_3(x)) = \max_{x \in \mathrm{ver} Q_5} (-\mu_4(x)) = \max_{x \in \mathrm{ver} Q_5} (-\mu_5(x)) = \frac{2}{3},$$

$$\max_{x \in \mathrm{ver} Q_5} (-\mu_1(x)) = \max_{x \in \mathrm{ver} Q_5} (-\mu_6(x)) = \max\left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{3} - 2t, 1-t, t, 2t - \frac{2}{3}\right\}.$$

Применяя (4), получаем следующее выражение для $\xi(R)$:

$$\xi(R) = 6 \max_{1 \le k \le 6} \max_{x \in \mathrm{ver} Q_5} (-\mu_k(x)) + 1 = 6 \max\left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{3} - 2t, 1-t, t, 2t - \frac{2}{3}\right\} + 1 =$$

$$= \begin{cases} 5, & \frac{1}{3} \le t \le \frac{2}{3}, \\ 9 - 12t, & t < \frac{1}{3}, \\ 12t - 3, & t > \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Итак, при $\frac{1}{3} \le t \le \frac{2}{3}$ имеем $\alpha(R) = \xi(R) = 5$. Выполнение этих равенств означает, что симплекс $5R$ описан вокруг куба Q_5. Теорема доказана. □

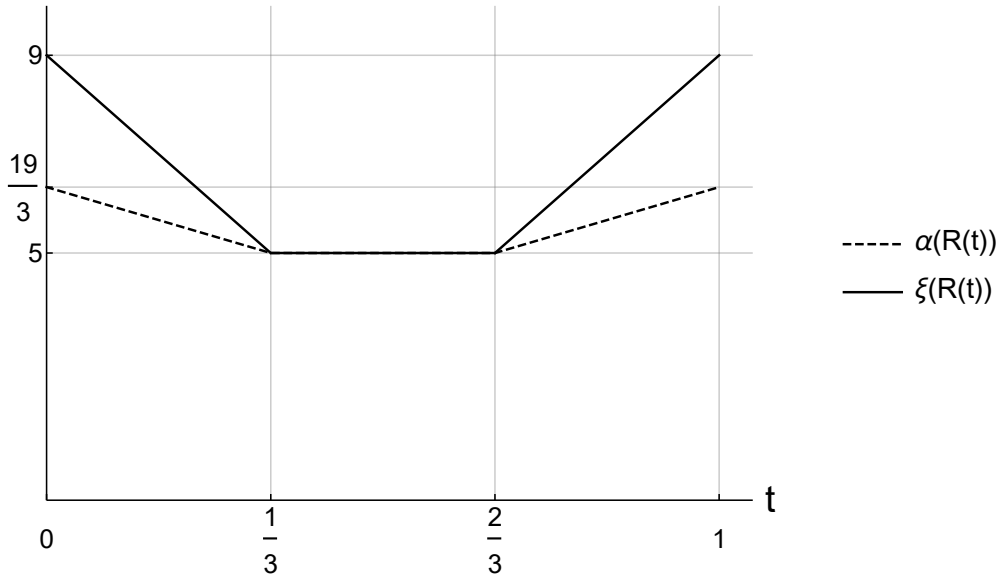

Рис. 2: Графики функций $\alpha(R(t))$ и $\xi(R(t))$
Fig. 2: Graphs of the functions $\alpha(R(t))$ and $\xi(R(t))$

Графики функций $\alpha(R(t))$ и $\xi(R(t))$ при $t \in [0,1]$ приведены на рис. 2.

Симплекс S не принадлежит семейству симплексов R, поскольку S и R имеют различные объемы (именно, $\mathrm{vol}(S) = \frac{1}{120}$, $\mathrm{vol}(R) = \frac{1}{40}$). Симплекс $5R$ при $\frac{1}{3} \le t \le \frac{2}{3}$ описан вокруг куба Q_5. При разных значениях t число вершин куба, принадлежащих границе симплекса $5R$, может быть различным.

Симплексы S и R были найдены с помощью комбинации символьных и численных вычислений. Для этого использовались специально написанные программы на языке Wolfram Language (см., например, [1] и [12]).

6. Уточнение оценки θ_5

В [6; гл. 3] приведена оценка $\frac{7}{3} = 2.33\ldots \le \theta_5 \le 2.6$. С помощью численной минимизации выражения в правой части равенства

$$\|P\| = \max_{x \in \mathrm{ver}(Q_5)} \sum_{j=1}^{6} |\lambda_j(x)|$$

эту оценку нам удалось уточнить. Меньшая верхняя граница θ_5 получается из рассмотрения симплекса S с вершинами $(1,1,1,0.282777,0.662421)$, $(0,0.282777,0.662421,0,1)$, $(0.337578,0,1,1,0.282777)$, $(0,1,0.282777,0.662421,0)$, $(0.717222,0.662421,0,1,1)$, $(1,0,0,0,0)$. Для проектора P по узлам в вершинах S имеем

$$\|P\| = \max_{x \in \mathrm{ver}(Q_5)} \sum_{j=1}^{6} |\lambda_j(x)| = 2.4488039\ldots$$

Максимум достигается на вершине куба $(1, 0, 1, 1, 1)$. Следовательно, справедливы соотношения

$$\frac{7}{3} = 2.33\ldots \leq \theta_5 \leq 2.448804.$$

Таблица 1: Оценки ξ_n, θ_n и $\varkappa_n$
Table 1: Estimates of ξ_n, θ_n, and $\varkappa_n$

n	ξ_n	θ_n	$\varkappa_n$
1	1	1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{3\sqrt{5}}{5} + 1 = 2.34\ldots$	$\frac{2\sqrt{5}}{5} + 1 = 1.89\ldots$	$\frac{5+2\sqrt{5}}{3} = 3.15\ldots$ (?)
3	3	2	1
4	$4 \leq \xi_4 \leq \frac{19+5\sqrt{13}}{9} = 4.11\ldots$ $\xi_4 = \frac{19+5\sqrt{13}}{9} = 4.11\ldots$ (?)	$2.2 \leq \theta_4 \leq \frac{7}{3} = 2.33\ldots$ $\theta_4 = \frac{7}{3} = 2.33\ldots$ (?)	$\frac{4+\sqrt{13}}{5} = 1.52\ldots$ (?)
5	5	$\frac{7}{3} = 2.33\ldots \leq \theta_5 \leq 2.448804$	1
6	$6 \leq \xi_6 < 6.0166$	$\frac{17}{7} = 2.42\ldots \leq \theta_6 \leq 3$	
7	7	2.5	1

7. Уточнение оценки ξ_6

Из общей оценки $n \leq \xi_n \leq \frac{n^2-3}{n-1}$ $(n > 2)$, приведённой в п. 2, следует, что $6 \leq \xi_6 \leq 6.6$. С помощью численной минимизации функции $\xi(S)$ авторам удалось существенно сузить промежуток, содержащий ξ_6. Длина нового промежутка < 0.0166.

Более точная оценка ξ_6 сверху получается из рассмотрения симплекса S с вершинами $(1, 0.657259, 1, 0, 0.823603, 0)$, $(0, 0, 0, 0, 0, 0.490244)$, $(0, 1, 1, 0.176397, 0.657259, 1)$, $(1, 0, 1, 1, 0, 1)$, $(0.490244, 1, 0, 1, 0, 0)$, $(1, 0.823603, 0, 0.342741, 1, 1)$, $(0, 0, 0.490244, 1, 1, 0)$. Вычисления по формулам п. 2 дают значения $\alpha(S) = 6.016585\ldots$, $\xi(S) = 6.016587\ldots$ Таким образом, справедливы неравенства

$$6 \leq \xi_6 < 6.0166.$$

8. Оценки чисел ξ_n, θ_n и $\varkappa_n$

В табл. 1 приводятся оценки первых семи чисел ξ_n, θ_n и $\varkappa_n$, полученные авторами к моменту написания статьи. Таблица содержит результаты работ [6], [8] и настоящей статьи. Для величин, точные значения которых неизвестны, приводятся лучшие из полученных неравенств. Знаком вопроса отмечаются числа, которые, по предположению авторов, являются точными значениями. Эти величины были получены с помощью компьютерных вычислений.

Список литературы / References

[1] Климов В. С., Ухалов А. Ю., *Решение задач математического анализа с использованием систем компьютерной математики*, Ярославль: Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, 2014; [Klimov V. S., Ukhalov A. Yu., *Reshenie zadach matematicheskogo analiza s ispolzovaniem sistem kompyuternoi matematiki*, Yaroslavl: P. G. Demidov Yaroslavl State University, 2014, (in Russian).]

[2] Невский М. В., “Неравенства для норм интерполяционных проекторов”, *Модел. и анализ информ. систем*, **15**:3 (2008), 28–37; [Nevskij M. V., “Inequalities for the norms of interpolating projections”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **15**:3 (2008), 28–37, (in Russian).]

[3] Невский М. В., “Об одном соотношении для минимальной нормы интерполяционного проектора”, *Модел. и анализ информ. систем*, **16**:1 (2009), 24–43; [Nevskij M. V., “On a certain relation for the minimal norm of an interpolational projection”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **16**:1 (2009), 24–43, (in Russian).]

[4] Невский М. В., “Об одном свойстве n-мерного симплекса”, *Матем. заметки*, **87**:4 (2010), 580–593; English transl.: Nevskii M. V., “On a property of n-dimensional simplices”, *Math. Notes*, **87**:4 (2010), 543–555.

[5] Невский М. В., “О геометрических характеристиках n-мерного симплекса”, *Модел. и анализ информ. систем*, **18**:2 (2011), 52–64; [Nevskii M. V., “On geometric charasteristics of an n-dimensional simplex”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **18**:2 (2011), 52–64, (in Russian).]

[6] Невский М. В., *Геометрические оценки в полиномиальной интерполяции*, Ярославль: Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, 2012; [Nevskii M. V., *Geometricheskie ocenki v polinomialnoy interpolyacii*, Yaroslavl: P. G. Demidov Yaroslavl State University, 2012, (in Russian).]

[7] Невский М. В., “Вычисление максимального в симплексе отрезка данного направления”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **18**:2 (2013), 147–152; English transl.: Nevskii M. V., “Computation of the longest segment of a given direction in a simplex”, *Journal of Math. Sciences*, **203**:6 (2014), 851–854.

[8] Невский М. В., Ухалов А. Ю., “О числовых характеристиках симплекса и их оценках”, *Модел. и анализ информ. систем*, **23**:5 (2016), 603–619; [Nevskii M. V., Ukhalov A. Yu., “On numerical charasteristics of a simplex and their estimates”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:5 (2016), 603–619, (in Russian).]

[9] Холл М., *Комбинаторика*, Москва: Мир, 1970; [Hall M., Jr, *Combinatorial theory*, Blaisdall publishing company, Waltham (Massachusets) – Toronto – London, 1967, (in English).]

[10] Hudelson M., Klee V., Larman D., “Largest j-simplices in d-cubes: some relatives of the Hadamard maximum determinant problem”, *Linear Algebra Appl.*, **241–243** (1996), 519–598.

[11] Lassak M., “Parallelotopes of maximum volume in a simplex”, *Discrete Comput. Geom.*, **21** (1999), 449–462.

[12] Mangano S., *Mathematica cookbook*, O’Reilly Media Inc., Cambridge, 2010.

[13] Nevskii M., "Properties of axial diameters of a simplex", *Discrete Comput. Geom.*, **46**:2 (2011), 301–312.

[14] Scott P. R., "Lattices and convex sets in space", *Quart. J. Math. Oxford (2)*, **36** (1985), 359–362.

[15] Scott P. R., "Properties of axial diameters", *Bull. Austral. Math. Soc.*, **39** (1989), 329–333.

Nevskii M. V., Ukhalov A. Yu., "New Estimates of Numerical Values Related to a Simplex ", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:1 (2017), 94–110.

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-1-94-110

Abstract. Let $n \in \mathbb{N}$ and $Q_n = [0,1]^n$. For a nondegenerate simplex $S \subset \mathbb{R}^n$, by σS we denote the homothetic copy of S with center of homothety in the center of gravity of S and ratio of homothety σ. By $\xi(S)$ we mean the minimal $\sigma > 0$ such that $Q_n \subset \sigma S$. By $\alpha(S)$ denote the minimal $\sigma > 0$ such that Q_n is contained in a translate of σS. By $d_i(S)$ we denote the ith axial diameter of S, i. e. the maximum length of the segment contained in S and parallel to the ith coordinate axis. Formulae for $\xi(S)$, $\alpha(S)$, $d_i(S)$ were proved earlier by the first author. Define $\xi_n = \min\{\xi(S) : S \subset Q_n\}$. We always have $\xi_n \geq n$. We discuss some conjectures formulated in the previous papers. One of these conjectures is the following. *For every n, there exists $\gamma > 0$, not depending on $S \subset Q_n$, such that an inequality $\xi(S) - \alpha(S) \leq \gamma(\xi(S) - \xi_n)$ holds.* Denote by $\varkappa_n$ the minimal γ with such a property. We prove that $\varkappa_1 = \frac{1}{2}$; for $n > 1$, we obtain $\varkappa_n \geq 1$. If $n > 1$ and $\xi_n = n$, then $\varkappa_n = 1$. The equality $\xi_n = n$ holds if $n+1$ is an Hadamard number, i. e. there exists an Hadamard matrix of order $n+1$. This proposition is known; we give one more proof with the direct use of Hadamard matrices. We prove that $\xi_5 = 5$. Therefore, there exists n such that $n+1$ is not an Hadamard number and nevertheless $\xi_n = n$. The minimal n with such a property is equal to 5. This involves $\varkappa_5 = 1$ and also disproves the following previous conjecture of the first author concerning the characterization of Hadamard numbers in terms of homothety of simplices: *$n+1$ is an Hadamard number if and only if $\xi_n = n$.* This statement is valid only in one direction. There exists a simplex $S \subset Q_5$ such that the boundary of the simplex $5S$ contains all the vertices of the cube Q_5. We describe a one-parameter family of simplices contained in Q_5 with the property $\alpha(S) = \xi(S) = 5$. These simplices were found with the use of numerical and symbolic computations. Another new result is an inequality $\xi_6 < 6.0166$. We also systematize some of our estimates of numbers ξ_n, θ_n, $\varkappa_n$ derived by now. The symbol θ_n denotes the minimal norm of interpolation projection on the space of linear functions of n variables as an operator from $C(Q_n)$ to $C(Q_n)$.

Keywords: simplex, cube, homothety, axial diameter, interpolation, projection, numerical methods

On the authors:
Mikhail V. Nevskii, orcid.org/0000-0002-6392-7618, doctor of science,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: mnevsk55@yandex.ru

Alexey Yu. Ukhalov, orcid.org/0000-0001-6551-5118, PhD,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: alex-uhalov@yandex.ru