Моделирование и анализ информационных систем. Т. 24, №1 (2017), с. 111–120
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 24, No 1 (2017), pp. 111–120

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-1-111-120

УДК 517.5

Пополнение ядра оператора дифференцирования

Морозов А. Н.

получена 15 ноября 2016

Аннотация. При изучении кусочно-полиномиальных приближений в пространствах L_p, $0 < p < 1$, автором было рассмотрено распространение k-й производной (оператора) с соболевских пространств W_1^k на пространства, являющиеся в определённом смысле их преемниками и имеющие нижний индекс меньше единицы. Данная статья продолжает работы автора по исследованию свойств, обретаемых оператором дифференцирования Λ при распространении его за границы пространства W_1^1 $/\Lambda : W_1^1 \mapsto L_1$, $\Lambda f = f'/$. Исследования проводятся с помощью введения семейства пространств Y_p^1, $0 < p < 1$, имеющего аналогию с семейством W_p^1, $1 \le p < \infty$. Пространства Y_p^1 снабжены квазинормами, построенными на основе квазинорм соответствующих пространств L_p, и для них выполняется $\Lambda : Y_p^1 \mapsto L_p$. Такой подход даёт новый взгляд на свойства производной. Например, была показана аддитивность относительно интервала продолженного оператора дифференцирования:

$$\bigcup_{n=1}^{m} \Lambda(f_n) = \Lambda(\bigcup_{n=1}^{m} f_n).$$

Здесь для функции f_n, заданной на $[x_{n-1}; x_n]$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$, определено $\Lambda(f_n)$. Одной из наиболее важных характеристик линейного оператора является состав ядра. При распространении оператора дифференцирования с пространства C^1 на пространства W_p^1 его ядро не изменяется. В статье конструктивно показано, что функции скачков и сингулярные функции f принадлежат всем пространствам Y_p^1, и для них $\Lambda f = 0$. Следовательно, пространство функций ограниченной вариации H_1^1 содержится в каждом Y_p^1, и оператор Λ на H_1^1 удовлетворяет соотношению $\Lambda f = f'$. Также приходим к выводу, что сингулярной логично назвать каждую функцию из добавленной части ядра.

Ключевые слова: оператор дифференцирования, ядро, квазинорма

Для цитирования: Морозов А. Н., "Пополнение ядра оператора дифференцирования", *Моделирование и анализ информационных систем*, **24**:1 (2017), 111–120.

Об авторах:
Морозов Анатолий Николаевич, orcid.org/0000-0001-9940-159X, канд. физ.-мат. наук, доцент,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003, Россия, e-mail: moroz@uniyar.ac.ru

1. Введение и основные обозначения

Как обычно, $L_p[I]$ обозначает пространство действительных функций, интегрируемых в степени p $(0 < p < \infty)$ по Лебегу на отрезке $I = [a; b]$, с величиной элементов

$$\|f\|_{L_p[I]} = \Big(\int_I |f(t)|^p dt \Big)^{\frac{1}{p}};$$

$C[I]$ – пространство непрерывных на I функций,

$$\|f\|_{C[I]} = \max_{x\in I} |f(x)|.$$

Когда неясность исключена, сокращаем обозначения до L_p и $\|f\|_p$ или соответственно до C и $\|f\|_\infty$.

Также используются пространства ($1 \le p < \infty$)

$$W_p^1 = W_p^1[I] = \Big\{ f : f \text{ абсолютно непрерывна на отрезке } I, f' \in L_p \Big\}$$

и пространство непрерывно дифференцируемых на отрезке I функций $C^1 = C^1[I]$ (для $p = \infty$) с нормами $\|f\|_p + \|f'\|_p$.

При изучении кусочно-полиномиальных приближений в пространствах L_p, $0 < p < 1$, автором было рассмотрено распространение k-й производной (оператора) с пространств W_1^k на пространства, являющиеся в определённом смысле их преемниками и имеющие нижний индекс меньше единицы (см.[1], [2].) В статьях [3], [4] структура введённых пространств и свойства получаемых производных подробнее изучались в случае $k = 1$, представляющем самостоятельный интерес. Данная статья является продолжением этих исследований.

Идею распространения производных удобно прокомментировать следующим образом. Множества функций, образующих пространства W_p^1, можно рассматривать как замыкания множества непрерывно дифференцируемых функций в метриках, порождаемых нормами $\|\cdot\|_p + \|(\cdot)'\|_p$, а определение производных в этих пространствах – как соответствующие распространения оператора дифференцирования $\Lambda : C^1 \mapsto C$ на W_p^1, т.е. построение $\Lambda : W_p^1 \mapsto L_p$. Относящиеся к этому рассуждению теоремы см. в [5] на с. 240.

Для охвата случаев, когда нижний индекс меньше 1, отметим хорошо известные сотношения: для $f \in W_p^1$ выполняется

$$\left\|f'\right\|_p = \lim_{t\to 0} t^{-1}\omega_1(f,t)_p = \sup_{t>0} t^{-1}\omega_1(f,t)_p,$$

где

$$\omega_1(f,t)_p = \sup_{0<\delta<t} \left\|\Delta_\delta^1 f\right\|_{L_p[a,b-\delta]} \qquad \Big(\Delta_\delta^1 f(x) = f(x+\delta) - f(x)\Big)$$

– модуль гладкости первого порядка в L_p (в C при $p = \infty$). Иначе говоря, нормы на пространствах W_p^1 совпадают с нормами

$$\|\cdot\|_{H_p^1} = \|\cdot\|_p + \sup_{t>0} t^{-1}\omega_1(\cdot\, , t)_p.$$

Чтобы избежать постоянных оговорок, для значений индекса, меньших единицы, в дальнейшем будет использоваться буква r, т.е. всюду ниже $0 < r < 1$.

Рассмотрим на пространстве C^1 семейство квазинорм (определение и основные свойства квазинорм см., например, [6], с. 79):

$$\|\cdot\|_{H_r^1} = \|\cdot\|_r + |\cdot|_r, \text{ где } |\cdot|_r = \sup_{t>0} t^{-1}\omega_1(\cdot, t)_r.$$

Определим [2] *для каждого* r *пространство* Y_r^1 *как пополнение* C^1 *в метрике, порождаемой квазинормой пространства* H_r^1.

О существовании метрики, ассоциированной с квазинормой, см. [6], с. 80. Так, метрику на H_r^1 определяет функционал

$$\|\cdot\|_r^r + |\cdot|_r^r.$$

Отметим, что

$$|f|_r^r = \sup_{t>0}\Big(t^{-r}\int\limits_a^{b-t} \big|\Delta_t^1 f(x)\big|^r dx\Big). \tag{1}$$

2. Предварительные результаты

Выделим приоритетные утверждения из предшествующих работ.

Из неравенств между метриками пространств H_1^1 и H_r^1 сразу следует, что $W_1^1 \subset Y_r^1$ для каждого r.

Теорема 1. Оператор дифференцирования $\Lambda : C^1 \mapsto C$, $(\Lambda f)(x) = f'(x)$, имеет единственное линейное непрерывное распространение до оператора из Y_r^1 в L_r. Это распространение обладает свойствами:

$$i)\ \lim_{t\to 0} t^{-1}\omega_1(f,t)_r = \|\Lambda f\|_r,$$

$$ii)\ \text{если}\ \ f\in W_1^1[c;d],\ [c;d]\subset[a;b],\ \text{тогда}\ \ \Lambda f\big|_{[c;d]} = f'.$$

Примерами функций из Y_r^1, не входящих в W_1^1, являются функции с монотонной неинтегрируемой производной. Они позволяют также выделить из семейства Y_r^1 (и H_r^1) конкретное пространство.

Теорема 2. Пусть $f\in L_r[a;b]\cap W_1^1[a;b-\epsilon]$ для любого $\epsilon>0$, f' неотрицательна на $[a;b)$ и не убывает, тогда, если конечна величина $\|f'\|_r$, $f\in Y_r^1[a;b]$. При этом

$$\sup_{t>0} t^{-1}\omega_1(f,t)_r = \lim_{t\to 0} t^{-1}\omega_1(f,t)_r = \|f'\|_r.$$

Функции из Y_r^1 могут быть разрывны, причём, как вытекает из теоремы 2 и следующих результатов, могут иметь бесконечные разрывы. Пусть $\{x_n\}$ – монотонная последовательность чисел из $[a;b]$, для определённости возрастающая и сходящаяся к b : $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < \cdots \to b$.

Теорема 3.

$$\text{Если}\ \ f\in Y_r^1[x_{n-1};x_n],\ n\in\mathbf{N},\ \text{и}\ \ \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\|\bar f\|^r_{L_r[x_{n-1};x_n]} + |f|^r_{L_r[x_{n-1};x_n]}\Big) < \infty,$$

$$\text{где}\ \|\bar f\|_{L_r[c;d]} = \Big\|\frac{f}{d-c}\Big\|_{L_r[c;d]},\ \text{то}\ f\in Y_r^1[a;b].$$

Следствие 1. Условие $f \in Y_r^1$ равносильно тому, что f кусочно принадлежит этому пространству.

Под кусочной принадлежностью подразумевается, что для заданного набора точек $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ выполняется $f \in Y_r^1[x_{n-1}; x_n]$, $1 \leq n \leq m$.

Следствие 2. Если $f \in Y_{r_n}^1[x_{n-1}; x_n]$, $1 \leq n \leq m$, $x_0 = a$, $x_m = b$, то $f \in Y_{r_*}^1[a; b]$, где $r_* = min\{r_1, ..., r_m\}$.

Замечание. Следствие 2 означает аддитивность продолженного оператора дифференцирования относительно интервала:

$$\bigcup_{n=1}^{m} \Lambda(f_n) = \Lambda(\bigcup_{n=1}^{m} f_n).$$

Теорема 4. Ступенчатая функция f, имеющая ограниченную вариацию, принадлежит всем пространствам Y_r^1, и для неё выполняется $\Lambda f = 0$.

3. О функциях ограниченной вариации

При распространении оператора дифференцирования с пространства C^1 на пространства W_p^1 его ядро не изменяется. Утверждение теоремы 4, являющейся определённым дополнением к теореме 3, вполне естественное с точки зрения классических результатов, показывает, что при дальнейшем распространении данного оператора в его ядро попадают, например, кусочно-постоянные функции. Аналогичным образом может быть получена принадлежность функций скачков ядру продолженного оператора дифференцирования.

Теорема 5. Функция скачков f принадлежит всем пространствам Y_r^1, при этом $\Lambda f = 0$.

Доказательство. Пусть $[a; b] = [-1; 1]$ и f – некоторая функция скачков на этом отрезке. Поскольку описание пространств Y_r^1 осуществляется на основе метрик пространств L_r, то без потери общности можно рассматривать сразу полное изменение функции f в каждой точке скачка и считать функцию непрерывной слева. Таким образом, по условию точкам x_n некоторого счётного множества из $[-1; 1)$ сопоставлены числа h_n такие, что

$$\sum_n |h_n| < \infty, \quad f(x) = \sum_{x_n < x} h_n.$$

Данную функцию удобно представить в виде: $f(x) = \sum\limits_n h_n \cdot \chi(x - x_n)$, где

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Оценим сначала в метрике $H_r^1[-1; 1]$ разность между функцией, состоящей из одной «ступеньки», и её «склейкой», осуществлённой при помощи линейной функции. По функции $h \cdot \chi$, где для удобства дальнейшей записи рассмотрим $h > 0$, и заданному числу $0 < s < 1$ построим кусочно-линейную функцию

$$g_{h,s}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{h}{s} \cdot x, & 0 \le x < s, \\ h, & x \ge s. \end{cases}$$

Обозначим $\rho_{h,s} = h \cdot \chi - g_{h,s}$. Имеем

$$\rho_{h,s}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ h \cdot \left(1 - \frac{x}{s}\right), & 0 \le x < s, \\ 0, & x \ge s. \end{cases}$$

Очевидно, $\|\rho_{h,s}\|^r_{L_r[-1;1]} < h^r \cdot s$. Рассмотрим величину $|\rho_{h,s}|^r_{L_r[-1;1]}$ (см. (1)).
Если $s < t < 1$, то

$$t^{-r} \int\limits_{-1}^{1-t} \left|\Delta^1_t\, \rho_{h,s}(x)\right|^r dx \le\ t^{-r} \left(\int\limits_{-t}^{-t+s} \left|\rho_{h,s}(x+t)\right|^r dx + \int\limits_{0}^{s} \left|\rho_{h,s}(x)\right|^r dx \right) <$$

$$<\ 2 \cdot t^{-r} \cdot h^r \cdot s <\ 2 \cdot h^r \cdot s^{1-r}.$$

Если $0 < t \le s$, тогда

$$t^{-r} \int\limits_{-1}^{1-t} \left|\Delta^1_t\, \rho_{h,s}(x)\right|^r dx \le\ t^{-r} \left(\int\limits_{-t}^{0} \left|\rho_{h,s}(x+t)\right|^r dx + \int\limits_{0}^{s-t} \left|\Delta^1_t\, \rho_{h,s}(x)\right|^r dx + \int\limits_{s-t}^{s} \left|\rho_{h,s}(x)\right|^r dx \right) <$$

$$< t^{-r} \left(h^r \cdot t + \left(\frac{h}{s} \cdot t\right)^r (s - t) + h^r \cdot t \right) <\ 2 \cdot h^r \cdot t^{1-r} + h^r \cdot s^{1-r} <\ 3 \cdot h^r \cdot s^{1-r}.$$

Таким образом,

$$\|\rho_{h,s}\|^r_r + |\rho_{h,s}|^r_r <\ 4 \cdot h^r \cdot s^{1-r}. \tag{2}$$

Чтобы завершить доказательство принадлежности класса функций скачков пространствам Y^1_r, по заданной функции

$$f(x) = \sum_n h_n \cdot \chi(x - x_n), \qquad \sum_n |h_n| = M,$$

и заданному числу $s > 0$ построим подходящую функцию $g_s \in W^1_1$. Каждой точке x_n сопоставим число $s_n > 0$ так, чтобы $x_n + s_n \le 1$ и $\sum\limits_n s_n \le s$. Для функции $h_n \cdot \chi(x - x_n)$ и числа s_n определим (как выше) кусочно-линейную функцию

$$g_{s_n}(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x < x_n, \\ \frac{h_n}{s_n} \cdot (x - x_n), & x_n \le x < x_n + s_n, \\ h_n, & x_n + s_n \le x \le 1. \end{cases}$$

Положим

$$g_s(x) = \sum_n g_{s_n}(x).$$

Все члены функционального ряда принадлежат пространству W^1_1. Ясно, что

$$\sum_n \left\|g_{s_n}\right\|_1 < 2\sum_n \left\|g_{s_n}\right\|_\infty = 2M \quad \text{и}$$

$$\sum_n \left\|g_{s_n}^{'}\right\|_1 = \sum_n \int\limits_{x_n}^{x_n+s_n} \frac{|h_n|}{s_n}\, dx = M,$$

поэтому функция g_s принадлежит пространству W_1^1. Рассмотрим

$$f(x) - g_s(x) = \sum_n \Big(h_n \cdot \chi(x - x_n) - g_{s_n}(x)\Big) = \sum_n \rho_{s_n}(x).$$

Используя оценку (2), имеем

$$\|f - g_s\|_r^r + |f - g_s|_r^r \le \sum_n \left(\|\rho_{s_n}\|_r^r + |\rho_{s_n}|_r^r\right) < \ 4\sum_n |h_n|^r \cdot s_n^{1-r} \le$$

$$\le 4\Big(\sum_n |h_n|\Big)^r \Big(\sum_n s_n\Big)^{1-r} \le 4 \cdot M^r \cdot s^{1-r}.$$

В преобразованиях было применено неравенство Гёльдера с показателями $\frac{1}{r}$ и $\frac{1}{1-r}$. Устремляя s к 0, получаем принадлежность функции f пространствам Y_r^1.

Производная функции g_s равна 0 всюду, кроме множества, покрываемого системой интервалов, суммарная длина которых не превосходит s, а оператор $\Lambda : Y_r^1 \mapsto L_r$, является непрерывным при любом $0 < r < 1$ (см. теорему 1):

$$\left\|\Lambda g_\alpha - \Lambda g_\sigma\right\|_r^r = \left\|(g_\alpha - g_\sigma)^{'}\right\|_r^r = \Big(\lim_{t\to 0}\ t^{-1}\omega_1(g_\alpha - g_\sigma, t)_r\Big)^r \le \Big(\sup_{t>0}\ t^{-1}\omega_1(g_\alpha - g_\sigma, t)_p\Big)^r.$$

Поскольку f – предел в Y_r^1 функций g_s при $s \to 0$, то получается

$$\Lambda f = \lim_{s\to 0} g_s^{'} = 0 \text{ (сходимость в } L_r).$$

Теорема доказана.

Ещё одним классическим типом функций, производная которых равна 0 почти всюду, являются сингулярные функции. Покажем, что они тоже попадают при распространении оператора Λ в его ядро. При доказательстве будем опираться на более общий подход к определению сингулярных функций, рассмотренный в [7].

Пусть

$$Var f\ \Big|_a^b = \sup_{a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b} \sum_{n=1}^m |f(x_n) - f(x_{n-1})|$$

– «полное изменение» или вариация по Жордану функции f на $[a;b]$.

Назовём ([7], с. 375) отличную от постоянной функцию ограниченной вариации f сингулярной, если для любого $\varepsilon > 0$ существует система интервалов $(a_n;b_n) \subset [a;b]$, $n = 1, 2, \cdots, m$, такая, что

$$\sum_{n=1}^m (b_n - a_n) < \varepsilon \ \text{ и } \ \sum_{n=1}^m \left|f(b_n) - f(a_n)\right| > Var f\ \Big|_a^b - \varepsilon.$$

Из утверждений, доказанных в книге, выделим два критерия:
«Для того чтобы отличная от постоянной функция ограниченной на $[a;b]$ вариации

была сингулярной, необходимо и достаточно, чтобы её можно было представить в виде разности двух неубывающих на этом отрезке сингулярных функций» (теорема 7.5, с. 378);
«Для того чтобы отличная от постоянной неубывающая на $[a;b]$ функция была сингулярной, необходимо и достаточно, чтобы её производная почти всюду на этом отрезке равнялась нулю» (теорема 7.6, с. 381).

Теорема 6. Сингулярная функция f принадлежит всем пространствам Y_r^1, при этом $\Lambda f = 0$.

Доказательство. Пусть сначала f – неубывающая на $[a;b]$ функция, имеющая почти всюду производную, равную 0 (сингулярная). Тогда для каждого заданного $\varepsilon > 0$ существует множество U_ε, являющееся объединением конечного или счётного числа непересекающихся интервалов суммарной длины меньше ε, вне которого производная функции f равна 0:

$$U_\varepsilon = \bigcup_n (a_n; b_n),\ (a_k; b_k) \cap (a_j; b_j) = \oslash\ /k \neq j/,\ \sum_n (b_n - a_n) < \varepsilon;\ f^{'}(x) = 0,\ x \in [a;b] \backslash U_\varepsilon.$$

Зафиксируем ε. Пусть $x_n = \frac{a_n + b_n}{2},\ h_n = f(b_n) - f(a_n)$. Определим

$$g_\varepsilon(x) = f(a) + \sum_{x_n < x} h_n.$$

Неубывающая функция скачков $g_\varepsilon(x)$ по теореме 5 принадлежит всем пространствам Y_r^1, и $g_\varepsilon(x) = f(x),\ x \in [a;b] \setminus U_\varepsilon$.

Функцию $f - g_\varepsilon$ представим в виде $(f - g_\varepsilon)(x) = \sum\limits_n \rho_n(x)$, где

$$\rho_n(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (a_n; b_n), \\ f(x) - g_\varepsilon(x), & x \in (a_n; b_n). \end{cases}$$

Оценим $\|\rho_n\|_r^r + |\rho_n|_r^r$. Рассуждение сходно с оценкой соответствующей величины для $\rho_{h,s}$ в доказательстве теоремы 5.
Пусть $b_n - a_n = s_n$, тогда $\|\rho_n\|_r^r < h_n^r \cdot s_n$. Рассмотрим $|\rho_n|_r^r$.
Если $t > s_n$, то

$$t^{-r} \int\limits_a^{b-t} \left|\Delta_t^1\ \rho_n(x)\right|^r dx < 2 \cdot h_n^r \cdot s_n^{1-r}.$$

Если $0 < t \leq s_n$, тогда

$$t^{-r} \int\limits_a^{b-t} \left|\Delta_t^1\ \rho_n(x)\right|^r dx < 2 \cdot h^r \cdot t^{1-r} + t^{-r} \int\limits_{a_n}^{b_n - t} \left|\Delta_t^1\ (f - g_\varepsilon)(x)\right|^r dx.$$

Поскольку

$$t^{-r} \int\limits_{a_n}^{b_n - t} \left|\Delta_t^1\ (f - g_\varepsilon)(x)\right|^r dx \leq t^{-r} \int\limits_{a_n}^{b_n - t} \left|\Delta_t^1\ f(x)\right|^r dx + t^{-r} \int\limits_{a_n}^{b_n - t} \left|\Delta_t^1\ g_\varepsilon(x)\right|^r dx,$$

то достаточно оценить каждое слагаемое в правой части неравенства.

$$t^{-r}\int\limits_{a_n}^{b_n-t}\big|f(x+t)-f(x)\big|^r dx \le\ t^{-r}\Big(\int\limits_{a_n}^{b_n-t}\big|f(x+t)-f(x)\big|dx\Big)^r\Big(b_n-a_n-t\Big)^{1-r} <$$

$$<\ t^{-r}\Big(Varf\Big|_{a_n}^{b_n}\cdot t\Big)^r\Big(b_n-a_n\Big)^{1-r} = h_n^r\cdot s_n^{1-r}.$$

Здесь в преобразованиях последовательно использованы интегральное неравенство Гёльдера с показателями $p=\frac{1}{r}$, $q=\frac{1}{1-r}$ и известное рассуждение об оценке модуля гладкости функции в L_1 через её вариацию (см., например, [8], с. 140). Очевидно,

$$t^{-r}\int\limits_{a_n}^{b_n-t}\big|g_\varepsilon(x+t)-g_\varepsilon(x)\big|^r dx =\ t^{-r}\cdot h_n^r\cdot t\le\ h_n^r\cdot s_n^{1-r}.$$

Таким образом, $|\rho_n|_r^r <\ 4\cdot h_n^r\cdot s_n^{1-r}$ и при $s_n<1$

$$\|\rho_n\|_r^r+|\rho_n|_r^r <\ h_n^r\cdot s_n+4\cdot h_n^r\cdot s_n^{1-r}<5\cdot h_n^r\cdot s_n^{1-r}.$$

Приходим к соотношению:

$$\|f(x)-g_\varepsilon(x)\|_r^r+|f(x)-g_\varepsilon(x)|_r^r\ \le\sum_n\big(\|\rho_n\|_r^r+|\rho_n|_r^r\big)<\ 5\sum_n h_n^r\cdot s_n^{1-r}\le$$

$$\le 5\Big(\sum_n h_n\Big)^r\Big(\sum_n s_n\Big)^{1-r}<5\cdot\big(f(b)-f(a)\big)^r\cdot\varepsilon^{1-r}.$$

В преобразованиях снова было применено неравенство Гёльдера. Из произвольности ε следует принадлежность функции f всем пространствам Y_r^1 и $\Lambda f=0$.

Если f – сингулярная функция общего вида, то она может быть представлена в виде разности двух неубывающих сингулярных функций. Из доказанного выше получается, что $f\in Y_r^1$ для всех $0<r<1$ и $\Lambda f=0$.

Теорема доказана.

Следствие. Функция ограниченной вариации f принадлежит всем пространствам Y_r^1. Другими словами, $H_1^1\subset Y_r^1$ при каждом $0<r<1$.

Доказательство. Как функция ограниченной вариации f представима в виде суммы абсолютно непрерывной функции, функции скачков и (непрерывной) сингулярной функции (или суммы абсолютно непрерывной и сингулярной в смысле [7] функций), поэтому $f\in Y_r^1$ для всех $0<r<1$ и $\Lambda f=f'$. С другой стороны, хорошо известно (см., например, [8], с. 139), что

$$Varf\,\Big|_a^b=\sup_{t>0}\ t^{-1}\omega_1(f,t)_{L_1[a;b]}.$$

Замечание. При $1<p<\infty$ имеет место $H_p^1=W_p^1$.

В заключение отметим, что на основе результатов теоремы 2 можно указать функции неограниченной вариации (имеющие сходную структуру с некоторыми, рассмотренными выше), попадающие в ядро продолженного оператора дифференцирования. Поэтому, развивая идеи из [7], приходим к такому определению сингулярной функции. *Назовём отличную от постоянной функцию f сингулярной, если* $\Lambda f = 0$. Другими словами, считаем сингулярными все функции из добавляемой при пополнении части ядра.

Список литературы / References

[1] Морозов А. Н., "Локальные приближения дифференцируемых функций", *Мат. заметки*, **100**:2 (2016), 248–255; English transl.: Morozov A. N., "Local Approximations of Differentiable Functions", *Math. Notes*, **100**:2 (2016), 256–262.

[2] Морозов А. Н., "Кусочно-полиномиальные приближения и дифференцируемость в пространствах L_p $(0 < p < 1)$", *Модел. и анализ информ. систем*, **12**:1 (2005), 18–21; [Morozov A. N., "Kusochno-polinomialnye priblizheniay i differentsiruemost v prostranstvakh L_p $(0 < p < 1)$", *Modeling and analysis of inform. systems*, **12**:1 (2005), 18–21, (in Russian).]

[3] Морозов А. Н., "Счётная аддитивность распространения оператора дифференцирования", *Модел. и анализ информ. систем*, **21**:3 (2014), 81–90; [Morozov A. N., "Countable Additivity of spread of the Differentiation Operator", *Modeling and analysis of inform. systems*, **21**:3 (2014), 81–90, (in Russian).]

[4] Морозов А. Н., "О гладкости в L_p, $0 < p < 1$", *Модел. и анализ информ. систем*, **19**:3 (2012), 97–104; [Morozov A. N., "On Smoothness in L_p $(0 < p < 1)$", *Modeling and analysis of inform. systems*, **19**:3 (2012), 97–104, (in Russian).]

[5] Канторович Л. В., Акилов Г. П., *Функциональный анализ*, Наука, М., 1984; English transl.: Kantorovich L. V., Akilov G. P., *Functional analysis*, ed. Howard L. Silcock, Pergamon Press, Oxford, New York, 1982.

[6] Berg J., Lofsrom J., *Interpolation Spaces. An Introduction*, Springer-Verlag, 1976; Russian transl.: Берг Й., Лёфстрём Й., *Интерполяционные пространства. Введение*, ред. Крючков В. С., Лизоркин П. И., Мир, М., 1980.

[7] Smolin U. N., *Vvedenie v teoriyu funktsy deistvitelnoi peremennoi*, FLINTA, M., 2012, (in Russian).]

[8] Тиман А. Ф., *Теория приближения функций действительного переменного*, Физматлит, М., 1960; English transl.: Timan A. F., *Theory of Approximation of Functions of a Real Variable*, Courier Dover Publications, 1994.

Morozov A. N., "Completion of the Kernel of the Differentiation Operator", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:1 (2017), 111–120.

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-1-111-120

Abstract. When investigating piecewise polynomial approximations in spaces L_p, $0 < p < 1$, the author considered the spreading of k-th derivative (of the operator) from Sobolev spaces W_1^k on spaces that are, in a sense, their successors with a low index less than one. In this article, we continue the study of the properties acquired by the differentiation operator Λ with spreading beyond the space W_1^1 $/\Lambda : W_1^1 \mapsto L_1, \Lambda f = f^{'}/$. The study is conducted by introducing the family of spaces Y_p^1, $0 < p < 1$, which have analogy with the family W_p^1, $1 \leq p < \infty$. This approach gives a new perspective for the properties of the derivative. It has been shown, for example, the additivity property relative to the interval of the spreading differentiation operator:

$$\bigcup_{n=1}^{m} \Lambda(f_n) = \Lambda(\bigcup_{n=1}^{m} f_n).$$

Here, for a function f_n defined on $[x_{n-1}; x_n]$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$, $\Lambda(f_n)$ was defined. One of the most important characteristics of a linear operator is the composition of the kernel. During the spreading of the differentiation operator from the space C^1 on the space W_p^1 the kernel does not change. In the article, it is constructively shown that jump functions and singular functions f belong to all spaces Y_p^1 and $\Lambda f = 0$. Consequently, the space of the functions of the bounded variation H_1^1 is contained in each Y_p^1, and the differentiation operator on H_1^1 satisfies the relation $\Lambda f = f^{'}$. Also, we come to the conclusion that every function from the added part of the kernel can be logically named singular.

Keywords: differentiation operator, kernel, quasinorma

On the authors:
Anatoly N. Morozov, orcid.org/0000-0001-9940-159X, PhD,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: moroz@uniyar.ac.ru