Модел. и анализ информ. систем. Т. **19**, № **4** (2012) 87–109

УДК 519.212.3+519.852.2

Двойственность Гейла и смежность случайных многогранников. II

Бродский А.Г.

ООО «Яндекс»

e-mail: abrodskiy@yandex-team.ru

получена 4 декабря 2011

Ключевые слова: k-смежностный многогранник, вероятностное пространство, случайные точки, случайный многогранник, не зависящее от распределения свойство

Получены не зависящие от распределения результаты о k-смежностности случайных многогранников. Они подтверждают известную гипотезу Гейла в общем случае.

1. Введение

Настоящая статья — вторая в серии из двух статей, посвященной изучению k-смежностности случайных многогранников и развитию необходимой для этого техники. Она является непосредственным продолжением первой [6], использует ее терминологию и обозначения и вместе с ней содержит полные доказательства результатов, анонсированных в [5]. Эти результаты находятся на стыке трех тесно связанных между собой разделов теории выпуклых многогранников: смежностные многогранники, двойственность Гейла, случайные многогранники. Краткие сведения о первых двух разделах приведены во введении к статье [6], поэтому здесь ограничимся информацией о третьем разделе, необходимой для дальнейшего.

В теории случайных многогранников, отраженной в книгах по геометрической вероятности, интегральной и стохастической геометрии (наиболее полно в [32]) и ряде обзоров (см. статьи [10,31,28] и приведенную в них библиографию), заметную роль играют исследования проблемы k-смежностности случайного многогранника, в том числе связанные с известной гипотезой Гейла [24]. Прежде чем сформулировать ее, напомним об упоминавшейся в [6] конструкции Гейла [24], позволяющей для любого $k \in \overline{1, \lfloor d/2 \rfloor}$ по k-космежностным системам n точек из $\mathbb{S}_{n-d-2}$, где $n \geqslant d+2$, строить k-смежностные многогранники с n вершинами из $\mathbb{R}^d$. С точки зрения построения систем точек k-космежностность оказалась более прозрачным и удобным условием по сравнению с k-смежностностью. В частности, Д. Гейл обратил внимание на интуитивную ясность следующего: для небольших значений k вероятность получения k-космежностной системы при выборе точек из $\bar{\mathbb{S}}_{n-d-2}$ наугад велика. В этой связи Д. Гейл [24] высказал предположение о распространенности k-смежностных многогранников в многомерных пространствах и в качестве некоторого его уточнения выдвинул гипотезу, ставшую широко известной под названием «гипотеза Гейла»:

$(\mathrm{G})_k$ вероятность получить k-смежностный многогранник $\mathrm{conv}(a_1, \ldots, a_n)$ с вершинами $a_1, \ldots, a_n$ при случайном выборе точек $a_1, \ldots, a_n$ в $\mathbb{R}^d$ быстро возрастает с увеличением числа измерений d.

В том случае, когда речь идет о случайном выборе точек $a_1, \ldots, a_n$ из фиксированного подмножества $X \subseteq \mathbb{R}^d$, вместо гипотезы $(\mathrm{G})_k$ будем говорить о гипотезе $(\mathrm{G}(X))_k$.

Сам Д. Гейл указывал на необходимость дальнейших уточнений формулировки гипотезы $(\mathrm{G})_k$. Как правило, они включали в себя, во-первых, выбор конкретной модели случайного многогранника и, во-вторых, выбор способа согласованного роста n и d. Многочисленные известные результаты, подтверждающие гипотезу Гейла или ее аналог для случайных центрально симметричных многогранников [12, 11, 33, 2, 13–15, 29, 16–20, 23, 25, 27, 3, 9], относятся к различным моделям случайных многогранников и различным способам согласованного роста n и d: $n = d+m$ при фиксированном $m \in \mathbb{N}$, $n = \lfloor \rho d \rfloor$ для фиксированного $\rho > 1$ (*линейно согласованный рост* параметров d и n) и др. Линейно согласованный рост параметров впервые рассмотрели А.М. Вершик и П.В. Спорышев [33]. Для случайных многогранников предложенной ими грассмановой модели они обнаружили явление резкого изменения комбинаторного строения многогранника при незначительном изменении ρ и исследовали соответствующую пороговую функцию $\alpha_{VS} = \alpha_{VS}(\rho)$. По существу А.М. Вершик и П.В. Спорышев установили для рассмотренных ими случайных многогранников более сильный по сравнению с оговоренным в гипотезе Гейла факт $\lfloor \alpha d \rfloor$-смежностности[1] для $\alpha < \alpha_{VS}(\rho)$, имеющий место с высокой вероятностью при $d \to \infty$.

В дополнительных замечаниях и комментариях ко второму изданию книги [26, с. 129b] отмечается некорректность вопроса о вероятности k-смежностности случайного многогранника, связанная с зависимостью от выбора модели случайного многогранника. В то же время существует сравнительно узкий круг известных результатов о случайных системах точек, о каждом из которых говорят как о не зависящем от распределения — настолько слабы условия, накладываемые на соответствующее распределение [30]. Мысль о том, что к числу не зависящих от распределения принадлежат и результаты, подтверждающие гипотезу Гейла и ее усиленные версии, была высказана Д.Л. Донохью и Д. Таннером в связи с обнаруженным ими фазовым переходом следующего вида [19, 21, 22]. Если A — случайная $d \times n$-матрица, элементы которой независимы и распределены по нормальному закону $\mathcal{N}(0,1)$, и $\mathrm{P}_{d,n,k}$ — вероятность k-смежностности системы столбцов матрицы A, то существует

[1] Об этом факте говорят как о «смежностности, пропорциональной размерности» [17].

пороговая функция $\alpha_{DT} = \alpha_{DT}(\rho)$ такая, что для $\rho > 1$

$$\lim_{d\to\infty} \mathrm{P}_{d,\lfloor\rho d\rfloor,\lfloor\alpha d\rfloor} = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < \alpha < \alpha_{DT}(\rho), \\ 0, & \text{если } \alpha > \alpha_{DT}(\rho). \end{cases} \tag{1.1}$$

В обзоре [21], обсуждая итоги миллионов поставленных ими вычислительных экспериментов, Д.Л. Донохью и Д. Таннер формулируют гипотезу об универсальности этого фазового перехода (т.е. его справедливости для очень широкого, но пока неизвестного класса матричных ансамблей).

Данная статья состоит из трех частей, первой из которых является настоящее введение. Часть 2 содержит леммы о борелевости некоторых подмножеств в $\mathbb{R}^{d,n}$, необходимые для обеспечения корректности получаемых в части 3 оценок соответствующих вероятностей. Часть 3 содержит основные результаты статьи, связанные с подтверждением различных вариантов гипотезы Гейла $(\mathrm{G})_k$ и гипотезы $(\mathrm{G})_k^*$ (см. [6]). Это теоремы 3.1–3.3, содержащие оценки и асимптотическое поведение вероятностей k-космежностности или k-смежностности случайных систем точек некоторых моделей. Особое внимание уделяется результатам, не зависящим от распределения (см. теоремы 3.2 и 3.3), роль главного инструмента в доказательствах которых играют новая версия теоремы Венделя [34] (см. лемму 3.2) и построенная в [6] на основе двойственности Гейла двойственность вероятностных пространств. Приведем формулировки основных результатов.

Теорема 3.1. *Пусть $d, m, k \in \mathbb{N}$; $k \leqslant \lfloor d/2 \rfloor$; $n = d + m$ и $\mathrm{Prob}^*(d,n,k)$ — вероятность k-космежностности системы n случайных точек, выбранных независимо и равномерно на сфере $\mathbb{S}_{m-1}$. Тогда выполняется неравенство $\mathrm{Prob}^*(d,n,k) \geqslant 1 - \frac{g(n)}{c^n}$, где $g(n) = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \frac{q}{(q-1)^j}$, $c = \frac{q}{q-1}$ и $q = 2^m$.*

Эта теорема обобщает теорему 2.1 из [4], относящуюся к случаю $k = 2$.

Теорема 3.2. *Пусть $d, m, k \in \mathbb{N}$; $k \leqslant \lfloor d/2 \rfloor$; $n = d+m$; $X_{d,n}$ — подмножество в $\mathbb{R}^m$ и $\mathcal{P}_{d,n}$ — абсолютно симметричное вероятностное пространство с пространством исходов $X_{d,n}^n$, удовлетворяющее условию[2]:*

($\mathfrak{C}$) для любой $(n-k)$-компонентной подсистемы I системы чисел $(1, 2, \ldots, n)$ множество $\mathrm{CN}_0^I(X_{d,n}^n)$ всех систем точек $a \in X_{d,n}^n$ таких, что I-подсистема a_I является 0-космежностной системой точек из $\mathbb{R}^{m,n-k}$, является событием.

Тогда множество всех k-космежностных систем точек $a \in X_{d,n}^n$ является событием (имеющим некоторую вероятность $\mathrm{Prob}^*(d,n,k)$) и, кроме того,

1) выполняются неравенства

$$1 - 2^{-n+k+1} \sum_{i=0}^{m-1} \binom{n-k-1}{i} \geqslant \mathrm{Prob}^*(d,n,k) \geqslant 1 - \binom{n}{k} 2^{-n+k+1} \sum_{i=0}^{m-1} \binom{n-k-1}{i};$$

2) для любых $\rho > 1$ и $\alpha > \max(0, 2-\rho)$ имеем $\lim\limits_{d\to\infty} \mathrm{Prob}^*(d, \lfloor\rho d\rfloor, \lfloor\alpha d\rfloor) = 0$;

[2]Это условие ($\mathfrak{C}$) выполнено, если σ-алгеброй событий является борелевская σ-алгебра в $X_{d,n}^n$ (см. лемму 2.5).

3) для любого $\rho \in (1,2)$ *существует* $\alpha_0 = \alpha_0(\rho) \in (0, \min(1/2, 2-\rho))$ *такое, что для всякого* $\alpha \in (0, \alpha_0)$ *имеем* $\lim\limits_{d\to\infty} \mathrm{Prob}^*(d, \lfloor \rho d \rfloor, \lfloor \alpha d \rfloor) = 1$*;*

4) существует $\alpha_1 \in (0, 1/2)$ *такое, что для любого фиксированного* m *и любого* $\alpha \in (0, \alpha_1)$ *имеем* $\lim\limits_{d\to\infty} \mathrm{Prob}^*(d, d+m, \lfloor \alpha d \rfloor) = 1$*;*

5) для фиксированного k

$$\lim_{d\to\infty} \mathrm{Prob}^*(d, \lfloor \rho d \rfloor, k) = \begin{cases} 1, & \text{если } 1 < \rho < 2, \\ 0, & \text{если } \rho > 2; \end{cases}$$

6) для фиксированных m *и* k *имеем* $\lim\limits_{d\to\infty} \mathrm{Prob}^*(d, d+m, k) = 1$.

Утверждение 1) теоремы 3.2 справедливо для произвольных фиксированных $d, n, k \in \mathbb{N}$. Разумеется, утверждения 2)–6) имеют смысл лишь в том случае, когда задана последовательность $(\mathcal{P}_{d,n(d)})_{d\in\mathbb{N}}$ абсолютно симметричных вероятностных пространств с пространствами исходов $X_{d,n(d)}^{n(d)}$ (конкретный вид функции $n(d)$ указан в формулировке каждого из этих утверждений). Те же самые замечания относятся и к пониманию утверждений 1)–6) нижеследующей теоремы 3.3.

Подмножество $X \subseteq \mathbb{R}^d$ будем называть *облачным*, если оно имеет непустое пересечение с каждым открытым лучом $\{cu \mid c > 0\}$ $(u \in \mathbb{S}_{d-1})$.

Теорема 3.3. *Пусть* $d, n, k \in \mathbb{N}$*;* $n > d$*;* $k \leqslant \lfloor d/2 \rfloor$*;* $X_{d,n}$ *— облачное подмножество в* $\mathbb{R}^d$ *и* $\mathcal{P}_{d,n}$ *— абсолютно симметричное вероятностное пространство с пространством исходов* $X_{d,n}^n$*, удовлетворяющее следующим двум условиям*[3]*:*

$(\mathfrak{L})$ $\mathrm{LinConf}(X_{d,n}^n)$ *является событием;*

$(\mathfrak{VN})$ *для всех* $(n-k)$*-компонентных подсистем* $I = (i_1, \ldots, i_{n-k})$ *системы чисел* $(1, 2, \ldots, n)$ *множество* $\mathrm{VN}_0^I(X_{d,n}^n)$ *всех систем точек* $a \in X_{d,n}^n$*, для которых всякая ненулевая линейная зависимость* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ *содержит хотя бы одну положительную компоненту* λ_i*, имеющую номер* $i \in \{i_1, \ldots, i_{n-k}\}$*, является событием.*

Тогда множество всех векторно k*-смежностных систем точек* $a \in X_{d,n}^n$ *является событием, для вероятности* $\mathrm{Prob}(d, n, k)$ *которого имеют место утверждения 1)–6), получающиеся из утверждений 1)–6) теоремы 3.2 заменой* Prob^* *на* Prob.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю В.А. Бондаренко. Кроме того, автор благодарен $\boxed{\text{А.В. Угланову}}$ за ценные обсуждения и замечания, а также А.М. Вершику за внимание, проявленное к работе, и присланные тексты статей.

[3]Эти условия $(\mathfrak{L})$ и $(\mathfrak{VN})$ выполнены, если σ-алгеброй событий является борелевская σ-алгебра в $X_{d,n}^n$ (см. леммы 2.2 и 2.7).

2. О борелевости некоторых подмножеств в $\mathbb{R}^{d,n}$

Дополним список обозначений из [6]. Когда не оговаривается противное, всюду ниже d, m, n — натуральные числа, а k — целое неотрицательное число; кроме того, используются обозначения: $S(n,k)$ — множество $(n-k)$-компонентных подсистем системы чисел $(1,2,\dots,n)$ (здесь $k\in\overline{0,n-1}$); $I_0=(1,2,\dots,n-k)\in S(n,k)$; Z — непустое подмножество в $\mathbb{R}^{d,n}$; $\mathrm{N}_k(Z)$, $\mathrm{VN}_k(Z)$ и $\mathrm{CN}_k(Z)$ — множества k-смежностных, векторно k-смежностных и k-космежностных систем точек из Z. Кроме того, положим $\mathrm{N}_k\,\mathrm{LinConf}(Z)=\mathrm{N}_k(\mathrm{LinConf}(Z))$ и $\mathrm{VN}_k\,\mathrm{LinConf}(Z)=\mathrm{VN}_k(\mathrm{LinConf}(Z))$. Наконец, для $k\in\overline{0,n-1}$ и $I=(i_1\dots,i_{n-k})\in S(n,k)$ пусть $\mathrm{CN}_0^I(Z)$ — множество всех систем точек $a\in Z$ таких, что a_I является 0-космежностной системой точек из $\mathbb{R}^{d,n-k}$, и $\mathrm{VN}_0^I(Z)$ — множество всех систем точек $a\in Z$, для которых всякая ненулевая линейная зависимость $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ имеет хотя бы одну положительную компоненту λ_i с номером $i\in\{i_1,\dots,i_{n-k}\}$.

Если L_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ — евклидовы векторные пространства со скалярными произведениями $(x_i,y_i)_i$, то прямое произведение $L=L_1\times\ldots\times L_n$ стандартно наделяется структурой евклидова векторного пространства относительно скалярного произведения $(x,y)=\sum_{i=1}^n(x_i,y_i)_i$, где $x=(x_1,\dots,x_n)$ и $y=(y_1,\dots,y_n)$ — векторы из L. Естественный изоморфизм евклидовых пространств $\mathbb{R}^{d,n}\cong\mathbb{R}^{dn}$ в тех случаях, когда это будет удобно, будем принимать за отождествление. Для системы точек $a\in\mathbb{R}^{d,n}$ ее ε-окрестность $\{x\in\mathbb{R}^{d,n}\mid|x-a|<\varepsilon\}$, где $\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$, условимся обозначать через $U_\varepsilon^{d,n}(a)$ или $U_\varepsilon(a)$.

Пусть U — топологическое пространство. Наименьшая σ-алгебра подмножеств в U, содержащая все открытые подмножества в U, называется *борелевской σ-алгеброй* в U и обозначается через $\mathcal{B}(U)$, а ее элементы называются *борелевскими подмножествами* [1] в U. Как известно [1], если V — подпространство в U, то $\mathcal{B}(V)=\{B\cap V\mid B\in\mathcal{B}(U)\}$. Кроме того, напомним [1], что если μ и ν — неотрицательные счетно-аддитивные меры на измеримом пространстве $(\Omega,\mathcal{B})$, то мера ν называется *абсолютно непрерывной относительно* μ, если $\nu(B)=0$ для всякого подмножества $B\in\mathcal{B}$ с $\mu(B)=0$.

Лемма 2.1. *Если $d,n\in\mathbb{N}$, $n\leqslant d$ и X — подмножество в $\mathbb{R}^d$, то* $\mathrm{LinGeP}(X^n)$ *является открытым подмножеством в X^n.*

Доказательство. Поскольку $\mathrm{LinGeP}(X^n)=X^n\cap\mathrm{LinGeP}(\mathbb{R}^{d,n})$, то без ограничения общности можно считать, что $X=\mathbb{R}^d$. Сопоставив каждой системе точек $a=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^{d,n}$ определитель Грама

$$G(a)=G(a_1,\dots,a_n)=\begin{vmatrix}(a_1,a_1)&\dots&(a_1,a_n)\\ \dots&\dots&\dots\\ (a_n,a_1)&\dots&(a_n,a_n)\end{vmatrix},$$

получаем функцию $G:\mathbb{R}^{d,n}\to\mathbb{R}$. Остается учесть равенство

$$\mathrm{LinGeP}(\mathbb{R}^{d,n})=\{a\in\mathbb{R}^{d,n}\mid G(a)>0\}$$

и непрерывность функции G. □

Лемма 2.2. *Если $d, n \in \mathbb{N}$ и X — подмножество в $\mathbb{R}^d$, то* $\mathrm{LinConf}(X^n)$ *является открытым подмножеством в X^n.*

Доказательство. Поскольку $\mathrm{LinConf}(X^n) = X^n \cap \mathrm{LinConf}(\mathbb{R}^{d,n})$, то без ограничения общности можно считать, что $X = \mathbb{R}^d$. Далее, если $n < d$, то $\mathrm{LinConf}(\mathbb{R}^{d,n}) = \varnothing$ и доказываемое утверждение верно. Если же $n \geqslant d$, то произвольная система точек $a \in \mathrm{LinConf}(\mathbb{R}^{d,n})$ обладает линейно независимой подсистемой $a_I \in \mathrm{LinConf}(\mathbb{R}^{d,d})$, где I — некоторая d-компонентная подсистема системы чисел $(1, 2, \ldots, n)$. Ввиду леммы 2.1, $U^{d,d}_{\varepsilon_{a_I}}(a_I) \subseteq \mathrm{LinConf}(\mathbb{R}^{d,d})$ для некоторого $\varepsilon_{a_I} > 0$. Для любой системы точек $b \in U^{d,n}_{\varepsilon_{a_I}}(a)$ имеем: $b_I \in U^{d,d}_{\varepsilon_{a_I}}(a_I) \subseteq \mathrm{LinConf}(\mathbb{R}^{d,d})$, так что $b \in \mathrm{LinConf}(\mathbb{R}^{d,n})$. Следовательно, $U^{d,n}_{\varepsilon_{a_I}}(a) \subseteq \mathrm{LinConf}(\mathbb{R}^{d,n})$. □

Аналогично доказывается

Лемма 2.3. *Если $d, n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant d$ и X — подмножество в $\mathbb{R}^d$, то* $\mathrm{LinGeP}(X^n)$ *является открытым подмножеством в X^n.*

Лемма 2.4. *Если $m, n \in \mathbb{N}$, то* $\mathrm{CN}_0(\mathbb{R}^{m,n})$ *является открытым подмножеством в $\mathbb{R}^{m,n}$.*

Доказательство. Если $\mathrm{CN}_0(\mathbb{R}^{m,n}) = \varnothing$, то доказываемое утверждение верно. Предположив, что $\mathrm{CN}_0(\mathbb{R}^{m,n}) \neq \varnothing$, и, следовательно, $n > m$ в силу леммы 2.10 из [6], зафиксируем произвольную систему точек $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{CN}_0(\mathbb{R}^{m,n})$, где $a_i = (a_{1i}, \ldots, a_{mi})$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. В силу лемм 2.8 и 2.10 из [6] включение $a \in \mathrm{CN}_0(\mathbb{R}^{m,n})$ в точности означает, что a — положительно зависимая векторная конфигурация в $\mathbb{R}^m$. Поэтому $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n = 0$ для некоторой точки $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n_{>0}$. Рассмотрим однородную систему линейных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0, \end{array} \right. \tag{2.1}$$

или в матричной записи $\mathrm{M}(a)^\top x^\top = 0$, где $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Положительная зависимость системы точек a означает, что $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{M}(a)^\top x^\top = 0\} \cap \mathbb{R}^n_{>0} \neq \varnothing$. Пусть для определенности минор порядка m

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

матрицы $\mathrm{M}(a)^\top$, расположенный в первых m ее столбцах, является базисным. Для системы точек $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^{m,n}$, где $u_i = (u_{1i}, \ldots, u_{mi})$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, условимся минор

$$\begin{vmatrix} u_{11} & \ldots & u_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{m1} & \ldots & u_{mm} \end{vmatrix}$$

матрицы $\mathrm{M}(u)^\top$ обозначать через $\Delta(u)$, определив этим функцию $\Delta : \mathbb{R}^{m,n} \to \mathbb{R}$. В этих обозначениях имеем: $\Delta(a) \neq 0$. Общее решение системы (2.1) можно записать, выражая главные неизвестные $x_1, \ldots, x_m$ через свободные $x_{m+1}, \ldots, x_n$ с помощью определителей:

$$x_1 = \frac{1}{\Delta(a)} \begin{vmatrix} -a_{1,m+1}x_{m+1} - \ldots - a_{1n}x_n & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ -a_{m,m+1}x_{m+1} - \ldots - a_{mn}x_n & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_m = \frac{1}{\Delta(a)} \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,m-1} & -a_{1,m+1}x_{m+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & \ldots & a_{m,m-1} & -a_{m,m+1}x_{m+1} - \ldots - a_{mn}x_n \end{vmatrix}.$$

Поскольку функция Δ является непрерывной и $\Delta(a) \neq 0$, то $\Delta(u) \neq 0$ в некоторой окрестности $U_{\varepsilon_0}(a)$, где $\varepsilon_0 > 0$. Для каждого $i \in \overline{1,m}$ определим функцию $g_i : U_{\varepsilon_0}(a) \to \mathbb{R}$ условием $g_i(u) = \Delta_i(u)/\Delta(u)$, где $\Delta_i(u)$ — определитель, получающийся из $\Delta(u)$ заменой i-го столбца на столбец

$$\begin{pmatrix} -u_{1,m+1}\alpha_{m+1} - \ldots - u_{1n}\alpha_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -u_{m,m+1}\alpha_{m+1} - \ldots - u_{mn}\alpha_n \end{pmatrix}.$$

Для всякого $i \in \overline{1,m}$ функция g_i непрерывна и $g_i(a) = \alpha_i > 0$, поэтому найдется такое $\varepsilon_i \in (0, \varepsilon_0]$, что $g_i(u) > 0$ для всех $u \in U_{\varepsilon_i}(a)$. Положив $\varepsilon' = \min(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) > 0$, получим, что $g_i(u) > 0$ для всех $i \in \overline{1,m}$ и $u \in U_{\varepsilon'}(a)$. Следовательно, выполняется условие $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{M}(u)^\top x^\top = 0\} \cap \mathbb{R}^n_{>0} \neq \varnothing$ для всех $u \in U_{\varepsilon'}(a)$. Кроме того, по лемме 2.2 существует такое $\varepsilon'' > 0$, что все системы точек $u \in U_{\varepsilon''}(a)$ являются векторными конфигурациями в $\mathbb{R}^m$. Окончательно получаем $U_\varepsilon(a) \subseteq \mathrm{CN}_0(\mathbb{R}^{m,n})$, где $\varepsilon = \min(\varepsilon', \varepsilon'') > 0$. □

Лемма 2.5. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$; $k \in \overline{0, n-1}$; $I \in S(n,k)$; X — подмножество в $\mathbb{R}^m$. Тогда $\mathrm{CN}_0^I(X^n)$ является открытым подмножеством в X^n.*

Доказательство. Поскольку $\mathrm{CN}_0^I(X^n) = X^n \cap \mathrm{CN}_0^I(\mathbb{R}^{m,n})$, то без ограничения общности можно считать, что $X = \mathbb{R}^m$. Если $\mathrm{CN}_0^I(\mathbb{R}^{m,n}) = \varnothing$, то доказываемое утверждение верно. Если же $\mathrm{CN}_0^I(\mathbb{R}^{m,n}) \neq \varnothing$, то по лемме 2.4 для произвольной системы точек $a \in \mathrm{CN}_0^I(\mathbb{R}^{m,n})$ выполняется включение $U_{\varepsilon_a}^{m,n-k}(a_I) \subseteq \mathrm{CN}_0(\mathbb{R}^{m,n-k})$ для некоторого $\varepsilon_a > 0$. Для любой системы точек $b \in U_{\varepsilon_a}^{m,n}(a)$ имеем: $b_I \in U_{\varepsilon_a}^{m,n-k}(a_I) \subseteq \mathrm{CN}_0(\mathbb{R}^{m,n-k})$, так что $b \in \mathrm{CN}_0^I(\mathbb{R}^{m,n})$. Следовательно, $U_{\varepsilon_a}^{m,n}(a) \subseteq \mathrm{CN}_0^I(\mathbb{R}^{m,n})$. □

Лемма 2.6. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$; $k \in \overline{0, n-1}$; X — подмножество в $\mathbb{R}^m$. Тогда $\mathrm{CN}_k(X^n)$ является открытым подмножеством в X^n.*

Доказательство. Поскольку $\mathrm{CN}_k(X^n) = X^n \cap \mathrm{CN}_k(\mathbb{R}^{m,n})$, то без ограничения общности можно считать, что $X = \mathbb{R}^m$. Ввиду леммы 2.12 из [6], имеет место равенство $\mathrm{CN}_k(\mathbb{R}^{m,n}) = \bigcap_{I \in S(n,k)} \mathrm{CN}_0^I(\mathbb{R}^{m,n})$. Остается учесть, что $\mathrm{CN}_0^I(\mathbb{R}^{m,n})$ является открытым подмножеством в $\mathbb{R}^{m,n}$ для любого $I \in S(n,k)$ по лемме 2.5. □

Лемма 2.7. *Пусть $d, n \in \mathbb{N}$; $k \in \overline{0, n-1}$; $I \in S(n,k)$; X — подмножество в $\mathbb{R}^d$. Тогда $\mathrm{VN}_0^I(X^n)$ является борелевским подмножеством в X^n.*

Доказательство. Пусть $I = (i_1, \dots, i_{n-k})$. Поскольку $\mathrm{VN}_0^I(X) = X^n \cap \mathrm{VN}_0^I(\mathbb{R}^{d,n})$, то без ограничения общности можно считать, что $X = \mathbb{R}^d$. Достаточно установить борелевость подмножества $Z = \mathbb{R}^{d,n} \setminus \mathrm{VN}_0^I(\mathbb{R}^{d,n}) \subseteq \mathbb{R}^{d,n}$. Легко видеть, что для любой системы точек $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{d,n}$ включение $a \in Z$ равносильно существованию точки $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in S$, для которой

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n = 0, \tag{2.2}$$

где $S = \mathbb{S}_{n-1} \cap Q_I$, $Q_I = \bigcap_{i \in \{i_1, \dots, i_{n-k}\}} Q_i$ и $Q_i = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_i \geqslant 0\}$ $(i \in \{i_1, \dots, i_{n-k}\})$. Условие (2.2) равносильно системе равенств

$$\begin{cases} (\lambda, a^1) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ (\lambda, a^d) = 0. \end{cases}$$

Положив

$$\Psi_\lambda = \{(u^1, \dots, u^d) \in \mathbb{R}^{n,d} \mid (\lambda, u^1) = \ldots = (\lambda, u^d) = 0\},$$
$$\Psi_{\lambda,r} = \left\{(u^1, \dots, u^d) \in \mathbb{R}^{n,d} \mid (\lambda, u^1), \dots, (\lambda, u^d) \in \left(-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right)\right\},$$
$$W = \bigcup_{\lambda \in S} \Psi_\lambda, \quad W_r = \bigcup_{\lambda \in S} \Psi_{\lambda,r}$$

для любых $\lambda \in \mathbb{R}^n$ и $r \in \mathbb{N}$, получаем возможность включение $a \in Z$ записать в виде $(a^1, \dots, a^d) \in W$.

Остается доказать борелевость подмножества $W \subseteq \mathbb{R}^{n,d}$. Сначала убедимся в том, что W_r является открытым подмножеством в $\mathbb{R}^{n,d}$ для произвольного $r \in \mathbb{N}$. Действительно, определив для произвольного $\lambda \in \mathbb{R}^n$ отображение $g_\lambda : \mathbb{R}^{n,d} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ условием $g_\lambda(u) = ((\lambda, u^1), \dots, (\lambda, u^d))$ для всех $u = (u^1, \dots, u^d) \in \mathbb{R}^{n,d}$, из непрерывности g_λ и равенства $\Psi_{\lambda,r} = g_\lambda^{-1}\left(\left(-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right)^d\right)$ получаем, что $\Psi_{\lambda,r}$, а, следовательно, и W_r является открытым подмножеством в $\mathbb{R}^{n,d}$ для любого $r \in \mathbb{N}$.

Установим теперь, что $W = \bigcap_{r=1}^\infty W_r$. Поскольку $\Psi_\lambda \subseteq \Psi_{\lambda,r}$ для всех $r \in \mathbb{N}$, то $W \subseteq W_r$ для всех $r \in \mathbb{N}$, так что $W \subseteq \bigcap_{r=1}^\infty W_r$. Для проверки обратного включения предположим, что $(u^1, \dots, u^d) \in \bigcap_{r=1}^\infty W_r$, т.е. $(u^1, \dots, u^d) \in W_r$ для всякого $r \in \mathbb{N}$. Тогда для любого $r \in \mathbb{N}$ найдется $\lambda^{(r)} \in S$ такое, что $(u^1, \dots, u^d) \in \Psi_{\lambda^{(r)},r}$, т.е.

$$\begin{cases} -\frac{1}{r} < (\lambda^{(r)}, u^1) < \frac{1}{r}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -\frac{1}{r} < (\lambda^{(r)}, u^d) < \frac{1}{r}. \end{cases} \tag{2.3}$$

Ввиду компактности подмножества $S \subseteq \mathbb{R}^n$, из последовательности $\{\lambda^{(r)}\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{\lambda^{(r_t)}\}$, для которой $\lim\limits_{t\to\infty} \lambda^{(r_t)} = \lambda^{(0)} \in S$. Переходя к пределу при $t \to \infty$ в неравенствах

$$\begin{cases} -\frac{1}{r_t} < (\lambda^{(r_t)}, u^1) < \frac{1}{r_t}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -\frac{1}{r_t} < (\lambda^{(r_t)}, u^d) < \frac{1}{r_t}, \end{cases}$$

вытекающих из (2.3), получаем, что

$$\begin{cases} (\lambda^{(0)}, u^1) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ (\lambda^{(0)}, u^d) = 0, \end{cases}$$

т.е. $(u^1, \dots, u^d) \in \Psi_{\lambda^{(0)}}$, где $\lambda^{(0)} \in S$, откуда следует, что $(u^1, \dots, u^d) \in W$. Итак, подмножество $W \subseteq \mathbb{R}^{n,d}$ представлено в виде счетного пересечения открытых множеств и потому является борелевским. $\square$

Лемма 2.8. *Пусть $d, n \in \mathbb{N}$; $k \in \overline{0, n-1}$; X — подмножество в $\mathbb{R}^d$. Тогда $\mathrm{VN}_k(X^n)$ является борелевским подмножеством в X^n.*

Доказательство. Поскольку $\mathrm{VN}_k(X^n) = X^n \cap \mathrm{VN}_k(\mathbb{R}^{d,n})$, то без ограничения общности можно считать, что $X = \mathbb{R}^d$. Нетрудно понять, что имеет место равенство $\mathrm{VN}_k(\mathbb{R}^{d,n}) = \bigcap_{I \in S(n,k)} \mathrm{VN}_0^I(\mathbb{R}^{d,n})$. Остается учесть, что $\mathrm{VN}_0^I(\mathbb{R}^{d,n})$ является борелевским подмножеством в $\mathbb{R}^{d,n}$ для любого $I \in S(n,k)$ по лемме 2.7. $\square$

Лемма 2.9. *Пусть $d, n \in \mathbb{N}$; $k \in \overline{0, n-1}$;X — подмножество в $\mathbb{R}^d$. Тогда $\mathrm{N}_k(X^n)$ является борелевским подмножеством в X^n.*

Доказательство. С каждым непустым подмножеством $V \subseteq \mathbb{R}^{d,n}$ ассоциируем подмножество $\overleftarrow{V} = \{\overleftarrow{a} \mid a \in V\} \subseteq \mathbb{R}^{d+1,n}$. Поскольку $\mathrm{N}_k(X^n) = X^n \cap \mathrm{N}_k(\mathbb{R}^{d,n})$, то без ограничения общности можно считать, что $X = \mathbb{R}^d$. Для любой системы точек $a \in \mathbb{R}^{d,n}$ включения $a \in \mathrm{N}_k(\mathbb{R}^{d,n})$ и $\overleftarrow{a} \in \mathrm{VN}_k(\mathbb{R}^{d+1,n})$ равносильны. Отсюда следует, что

$$\overleftarrow{\mathrm{N}_k(\mathbb{R}^{d,n})} = H^n \cap \mathrm{VN}_k(\mathbb{R}^{d+1,n}), \tag{2.4}$$

где $H = \{(x_1, \dots, x_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1} \mid x_1 = 1\}$ — гиперплоскость в $\mathbb{R}^{d+1}$. С учетом (2.4) и леммы 2.8 заключаем, что $\overleftarrow{\mathrm{N}_k(\mathbb{R}^{d,n})}$ — борелевское подмножество в H^n, так что $\mathrm{N}_k(\mathbb{R}^{d,n})$ является борелевским подмножеством в $\mathbb{R}^{d,n}$. $\square$

3. О k-космежностности и k-смежностности случайной системы точек

Теорема 3.1. *Пусть $d, m, k \in \mathbb{N}$; $k \leqslant \lfloor d/2 \rfloor$; $n = d + m$ и $\mathrm{Prob}^*(d, n, k)$ — вероятность k-космежностности системы n случайных точек, выбранных независимо и равномерно на сфере $\mathbb{S}_{m-1}$. Тогда выполняется неравенство*

$$\mathrm{Prob}^*(d, n, k) \geqslant 1 - \frac{g(n)}{c^n},$$

где

$$g(n) = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \frac{q}{(q-1)^j}, \quad c = \frac{q}{q-1}, \quad q = 2^m.$$

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 2.1 из [4], относящейся к случаю $k = 2$. □

Замечание 3.1. Теорема 3.1 остается справедливой, если в ее формулировке заменить $\mathbb{S}_{m-1}$ на $\bar{\mathbb{S}}_{m-1}$ и определить равномерную вероятностную меру на $\bar{\mathbb{S}}_{m-1}$ условием $\overline{\nu}(B) = \nu(B \cap \mathbb{S}_{m-1})$, где ν — равномерная вероятностная мера на $\mathbb{S}_{m-1}$, для любого борелевского подмножества B в $\bar{\mathbb{S}}_{m-1}$ (при $m = 1$ такая терминология отлична от стандартной).

Говорят, что линейные гиперплоскости $H_1, \ldots, H_n \subseteq \mathbb{R}^d$ находятся *в общем положении* [32], если их нормальные векторы находятся линейно в общем положении. Нам понадобится следующая лемма Штейнера—Шлёфли [32].

Лемма 3.1. *Если $m, n \in \mathbb{N}$, $n > m$ и $H_1, \ldots, H_n \subseteq \mathbb{R}^m$ — линейные гиперплоскости общего положения, то число связных компонент множества $\mathbb{R}^m \setminus (H_1 \cup \ldots \cup H_n)$ равно*

$$2 \sum_{i=0}^{m-1} \binom{n-1}{i}. \tag{3.1}$$

Подмножество $X \subseteq \mathbb{R}^d$ условимся называть *облачным*, если оно имеет непустое пересечение с каждым открытым лучом $\{cu \mid c \in \mathbb{R}_{>0}\}$ $(u \in \mathbb{S}_{d-1})$. Ясно, что облачное подмножество $X \subseteq \mathbb{R}^m$, содержащее точку 0, является θ_T-насыщенным.

Нужной нам версией теоремы Венделя является

Лемма 3.2. *Пусть $d, m \in \mathbb{N}$, $n = d+m$, X — подмножество в $\mathbb{R}^m$ и $\mathcal{P}$ — абсолютно симметричное вероятностное пространство с пространством исходов X^n. Если множество $\mathrm{CN}_0(X^n)$ является событием*[4]*, то его вероятность*

$$\mathrm{Prob}^*(d, n, 0) = 1 - 2^{-n+1} \sum_{i=0}^{m-1} \binom{n-1}{i}.$$

Доказательство. Положив $D = \{(a_1, \ldots, a_n) \in X^n \mid \exists\, h \in \mathbb{S}_{m-1}\ \forall\, i \in \overline{1, n}\ (h, a_i) > 0\}$ и принимая во внимание условие доказываемой леммы и лемму 3.11 из [6], получаем возможность рассмотреть следующие события:

$$C = \mathrm{CN}_0(X^n), \bar{C} = X^n \setminus C = \{(a_1, \ldots, a_n) \in X^n \mid \exists\, h \in \mathbb{S}_{m-1} \quad \forall\, i \in \overline{1, n} \quad (h, a_i) \geqslant 0\},$$
$$B = \bar{C} \cap \mathrm{LinGeP}(X^n) = \mathrm{LinGeP}(\bar{C}) = \mathrm{LinGeP}(D),$$

вероятности которых связаны следующим образом: $\mathbb{P}(C) = 1 - \mathbb{P}(\bar{C}) = 1 - \mathbb{P}(B)$.

Остается вычислить $\mathbb{P}(B)$. С этой целью, учитывая абсолютную симметричность вероятностного пространства $\mathcal{P}$, для каждого $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \mathrm{U}_2^n$ рассмотрим событие $\sigma B = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{LinGeP}(X^n) \mid \exists\, h \in \mathbb{S}_{m-1}\ \forall\, i \in \overline{1, n}\ \mathrm{sign}(h, a_i) = \sigma_i\}$. Поскольку $\mathbb{P}(\sigma B) = \mathbb{P}(B)$ для всех $\sigma \in \mathrm{U}_2^n$, находим, что

$$2^n \mathbb{P}(B) = \sum_{\sigma \in \mathrm{U}_2^n} \mathbb{P}(\sigma B) = \sum_{\sigma \in \mathrm{U}_2^n} \mathbb{E} 1_{\sigma B} = \mathbb{E} \sum_{\sigma \in \mathrm{U}_2^n} 1_{\sigma B},$$

[4]Это условие выполнено, если σ-алгеброй событий является борелевская σ-алгебра в X^n (см. лемму 2.6).

где $\mathbb{E}$ — знак математического ожидания, а $1_{\sigma B}$ — индикаторная функция подмножества $\sigma B \subseteq X^n$. Ввиду леммы 3.1, случайная величина $\sum_{\sigma\in \mathrm{U}_2^n} 1_{\sigma B}$ принимает одно и то же значение (3.1) на всех $a \in \mathrm{LinGeP}(X^n)$. Поэтому

$$\mathbb{E}\sum_{\sigma\in \mathrm{U}_2^n} 1_{\sigma B} = 2\sum_{i=0}^{m-1}\binom{n-1}{i},$$

чем и завершается доказательство. □

Теорема 3.2. *Пусть $d, m, k \in \mathbb{N}$; $k \leqslant \lfloor d/2\rfloor$; $n = d+m$; $X_{d,n}$ — подмножество в $\mathbb{R}^m$ и $\mathcal{P}_{d,n}$ — абсолютно симметричное вероятностное пространство с пространством исходов $X_{d,n}^n$, удовлетворяющее условию:*

($\mathfrak{C}$) $\mathrm{CN}_0^I(X_{d,n}^n)$ *является событием для всех $I \in S(n,k)$.*

Тогда множество всех k-космежностных систем точек $a \in X_{d,n}^n$ является событием (имеющим некоторую вероятность $\mathrm{Prob}^*(d,n,k)$) и, кроме того,

1) *выполняются неравенства*

$$1-2^{-n+k+1}\sum_{i=0}^{m-1}\binom{n-k-1}{i} \geqslant \mathrm{Prob}^*(d,n,k) \geqslant$$
$$\geqslant 1-\binom{n}{k}2^{-n+k+1}\sum_{i=0}^{m-1}\binom{n-k-1}{i}; \quad (3.2)$$

2) *для любых $\rho > 1$ и $\alpha > \max(0, 2-\rho)$*

$$\mathrm{Prob}^*(d,\lfloor\rho d\rfloor,\lfloor\alpha d\rfloor) \longrightarrow 0$$

при $d \to \infty$;

3) *для любого $\rho \in (1,2)$ существует $\alpha_0 = \alpha_0(\rho) \in (0, \min(1/2, 2-\rho))$ такое, что для всякого $\alpha \in (0,\alpha_0)$*

$$\mathrm{Prob}^*(d,\lfloor\rho d\rfloor,\lfloor\alpha d\rfloor) \longrightarrow 1$$

при $d \to \infty$;

4) *существует $\alpha_1 \in (0, 1/2)$ такое, что для любого фиксированного m и любого $\alpha \in (0,\alpha_1)$*

$$\mathrm{Prob}^*(d, d+m, \lfloor\alpha d\rfloor) \longrightarrow 1$$

при $d \to \infty$;

5) *для фиксированного k*

$$\lim_{d\to\infty}\mathrm{Prob}^*(d,\lfloor\rho d\rfloor,k) = \begin{cases} 1, & \text{если } 1<\rho<2,\\ 0, & \text{если } \rho>2;\end{cases}$$

6) для фиксированных m и k

$$\mathrm{Prob}^*(d, d+m, k) \longrightarrow 1$$

при $d \to \infty$.

Доказательство. Сначала отметим, что из условий $k \leqslant \lfloor d/2 \rfloor$ и $n = d+m$ следует, что $n \geqslant k+1$. Условимся для любого вероятностного пространства с некоторым пространством исходов Ω через $\overline{V}$ обозначать дополнение $\Omega \setminus V$ к подмножеству $V \subseteq \Omega$. Кроме того, пусть $C^{m,n,k} = \mathrm{CN}_k(X^n_{d,n})$; $C_I = \mathrm{CN}^I_0(X^n_{d,n})$ (здесь $I \in S(n,k)$); $\mathcal{P}_{d,n} = (X^n_{d,n}, \mathcal{B}_{d,n}, \mathbb{P}_{d,n})$ — абсолютно симметричное вероятностное пространство из условия теоремы. Заметив, что, ввиду леммы 2.12 из [6], $C^{m,n,k} = \bigcap_{I \in S(n,k)} C_I \in \mathcal{B}_{d,n}$, перейдем к обоснованию утверждений 1)–6).

1) Положим $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{d,n}$; $X = X_{d,n}$; $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{d,n}$; $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{d,n}$ и заметим, что $\overline{C^{m,n,k}} = \bigcup_{I \in S(n,k)} \overline{C_I} \in \mathcal{B}$. Поэтому

$$\mathbb{P}(\overline{C_{I_0}}) \leqslant \mathbb{P}(\overline{C^{m,n,k}}) = \mathbb{P}(\bigcup_{I \in S(n,k)} \overline{C_I}) \leqslant \sum_{I \in S(n,k)} \mathbb{P}(\overline{C_I}), \tag{3.3}$$

так что для получения оценки вероятности $\mathrm{Prob}^*(d,n,k) = \mathbb{P}(C^{m,n,k})$ достаточно вычислить $\mathbb{P}(C_I)$ для произвольного $I = (i_1, \ldots, i_{n-k}) \in S(n,k)$.

Положив $(X^n)^\circ = \mathrm{LinGeP}(X^n)$, $\mathcal{B}^\circ = \{B^\circ \mid B \in \mathcal{B}\}$ и $\mathbb{P}^\circ(B^\circ) = \mathbb{P}(B^\circ) = \mathbb{P}(B)$, где $B \in \mathcal{B}$ и $B^\circ = B \cap (X^n)^\circ = \mathrm{LinGeP}(B)$, построим новое вероятностное пространство $\mathcal{P}^\circ = ((X^n)^\circ, \mathcal{B}^\circ, \mathbb{P}^\circ)$. Ясно, что $\mathcal{P}^\circ$ также абсолютно симметрично и

$$\mathbb{P}(C_I) = \mathbb{P}^\circ(C_I^\circ). \tag{3.4}$$

Определим *отображение удлинения* $\mathrm{len}_I : \mathcal{B}(X^{n-k}) \to \mathcal{B}((X^n)^\circ)$ следующим условием: $\mathrm{len}_I V = \{a \in (X^n)^\circ \mid a_I \in V\}$. Прямая проверка показывает, что оно обладает следующими свойствами:

$$\begin{gathered} \mathrm{len}_I \varnothing = \varnothing, \quad \mathrm{len}_I(V \cap W) = \mathrm{len}_I V \cap \mathrm{len}_I W, \\ \mathrm{len}_I(X^{n-k} \setminus V) = (X^n)^\circ \setminus \mathrm{len}_I V, \quad \mathrm{len}_I(\bigcup_{i=1}^\infty V_i) = \bigcup_{i=1}^\infty \mathrm{len}(V_i) \end{gathered} \tag{3.5}$$

для любых $V, W, V_i \in \mathcal{B}(X^{n-k})$ $(i \in \mathbb{N})$.

Построим еще одно вероятностное пространство $\mathcal{P}_I = (X^{n-k}, \mathcal{B}_I, \mathbb{P}_I)$, положив $\mathcal{B}_I = \{V \in \mathcal{B}(X^{n-k}) \mid \mathrm{len}_I V \in \mathcal{B}^\circ\}$ и $\mathbb{P}_I(V) = \mathbb{P}^\circ(\mathrm{len}_I V)$ для всех $V \in \mathcal{B}_I$. С помощью равенств (3.5) легко убедиться в корректности этого определения. Поскольку $\mathrm{len}_I(\mathrm{LinGeP}(X^{n-k})) = (X^n)^\circ$, то $\mathrm{LinGeP}(X^{n-k}) \in \mathcal{B}_I$ и $\mathbb{P}_I(\mathrm{LinGeP}(X^{n-k})) = 1$. Далее, с каждым $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_{n-k}) \in \mathrm{U}_2^{n-k}$ свяжем $\sigma_\tau = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \mathrm{U}_2^n$, где

$$\sigma_i = \begin{cases} \tau_t, & \text{если } i = i_t \ (1 \leqslant t \leqslant n-k), \\ 1, & \text{если } i \notin \{i_1, \ldots, i_{n-k}\}. \end{cases}$$

Тогда для любого $V \in \mathcal{B}_I$ имеем, что $\mathrm{len}_I(\tau V) = \sigma_\tau \,\mathrm{len}_I(V)$, откуда получаем, что $\tau V \in \mathcal{B}_I$ и $\mathbb{P}_I(\tau V) = \mathbb{P}_I(V)$. Следовательно, $\mathcal{P}_I$ — абсолютно симметричное вероятностное пространство. Наконец, для множества $C^{m,n-k,0} = \mathrm{CN}_0(X^{n-k})$ имеем

$\mathrm{len}_I(C^{m,n-k,0}) = C_I^\circ \in \mathcal{B}^\circ$, так что $C^{m,n-k,0} \in \mathcal{B}_I$ и $\mathbb{P}_I(C^{m,n-k,0}) = \mathbb{P}^\circ(C_I^\circ)$. В силу (3.4) и леммы 3.2

$$\mathbb{P}(C_I) = \mathbb{P}_I(C^{m,n-k,0}) = 1 - 2^{-n+k+1} \sum_{i=0}^{m-1} \binom{n-k-1}{i}.$$

Для получения неравенств (3.2) остается учесть (3.3).

В доказательствах утверждений 2)–4) будем использовать аппроксимацию Стирлинга в форме

$$\ln t! = \left(t + \frac{1}{2}\right) \ln t - t + O(1)$$

и стандартную технологию получения асимптотических формул, описанную в [7].

2) Положив

$$W_{m,n} = 2^{-n+1} \sum_{i=0}^{m-1} \binom{n-1}{i},$$

и

$$\begin{aligned} n &= \lfloor \rho d \rfloor = \rho d - \tau \quad (\rho > 1, 0 \leqslant \tau < 1), \\ k &= \lfloor \alpha d \rfloor = \alpha d - \varepsilon \quad (0 < \alpha \leqslant \tfrac{1}{2}, 0 \leqslant \varepsilon < 1), \end{aligned} \tag{3.6}$$

с учетом содержащейся в (3.2) верхней оценки вероятности $\mathrm{Prob}^*(d,n,k)$ находим, что

$$\begin{aligned} \mathrm{Prob}^*(d, \lfloor \rho d \rfloor, \lfloor \alpha d \rfloor) &\leqslant 1 - W_{n-d,n-k} = \\ &= W_{d-k,n-k} = 2^{-n+k+1} \sum_{i=0}^{d-k-1} \binom{n-k-1}{i}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

причем

$$\binom{n-k-1}{i-1} : \binom{n-k-1}{i} = \frac{i}{n-k-i} = \frac{i}{(\rho-\alpha)d + \varepsilon - \tau - i} \leqslant \frac{1-\alpha}{\rho - 1}$$

для всех $i \in \overline{1, d-k-1}$. Если $\alpha > 2 - \rho$, то $\gamma = \frac{1-\alpha}{\rho-1} < 1$ и, следовательно,

$$W_{d-k,n-k} \leqslant 2^{-n+k+1} \binom{n-k-1}{d-k-1} (1 + \gamma + \gamma^2 + \dots) = \frac{1}{1-\gamma} V, \tag{3.8}$$

где $V = 2^{-n+k+1} Q$, $Q = \binom{n-k-1}{d-k-1}$. Далее,

$$\begin{aligned} \ln Q &= \ln(n-k-1)! - \ln(d-k-1)! - \ln(n-d)! = \\ &= \left(n - k - \frac{1}{2}\right) \ln(n-k-1) - \left(d - k - \frac{1}{2}\right) \ln(d-k-1) - \\ &- \left(n - d + \frac{1}{2}\right) \ln(n-d) + O(1) = \left((\rho-\alpha)d + \varepsilon - \tau - \frac{1}{2}\right) \ln((\rho-\alpha)d) - \\ &- \left((1-\alpha)d + \varepsilon - \frac{1}{2}\right) \ln((1-\alpha)d) - \left((\rho-1)d - \tau + \frac{1}{2}\right) \ln((\rho-1)d) + \\ &+ O(1) = -\frac{1}{2} \ln d + d((\rho-\alpha)\ln(\rho-\alpha) - (1-\alpha)\ln(1-\alpha) - \\ &- (\rho-1)\ln(\rho-1)) + O(1). \end{aligned}$$

Поэтому
$$V = \frac{1}{\sqrt{d}} 2^{-dh_\rho(\alpha)+O(1)},$$
где
$$h_\rho(\alpha) = (\rho-\alpha) - (\rho-\alpha)\log_2(\rho-\alpha) + (1-\alpha)\log_2(1-\alpha) + (\rho-1)\log_2(\rho-1).$$
Поскольку производная этой функции $h'_\rho(\alpha) = \log_2 \frac{\rho-\alpha}{2(1-\alpha)} > 0$ при $\alpha \in (2-\rho, 1)$, причем $h'_\rho(2-\rho) = 0$, то $h_\rho(\alpha) > h_\rho(2-\rho) = 0$ для всех $\alpha \in (2-\rho, 1)$. Следовательно, для любых $\rho > 1$ и $\alpha > \max(0, 2-\rho)$ получаем, что $V \longrightarrow 0$ при $d \to \infty$, откуда с учетом (3.7) и (3.8) получаем доказываемое утверждение.

3) В предположении (3.6), используя указанную в (3.2) нижнюю оценку вероятности $\mathrm{Prob}^*(d, n, k)$, имеем, что
$$\mathrm{Prob}^*(d, \lfloor \rho d \rfloor, \lfloor \alpha d \rfloor) \geqslant 1 - Z, \tag{3.9}$$
где $Z = \binom{n}{k} W_{n-d,n-k}$, причем
$$\binom{n-k-1}{i-1} : \binom{n-k-1}{i} = \frac{i}{(\rho-\alpha)d + \varepsilon - \tau - i} \leqslant \frac{\rho-1}{1-\alpha}$$
для всех $i \in \overline{1, n-d-1}$. Если[5] $0 < \alpha < 2-\rho$, то $\delta = \frac{\rho-1}{1-\alpha} < 1$ и, следовательно,
$$Z \leqslant 2^{-n+k+1} \binom{n}{k} \binom{n-k-1}{n-d-1} (1 + \delta + \delta^2 + \dots) = \frac{1}{1-\delta} R, \tag{3.10}$$
где $R = 2^{-n+k+1} S$, $S = \binom{n}{k}\binom{n-k-1}{n-d-1}$. Далее,
$$\begin{aligned}
\ln S = \ln n! - \ln k! - \ln(n-d-1)! - \ln(d-k)! - \ln(n-k) = \\
= \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n - \left(k + \frac{1}{2}\right)\ln k - \left(n - d - \frac{1}{2}\right)\ln(n-d-1) - \\
- \left(d - k + \frac{1}{2}\right)\ln(d-k) - \ln(n-k) + O(1) = \left(\rho d - \tau + \frac{1}{2}\right)\ln(\rho d) - \\
- \left(\alpha d - \varepsilon + \frac{1}{2}\right)\ln(\alpha d) - \left((\rho-1)d - \tau - \frac{1}{2}\right)\ln((\rho-1)d) - \\
- \left((1-\alpha)d + \varepsilon + \frac{1}{2}\right)\ln((1-\alpha)d) - \ln((\rho-\alpha)d) + O(1) = \\
= -\ln d + d(\rho\ln\rho - (\rho-1)\ln(\rho-1) - \alpha\ln\alpha - (1-\alpha)\ln(1-\alpha)) + O(1).
\end{aligned}$$
Поэтому
$$R = \frac{1}{d} 2^{-d(u(\rho)-v(\alpha))+O(1)}, \tag{3.11}$$
где
$$u(\rho) = \rho - \rho\log_2\rho + (\rho-1)\log_2(\rho-1), \quad v(\alpha) = \alpha - \alpha\log_2\alpha - (1-\alpha)\log_2(1-\alpha).$$

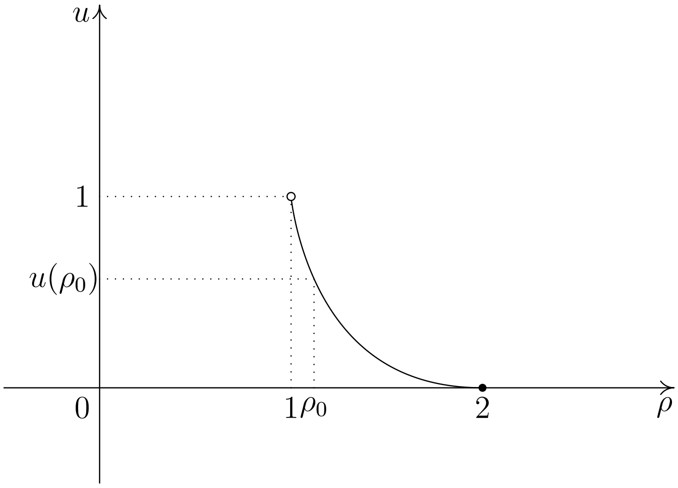

Рис. 3.1.

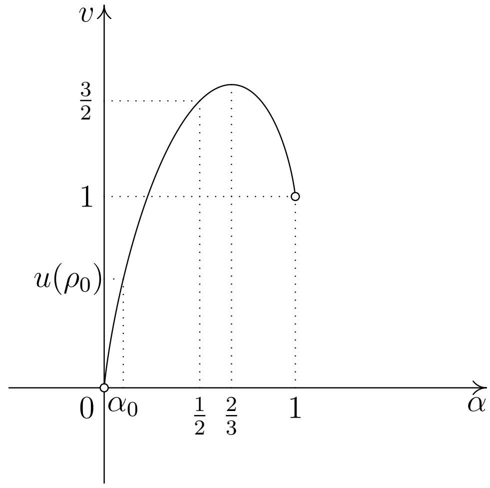

Рис. 3.2.

Графики этих функций, приведенные на рис. 3.1 и 3.2, получены с помощью результатов их стандартного исследования с помощью производной:

$$\lim_{\rho\to 1+0} u(\rho)=1,\quad u(2)=0,$$

$$u'(\rho)=\log_2\frac{2(\rho-1)}{\rho}\begin{cases}<0, & \text{если } \rho\in(1,2),\\ =0, & \text{если } \rho=2,\end{cases}$$

$$\lim_{\alpha\to +0} v(\alpha)=0,\quad v\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2},\quad \lim_{\alpha\to 1+0} v(\alpha)=1,$$

$$v'(\alpha)=\log_2\frac{2(1-\alpha)}{\alpha}\begin{cases}>0, & \text{если } \alpha\in\left(0,\frac{2}{3}\right),\\ =0, & \text{если } \alpha=\frac{2}{3},\\ <0, & \text{если } \alpha\in\left(\frac{2}{3},1\right).\end{cases}$$

Из этих графиков видно, что для всякого $\rho_0\in(1,2)$ найдется такое $\alpha_0\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$, что $v(\alpha_0)=u(\rho_0)$ и $u(\rho_0)>v(\alpha)$ при $\alpha\in(0,\alpha_0)$.

Докажем, что $\alpha_0<2-\rho_0$, проверив, что если $\rho\in(1,2)$ и $v(\alpha)=u(\rho)$, то $v(2-\rho)>v(\alpha)$. Достаточно убедиться в справедливости неравенства $v(2-\rho)>u(\rho)$ для всех $\rho\in(1,2)$. С этой целью, исследуя функцию $w(\rho)=v(2-\rho)-u(\rho)$, заметим, что

$$\lim_{\rho\to 1+0} w(\rho)=\lim_{\rho\to 2-0} w(\rho)=0,$$

$$w'(\rho)=\log_2\frac{\rho(2-\rho)}{4(\rho-1)^2}\begin{cases}>0, & \text{если } \rho\in\left(1,1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right),\\ =0, & \text{если } \rho=1+\frac{1}{\sqrt{5}},\\ <0, & \text{если } \rho\in\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}},2\right),\end{cases}$$

[5]Значения α, удовлетворяющие неравенствам $0<\alpha<2-\rho$, существуют лишь при $\rho<2$. Так что дальнейшие рассуждения имеют смысл лишь для $\rho\in(1,2)$.

откуда следует, что $w(\rho) > 0$ для всех $\rho \in (1, 2)$.

Учитывая (3.9)–(3.11), получаем, что для любого $\rho \in (1, 2)$ можно подобрать $\alpha_0 = \alpha_0(\rho) \in (0, \min(1/2, 2-\rho))$, такое, что для всякого $\alpha \in (0, \alpha_0)$ будем иметь $\mathrm{Prob}^*(d, \lfloor \rho d \rfloor, \lfloor \alpha d \rfloor) \longrightarrow 1$ при $d \to \infty$, причем $\alpha_0(\rho)$ является единственным решением уравнения $v(\alpha) = u(\rho)$.

4) Положив $n = d + m$ ($m \in \mathbb{N}$) и $k = \lfloor \alpha d \rfloor = \alpha d - \varepsilon$ ($0 < \alpha \leqslant 1/2$, $0 \leqslant \varepsilon < 1$), с учетом нижней оценки вероятности $\mathrm{Prob}^*(d, n, k)$, содержащейся в (3.2), и неравенства $m - 1 \leqslant (n - k - 1)/2$, выполняющегося для достаточно больших d, находим, что

$$\mathrm{Prob}^*(d, d+m, \lfloor \alpha d \rfloor) \geqslant 1 - Z, \tag{3.12}$$

где

$$Z = \binom{n}{k} W_{n-d, n-k} \leqslant mF, \tag{3.13}$$

$$F = 2^{-n+k+1} G, \quad G = \binom{n}{k} \binom{n-k-1}{m-1}.$$

Далее,

$$\begin{aligned}
\ln G = \ln n! - \ln k! - \ln(d-k)! - \ln(n-k) + O(1) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - \\
- \left(k + \frac{1}{2}\right) \ln k - \left(d - k + \frac{1}{2}\right) \ln(d-k) - \ln(n-k) + O(1) = \\
= \left(d + m + \frac{1}{2}\right) \ln d - \left(\alpha d - \varepsilon + \frac{1}{2}\right) \ln(\alpha d) - \\
- \left((1-\alpha)d + \varepsilon + \frac{1}{2}\right) \ln((1-\alpha)d) - \ln((1-\alpha)d) + O(1) = \\
= \left(m - \frac{3}{2}\right) \ln d + d(-\alpha \ln \alpha - (1-\alpha)\ln(1-\alpha)) + O(1).
\end{aligned}$$

Поэтому

$$F = d^{m-\frac{3}{2}} 2^{-dg(\alpha)+O(1)}, \tag{3.14}$$

где $g(\alpha) = 1 - \alpha + \alpha \log_2 \alpha + (1-\alpha)\log_2(1-\alpha)$. Поскольку производная этой функции $g'(\alpha) = \log_2 \frac{\alpha}{2(1-\alpha)} < 0$ при $\alpha \in (0, 1/2]$, причем $\lim\limits_{\alpha \to +0} g(\alpha) = 1$ и $g(1/2) = -1/2$, то существует единственное $\alpha_1 \in (0, 1/2)$, для которого $g(\alpha_1) = 0$ и $g(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \alpha_1)$.

В силу (3.12)–(3.14) тем самым доказано существование такого $\alpha_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, что для любого фиксированного m и любого $\alpha \in (0, \alpha_1)$ имеем $\mathrm{Prob}^*(d, d+m, \lfloor \alpha d \rfloor) \longrightarrow 1$ при $d \to \infty$, причем α_1 является единственным решением уравнения $g(\alpha) = 0$.

Для завершения доказательства остается заметить, что 6) непосредственно следует из 4), а часть утверждения 5), относящаяся к случаю $1 < \rho < 2$, — из 3). Вторая его часть, относящаяся к случаю $\rho > 2$, обосновывается рассуждением, аналогичным доказательству 2). $\square$

Замечание 3.2. Внесем в формулировку теоремы 3.2 единственное изменение: потребуем, чтобы абсолютно симметричное вероятностное пространство $\mathcal{P}_{d,n}$ было с пространством исходов $\mathrm{LinConf}(X^n_{d,n})$, а не $X^n_{d,n}$. Покажем, что полученное при этом утверждение также является верным. По вероятностному пространству $\mathcal{P}_{d,n} = (\Omega, \mathcal{B}_{d,n}, \mathbb{P}_{d,n})$ из его условия, где $\Omega = \mathrm{LinConf}(X^n_{d,n})$, построим новое абсолютно симметричное вероятностное пространство $\widetilde{\mathcal{P}} = (\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{B}}, \widetilde{\mathbb{P}})$, положив $\widetilde{\Omega} = X^n_{d,n}$, $\widetilde{\mathcal{B}} = \{B \in \mathcal{B}(\widetilde{\Omega}) \mid B \cap \Omega \in \mathcal{B}_{d,n}\}$ и $\widetilde{\mathbb{P}}(B) = \mathbb{P}(B \cap \Omega)$ для всех $B \in \widetilde{\mathcal{B}}$. Ввиду леммы 2.10 из [6] и теоремы 3.2,

$$\mathrm{CN}^I_0(\widetilde{\Omega}) \cap \Omega = \mathrm{CN}^I_0(\widetilde{\Omega}) \in \mathcal{B}, \quad \mathrm{CN}^I_0(\widetilde{\Omega}) \in \widetilde{\mathcal{B}},$$
$$\mathrm{CN}_k(\widetilde{\Omega}) \in \widetilde{\mathcal{B}}, \quad \mathrm{CN}_k(\widetilde{\Omega}) \cap \Omega = \mathrm{CN}_k(\widetilde{\Omega}) \in \mathcal{B},$$

причем $\mathbb{P}(\mathrm{CN}_k(\widetilde{\Omega})) = \widetilde{\mathbb{P}}(\mathrm{CN}_k(\widetilde{\Omega}))$. Обоснование утверждения завершается применением теоремы 3.2.

Пусть $d, n \in \mathbb{N}$; $n > d$; $\mathcal{P} = (\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство, где $\Omega = X^n$, удовлетворяющее следующим двум условиям:

($\mathfrak{L}$) $\mathrm{LinConf}(\Omega) \in \mathcal{B}$;

($\mathfrak{PL}$) $\mathbb{P}(\mathrm{LinConf}(\Omega)) = 1$.

Тогда под *гейловским подпространством* вероятностного пространства $\mathcal{P}$ условимся понимать тройку $\mathcal{P}' = (\Omega', \mathcal{B}', \mathbb{P}')$, где

1) $\Omega' = \mathrm{LinConf}(\Omega)$;

2) $\mathcal{B}'$ является множеством всех $B \in \mathcal{B} \cap \mathcal{B}(\Omega')$, обладающих свойством:

   ($\mathfrak{T}$) для любых $b \in B$, $a \in \Omega'$ из $a\ \theta_T\ b$ следует, что $a \in B$;

3) $\mathbb{P}' : \mathcal{B}' \to [0, 1]$ — функция, действующая следующим образом: $\mathbb{P}'(B) = \mathbb{P}(B)$ для всех $B \in \mathcal{B}'$.

Замечание 3.3. Пусть $d, n \in \mathbb{N}$; $n > d$ и вероятностное пространство $\mathcal{P} = (\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, где $\Omega = X^n$, абсолютно симметрично. Тогда условие ($\mathfrak{L}$) влечет за собой условие ($\mathfrak{PL}$) ввиду включений $\mathrm{LinGeP}(\Omega) \subseteq \mathrm{LinConf}(\Omega) \subseteq \Omega$. Кроме того, если вероятностное пространство $\mathcal{P} = (\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ таково, что $\mathcal{B}$ — борелевская σ-алгебра в Ω, то условие ($\mathfrak{L}$) выполнено в силу леммы 2.2, а для гейловского подпространства $\mathcal{P}' = (\Omega', \mathcal{B}', \mathbb{P}')$ вероятностного пространства $\mathcal{P}$ σ-алгебра $\mathcal{B}'$ является множеством всех борелевских подмножеств в Ω', обладающих свойством ($\mathfrak{T}$).

Лемма 3.3. *Пусть $d, n \in \mathbb{N}$; $n > d$; $X \subseteq \mathbb{R}^d$ — подмножество, являющееся θ_T-насыщенным; $\mathcal{P} = (\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ — абсолютно симметричное вероятностное пространство, где $\Omega = X^n$, удовлетворяющее условию ($\mathfrak{L}$). Тогда гейловское подпространство $\mathcal{P}' = (\Omega', \mathcal{B}', \mathbb{P}')$ вероятностного пространства $\mathcal{P}$ является векторно гейловским и абсолютно симметричным вероятностным пространством.*

Доказательство. Ввиду замечания 3.3, вероятностное пространство $\mathcal{P}$ удовлетворяет условию ($\mathfrak{PL}$). Ясно, что $\mathcal{P}'$ является вероятностным пространством. Из условия леммы и определения $\mathcal{P}'$ видно, что $\mathcal{P}'$ векторно гейловское. Далее, с учетом леммы 3.8 из [6] находим, что множество $\mathrm{LinGeP}(\Omega') = \mathrm{LinGeP}(\Omega) \in \mathcal{B} \cap \mathcal{B}(\Omega')$ обладает свойством $(\mathfrak{T})$ и $\mathbb{P}'(\mathrm{LinGeP}(\Omega')) = \mathbb{P}(\mathrm{LinGeP}(\Omega)) = 1$. Доказательство абсолютной симметричности $\mathcal{P}'$ завершается использованием наряду с абсолютной симметричностью $\mathcal{P}$ следующего очевидного факта: если $a \in \mathrm{LinConf}(\mathbb{R}^{d,n})$ и $\sigma \in \mathrm{U}_2^n$, то $\sigma a \in \mathrm{LinConf}(\mathbb{R}^{d,n})$. □

Замечание 3.4. Роль теорем 3.1 и 3.2 двоякая. Во-первых, утверждения 5) и 6) теоремы 3.2 подтверждают справедливость гипотезы $(\mathrm{G})_k^*$ (см. [6]) для произвольного $k \geqslant 1$ при некоторых способах согласованного роста параметров n и d, а утверждения 3) и 4) содержат более сильные результаты. Изучение вероятности $\mathrm{Prob}^*(d,n,k)$ и гипотезы $(\mathrm{G})_k^*$ представляет самостоятельный интерес, так как случайный выбор системы точек в $\bar{\mathbb{S}}_{m-1}$, где $n \geqslant m+2$, предназначенной для последующего применения конструкции Гейла, может рассматриваться как способ случайного порождения многогранника в $\mathbb{R}^{n-m-1}$. В отличие от теоремы 3.1 теорема 3.2 является результатом, не зависящим от распределения (в указанном выше смысле). Однако, например, при $m = 1$ оценка вероятности $\mathrm{Prob}^*(d,n,k)$ в теореме 3.1 сильнее ее нижней оценки в теореме 3.2. Во-вторых, с использованием теоремы 3.2 и двойственности вероятностных пространств (см. теорему 3.1 из [6]) доказывается

Теорема 3.3. *Пусть* $d, n, k \in \mathbb{N}$; $n > d$; $k \leqslant \lfloor d/2 \rfloor$; $X_{d,n}$ *— облачное подмножество в* $\mathbb{R}^d$ *и* $\mathcal{P}_{d,n}$ *— абсолютно симметричное вероятностное пространство с пространством исходов* $X_{d,n}^n$, *удовлетворяющее условиям* $(\mathfrak{L})$ *и*

$(\mathfrak{VN})$ $\mathrm{VN}_0^I(X_{d,n}^n)$ *является событием для всех* $I \in S(n,k)$.

Тогда множество всех векторно k*-смежностных систем точек* $a \in X_{d,n}^n$ *является событием, для вероятности* $\mathrm{Prob}(d,n,k)$ *которого имеют место утверждения 1)–6), получающиеся из утверждений 1)–6) теоремы 3.2 заменой* Prob^* *на* Prob.

Доказательство. Положим $X = X_{d,n}$ и $\mathcal{P} = (\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P}) = \mathcal{P}_{d,n}$. Покажем, что, не ограничивая общности, можно считать, что $0 \in X$. Действительно, если $0 \notin X$, то, во-первых, учитывая замечание 3.1 из [6], можно построить новое абсолютно симметричное вероятностное пространство $\mathcal{P}^{(0)} = (\Omega^{(0)}, \mathcal{B}^{(0)}, \mathbb{P}^{(0)})$, положив $\Omega^{(0)} = (X \cup \{0\})^n$, $\mathcal{B}^{(0)} = \{B \in \mathcal{B}(\Omega^{(0)}) \mid B \cap \Omega \in \mathcal{B}\}$ и $\mathbb{P}^{(0)}(B) = \mathbb{P}(B \cap \Omega)$ для всех $B \in \mathcal{B}^{(0)}$, удовлетворяющее условию $(\mathfrak{L})$, и, во-вторых,

$$\mathrm{VN}_0^I(\Omega^{(0)}) \cap \Omega = \mathrm{VN}_0^I(\Omega), \quad \mathrm{VN}_k(\Omega^{(0)}) \cap \Omega = \mathrm{VN}_k(\Omega),$$
$$\mathbb{P}^{(0)}(\mathrm{VN}_k(\Omega^{(0)})) = \mathbb{P}(\mathrm{VN}_k(\Omega)).$$

Итак, будем считать, что $0 \in X$. Тогда X является θ_T-насыщенным подмножеством в $\mathbb{R}^d$. По лемме 3.3 гейловское подпространство $\mathcal{P}' = (\Omega', \mathcal{B}', \mathbb{P}')$ вероятностного пространства $\mathcal{P}$ является векторно гейловским и абсолютно симметричным вероятностным пространством. Ввиду леммы 3.8 из [6],

$$\mathrm{VN}_0^I(\Omega) \cap \Omega' \in \mathcal{B}' \tag{3.15}$$

для всех $I \in S(n,k)$, откуда с учетом равенства $\mathrm{VN}_k(\mathbb{R}^{d,n}) = \bigcap_{I \in S(n,k)} \mathrm{VN}_0^I(\mathbb{R}^{d,n})$ и леммы 3.8 из [6] выводим, что $\mathrm{VN}_k\,\mathrm{LinConf}(\Omega) = \mathrm{VN}_k(\Omega) \cap \Omega' \in \mathcal{B}'$ и, следовательно,

$\mathbb{P}'(\mathrm{VN}_k \operatorname{LinConf}(\Omega)) = \mathbb{P}(\mathrm{VN}_k \operatorname{LinConf}(\Omega)) = \mathbb{P}(\mathrm{VN}_k(\Omega))$. Положив $Y = \mathbb{R}^m$, рассмотрим Y-двойственное к $\mathcal{P}'$ вероятностное пространство $(\mathcal{P}')^*_Y = ((\Omega')^*, (\mathcal{B}')^*, (\mathbb{P}')^*)$ и привлечем теорему 3.1 из [6]. В частности, с помощью леммы 3.10 из [6] и (3.15) получаем, что $\mathrm{CN}_0^I(Y^n) \in (\mathcal{B}')^*$ для всех $I \in S(n,k)$ и, кроме того, $\mathbb{P}'(\mathrm{VN}_k \operatorname{LinConf}(\Omega)) = (\mathbb{P}')^*(\mathrm{CN}_k(Y^n))$. Доказательство завершается применением версии теоремы 3.2, отмеченной в замечании 3.2, к вероятностному пространству $(\mathcal{P}')^*_Y$. $\square$

Замечание 3.5. Условия теоремы 3.3 выполнены в следующих трех важных частных случаях:

1) в множестве $\mathbb{R}^d$ выбираются n случайных точек ($n > d$) независимо в соответствии с некоторым распределением $\mathbb{P}_d$, симметричным относительно точки 0 и абсолютно непрерывным относительно меры Лебега на $\mathbb{R}^d$ (например, d-мерным нормальным распределением с нулевым вектором средних);

2) в множестве $X_d = K_d$, где K_d — центрально симметричное (с центром в точке 0) выпуклое тело[6] в $\mathbb{R}^d$ (например, d-мерный единичный шар $\mathbb{B}_d$), выбираются n случайных точек ($n > d$) независимо в соответствии с некоторым распределением $\mathbb{P}_d$, симметричным относительно точки 0 и абсолютно непрерывным относительно меры Лебега на K_d (например, равномерным распределением на $\mathbb{B}_d$);

3) в множестве $X_d = \partial K_d$, где ∂K_d — центрально симметричная (с центром в точке 0) выпуклая поверхность в $\mathbb{R}^d$ (например, сфера $\mathbb{S}_{d-1}$), выбираются n случайных точек ($n > d$) независимо в соответствии с некоторым распределением $\mathbb{P}_d$, симметричным относительно точки 0 и абсолютно непрерывным относительно поверхностной меры[7] на ∂K_d (например, равномерным распределением на $\mathbb{S}_{d-1}$).

При этом, продолжая комментарии к формулировкам теорем 3.2 и 3.3, приведенные во введении, отметим следующее. Если $d, n, k \in \mathbb{N}$ фиксированы, то в каждом из этих трех случаев справедливо утверждение 1) теоремы 3.3. Для выполнения утверждений 2)–6) теоремы 3.3 необходимо, скажем, в случае 3) задавать последовательность выпуклых поверхностей $(X_d)_{d\in\mathbb{N}}$ и выбирать $n(d)$ случайных точек в X_d в соответствии с распределением $\mathbb{P}_d$ из заданной последовательности $(\mathbb{P}_d)_{d\in\mathbb{N}}$ (конкретный вид функции $n(d)$ указан в формулировке каждого из утверждений 2)–6)).

Замечание 3.6. Утверждения 5) и 6) теоремы 3.3 с учетом леммы 2.9 подтверждают справедливость гипотезы Гейла $(\mathrm{G})_k$ для произвольного $k \geqslant 1$ при некоторых способах согласованного роста параметров n и d, а утверждения 3) и 4) содержат более сильные результаты. В частности, доказана гипотеза $(\mathrm{G}(\mathbb{S}_{d-1}))_k$ для любого $k \geqslant 1$ (этот результат не был известен даже в случае равномерного распределения на $\mathbb{S}_{d-1}$).

[6]Компактное выпуклое подмножество $K \subseteq \mathbb{R}^d$ с непустой внутренностью называется *выпуклым телом* [10] в $\mathbb{R}^d$, а его граница ∂K — *выпуклой поверхностью* [8] в $\mathbb{R}^d$.

[7]*Поверхностной мерой* на ∂K [1] называется сужение $(d-1)$-мерной меры Хаусдорфа на борелевскую σ-алгебру в ∂K.

Замечание 3.7. В отличие от ранее известных подтверждений гипотезы Гейла и ее усиленных версий, теорема 3.3 является результатом, не зависящим от распределения. Утверждения 2),3) теоремы 3.3 показывают, что в случае векторной k-смежностности при линейно согласованном росте параметров n и d не получается фазовый переход такого же вида, как в случае k-смежностности (см. (1.1)). В частности, в силу утверждения 2) порог отсутствует при $\rho > 2$. Аналогичное явление обнаружили Д.Л. Донохью и Д. Таннер [22] при изучении некоторого фазового перехода, связанного со случайными зонотопами, причем при таком же условии $\rho > 2$.

Список литературы

1. Богачев В.И. Основы теории меры. Т. 1, 2. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003.

2. Бондаренко В.А. Полиэдральные графы и сложность в комбинаторной оптимизации. Ярославль: ЯрГУ, 1995.

3. Бондаренко В.А., Бродский А.Г. О случайных 2-смежностных 0/1-многогранниках // Дискретная математика. 2008. Т. 20, №1. С. 64–69.

4. Бродский А.Г. О 2-смежностных многогранниках и конструкции Гейла // Моделирование и анализ информационных систем. 2009. Т. 16, №2. С. 5–21.

5. Бродский А.Г. О двойственности Гейла и k-смежностных случайных многогранниках // Заметки по информатике и математике: сб. науч. ст. Вып. 2 / отв. ред. А.Н. Морозов; Яросл. гос. ун-т им. П.Г. Демидова. Ярославль: ЯрГУ, 2010. С. 28-33.

6. Бродский А.Г. Двойственность Гейла и смежностность случайных многогранников. I // Моделирование и анализ информационных систем. 2012. Т. 19. №2. С. 62–86.

7. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. М.: Мир, 1998.

8. Хадвигер Г. Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии. М.: Наука, 1966.

9. Adamczak R., Litvak A.E., Pajor A., Tomczak-Jaegermann N. Restricted isometry property of matrices with independent columns and neighborly polytopes by random sampling. Preprint, 34 p., available at arXiv:0904.4723v1 [math.PR] 30 Apr 2009.

10. Bárány I. Random points and lattice points in convex bodies // Bulletin of the American Mathematical Society. 2008. V. 45, №3. P. 339–365.

11. Bárány I., Füredi Z. On the shape of the convex hull of random points // Probability Theory and Related Fields. 1988. V. 77, №2. P. 231–240.

12. Buchta C. On a conjecture of R.E. Miles about the convex hull of random points // Monatshefte für Mathematik. 1986. V. 102. P. 91–102.

13. Candes E., Rudelson M., Tao T., Vershynin R. Error correction via linear programming // Proceedings of the 46th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS 2005), IEEE. 2005. P. 295–308.

14. Candes E., Tao T. Near optimal signal recovery from random projections and universal encoding strategies // IEEE Transactions on Information Theory. 2004. V. 52. P. 5406–5425.

15. Candes E., Tao T. Decoding by linear programming // IEEE Transactions on Information Theory. 2005. V. 51, №12. P. 4203–4215.

16. Donoho D.L. Neighborly polytopes and sparse solution of underdetermined linear equations. Preprint, 21 p., available at `http://www-stat.stanford.edu/~donoho/Reports/2005/NPaSSULE-01-28-05.pdf`.

17. Donoho D.L. High-dimensional centrally-symmetric polytopes with neighborliness proportional to dimension // Discrete and Computational Geometry. 2006. V. 35, №4. P. 617–652.

18. Donoho D.L., Tanner J. Sparse nonnegative solution of underdetermined linear equations by linear programming // Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA. 2005. V. 102, №27. P. 9446–9451.

19. Donoho D.L., Tanner J. Neighborliness of randomly-projected simplices in high dimensions // Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA. 2005. V. 102, №27. P. 9452–9457.

20. Donoho D.L., Tanner J. Counting faces of randomly-projected polytopes when the projection radically lowers dimension // Journal of the American Mathematical Society. 2009. V. 22, №1. P. 1–53.

21. Donoho D.L., Tanner J. Observed universality of phase transitions in high-dimensional geometry, with implications for modern data analysis and signal processing // Philosophical Transactions of the Royal Society. Ser. A. 2009. V. 367. P. 4273–4293.

22. Donoho D.L., Tanner J. Counting the faces of randomly-projected hypercubes and orthants, with applications // Discrete and Computational Geometry. 2010. V. 43, №3. P. 522–541.

23. Donoho D.L., Tanner J. Exponential bounds implying construction of compressed sensing matrices, error-correcting codes and neighborly polytopes by random sampling // IEEE Transactions on Information Theory. 2010. V. 56, №4. P. 2002–2016.

24. Gale D. Neighboring vertices on a convex polyhedron // Linear inequalities and related systems / H.W. Kuhn, A.W. Tucker, Eds. (Annals of Mathematics Studies. №38). Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1956. P. 255–263. Имеется русский перевод: Гейл Д. Соседние вершины на выпуклом многограннике // Линейные неравенства и смежные вопросы / Под ред. Г.У. Куна и А.У. Таккера. М.: ИЛ, 1959. С. 355–362.

25. Gillmann R. 0/1-polytopes: typical and extremal properties. Dissertation. Berlin: Technische Universität Berlin, 2007. 125 p.

26. Grünbaum B. Convex polytopes (Graduate Texts in Mathematics. V. 221). Second edition prepared by V. Kaibel, V. Klee and G.M. Ziegler. New York: Springer, 2003.

27. Mendelson S., Pajor A., Tomczak-Jaegermann N. Reconstruction and subgaussian operators in asymptotic geometric analysis // Geometric and Functional Analysis. 2007. V. 17, №4. P. 1248–1282.

28. Reitzner M. Random polytopes // New perspectives in stochastic geometry / W.S. Kendall, I. Molchanov, Eds. Oxford: Oxford University Press, 2010. P. 45–76.

29. Rudelson M., Vershynin R. Geometric approach to error correcting codes and reconstruction of signals // International Mathematical Research Notices. 2005. V. 64. P. 4019–4041.

30. Schneider R. Discrete aspects of stochastic geometry // Handbook of discrete and computational geometry / J.E. Goodman, J. O'Rourke, Eds. (second edition). Boca Raton (Florida): Chapman & Hall / CRC Press, 2004. P. 255–278.

31. Schneider R. Recent results on random polytopes // Bollettino dell'Unione Matematica Italiana. Sez. B. 2008. V. 1. P. 17–39.

32. Schneider R., Weil W. Stochastic and integral geometry (Probability and its Applications). Berlin-Heidelberg: Springer, 2008.

33. Vershik A.M., Sporyshev P.V. Asymptotic behavior of the number of faces of random polyhedra and the neighborliness problem // Selecta Mathematica Sovietica. 1992. V. 11, №2. P. 181–201.

34. Wendel J.G. A problem in geometric probability // Mathematica Scandinavica. 1962. V. 11. P. 109–111.

Gale Duality and the Neighborliness of Random Polytopes. II

Brodskiy A.G.

Keywords: k-neighborly polytope, probability space, random points, random polytope, distribution-independent property

We have obtain of some distribution-independent results on the k-neighborliness of random polytopes. They confirm the well-known Gale conjecture for the general case.

Сведения об авторе:
Бродский Алексей Германович,
ООО «Яндекс»,
руководитель службы разработки