Моделирование и анализ информационных систем. Т. 24, № 2 (2017), с. 168–185
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 24, No 2 (2017), pp. 168–185

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-2-168-185
УДК 517.9

О бифуркациях при малых возмущениях в логистическом уравнении с запаздыванием

Кащенко С. А.

получена 12 января 2017

Аннотация. В статье рассматриваются бифуркационные задачи для логистического уравнения с запаздыванием при наличии малых возмущений. Наиболее интересны результаты для случая, когда малые возмущения содержат большое запаздывание. В качестве основных результатов получены специальные нелинейные эволюционные нормальной формы уравнения, нелокальная динамика которых определяет поведение решений исходного уравнения в малой окрестности состояния равновесия или цикла. Как оказывается, принципиальное значение имеет порядок величины большого запаздывания. Для наиболее простого случая, когда этот порядок совпадает с величиной, обратной к фигурирующему в уравнении малому параметру, нормальная форма представляет собой комплексное уравнение с запаздыванием. В том случае, когда порядок коэффициента запаздывания еще выше, в качестве нормальной формы выступает многопараметрическое семейство специальных краевых задач вырожденно-параболического типа. Все это позволяет сделать вывод о том, что в рассматриваемых задачах с большим запаздыванием характерно явление мультистабильности.

Ключевые слова: нелинейная динамика, бифуркации, асимптотическое представление

Для цитирования: Кащенко С. А., "О бифуркациях при малых возмущениях в логистическом уравнении с запаздыванием", *Моделирование и анализ информационных систем*, **24**:2 (2017), 168–185.

Об авторах:
Кащенко Сергей Александрович, orcid.org/0000-0002-8777-4302, д-р физ.-мат. наук, профессор,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: kasch@uniyar.ac.ru

Введение

Логистическое уравнение с запаздыванием

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda[1 - u(t - T)]u \quad (\lambda > 0, \quad T > 0) \tag{1}$$

принадлежит к числу фундаментальных уравнений математической экологии. Исследованию решений этого уравнения посвящена значительная литература [1–8]. Напомним простейшие свойства решений этого уравнения. Через $C_{[-T,0]}$ ниже обозначается пространство непрерывных на отрезке $[-T, 0]$ функций со стандартной нормой. Это пространство примем в качестве фазового, т. е. пространства начальных условий уравнения (1).

Перечислим ряд утверждений о решениях уравнения (1). Простые доказательства их будем опускать.

1. Для уравнения (1) имеет место теорема существования и единственности решений, т. е. для каждого значения t_0 и каждой начальной функции $\varphi(s) \in C_{[-T,0]}$ при всех $t > t_0$ существует и единственно решение $u(t, \varphi)$ уравнения (1), для которого $u(t_0 + s, \varphi) = \varphi(s)$.

2. При условии $\varphi(s) \geqslant 0$ выполнено неравенство $u(t, \varphi) \geqslant 0$ $(t \geqslant t_0)$, а при условии $\varphi(0) > 0$ имеет место строгое неравенство $u(t, \varphi) > 0$ $(t \geqslant t_0)$. В дальнейшем термин «решение» применяется только к неотрицательным решениям (1) и соответственно начальные функции $\varphi(s)$ предполагаются неотрицательными.

3. Линеаризованное в окрестности состояние равновесия $u \equiv 0$ уравнение (1) имеет вид

$$\dot{u} = \lambda u.$$

Отсюда следует, что при всех $\lambda > 0$ нулевое состояние равновесия неустойчиво.

Уравнение (1) имеет состояние равновесия $u_0 \equiv 1$. Линеаризуем на нем это уравнение. Тогда получим уравнение

$$\dot{v} = -\lambda v(t - T). \tag{2}$$

Его характеристический квазиполином имеет вид

$$\mu = -\lambda \exp(-\mu T). \tag{3}$$

Из отрицательности вещественных частей всех корней этого уравнения следует асимптотическая устойчивость решений (2), а значит, и асимптотическая устойчивость состояния равновесия u_0 уравнения (1). Если же имеется корень (3) с положительной вещественной частью, то решение (2) и решение u_0 в (1) неустойчивы.

4. Для отрицательности вещественных частей всех корней (3) необходимо и достаточно выполнение неравенств

$$0 < \lambda T < \frac{\pi}{2}. \tag{4}$$

Докажем это утверждение. Сначала отметим, что при всех достаточно малых и положительных λ все корни (3) имеют отрицательные вещественные части. Действительно, при $\lambda = 0$ имеется нулевой корень $\mu_0 = 0$ (а вещественные части всех остальных корней «равны» $-\infty$). При малых λ уравнение (3) имеет такой корень $\mu_0(\lambda)$, что $\mu_0(0) = (0)$. Тогда

$$\left.\frac{d\mu_0(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} = -1.$$

Отсюда следует, что при всех малых положительных λ для всех корней (3) выполнено неравенство $\operatorname{Re} \mu < 0$.

Заметим, что при $\lambda > 0$ корень уравнения (3) не может обратиться в нуль. Пусть при некотором значении $\lambda = \lambda_0$ уравнение (3) имеет пару чисто мнимых корней $\mu_{1,2}(\lambda_0) = \pm i\sigma$, т. е.

$$i\sigma = -\lambda \exp(-i\sigma T).$$

Отсюда получаем, что

$$\lambda \cos(\sigma T) = 0 \quad \text{и} \quad \sigma = \lambda \sin \sigma T.$$

Из первого уравнения находим, что $\sigma = (\pi n + \pi/2)T^{-1}$ $(n = 0, 1, \ldots)$, а из второго тогда приходим к выводу, что n — четное и $\lambda = \lambda_n$ где $\lambda_n T = \pi n + 1/2$. Таким образом, наименьшее из значений λ_n является $\lambda_0 = \pi(2T)^{-1}$. Отсюда следует, что при всех $\lambda \in (0, \lambda_0)$ все корни (3) имеют отрицательные вещественные части.

Последнее, что осталось заметить для завершения обоснования сформулированного выше утверждения, это тот факт, что при увеличении λ корни (3) могут пересекать мнимую ось, двигаясь только из левой комплексной полуплоскости в правую. Действительно, пусть для некоторого корня $\mu(\lambda)$ выполнено условие $\mu(\lambda^0) = i\omega$, а значит, $i\omega = -\lambda^0 \exp(-i\omega T)$. Тогда

$$\mathrm{Re} \left. \frac{d\mu(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda^0} = \omega h [\lambda^0 (1 + \omega^2 T^2)]^{-1} > 0.$$

Утверждение доказано.

5. Отметим еще, что в случае, когда функция $v(t) = u(t) - 1$ является, начиная с некоторого момента t_0, знакопостоянной, то из (1) следует её монотонное (при $t \geqslant t_0 + T$) стремление к нулю при $t \to \infty$. Обратим внимание, что для монотонного стремления к нулю некоторого решения $v(t)$ уравнения (2) необходимо и достаточно, чтобы уравнение (3) имело вещественный отрицательный корень.

Условие существования отрицательного корня в (3) состоит в выполнении неравенств

$$0 < \lambda T \leqslant e^{-1}.$$

6. Уравнение (1) является диссипативным: при достаточно больших t каждое решение $u(t)$ этого уравнения удовлетворяет неравенству

$$u(t) \leqslant \exp(\lambda T).$$

Действительно, если функция $u(t) - 1$, начиная с некоторого момента времени, знакопостоянна, то $u(t)$ стремится к 1 при $t \to \infty$. Таким образом, необходимо рассмотреть лишь те решения, у которых бесконечно много (при $t \to \infty$) корней уравнения $u(t) = 1$. Локальные максимумы решений u_m реализуются через отрезок времени T после обращения $u(t)$ в 1. Поэтому

$$u_m = \exp[\lambda(1 - \int\limits_{t_m - T}^{t_m} u(s)ds)] \leqslant \exp(\lambda T).$$

В [2, 3, 7] исследовался вопрос об отыскании всех тех значений параметров λ и T, при которых состояние равновесия u глобально устойчиво, т. е. все решения (1) стремятся к 1 при $t \to \infty$. В [2] было показано, что область глобальной устойчивости выделяется неравенствами

$$0 < \lambda T \leqslant \frac{37}{24}. \tag{5}$$

В [3, 7] проведен алгоритм, который допускает улучшение этой оценки. Сразу отметим, что с его помощью определяются оценки сверху всех решений (1) даже при отсутствии глобальной устойчивости состояния равновесия.

В [4] показано, что при всех $\lambda T > \pi/2$ уравнение (1) имеет непостоянное периодическое решение. В том случае, когда λT мало отличается от $\pi/2$, применимы стандартные методы теории бифуркаций. В разделе 1 для уравнения (1) рассмотрена классическая задача о бифуркации Андронова — Хопфа. В разделах 2–4 исследуются бифуркационные задачи, возникающие при малых возмущениях уравнения (1), причем основное внимание уделено ситуации, когда возмущающая нелинейная добавка содержит функцию u с большим запаздыванием. При этом в разделах 2 и 3 речь пойдет о локальном анализе в окрестности состояния равновесия, а в разделе 4 – в окрестности цикла. В разделе 5 в качестве примера приведены результаты для комплексного логистического уравнения с запаздыванием.

1. Бифуркация Андронова — Хопфа

При $\lambda = \lambda_0$ и $T = T_0$, где $\lambda_0 T_0 = \pi/2$, характеристическое уравнение (3) имеет пару чисто мнимых корней $\pm i\sigma : \sigma = \pi(2T_0)^{-1}$, а все остальные корни (3) имеют отрицательные вещественные части. Отсюда заключаем, что уравнение (2) имеет периодические решения,

$$V_0(t) = \xi \exp(i\sigma t) + \bar{\xi} \exp(-i\sigma t),$$

где ξ — произвольная комплексная постоянная.

В задаче об устойчивости состояния равновесия $u_0 = 1$ уравнения (1) при этом возникает критический случай пары чисто мнимых корней, т. е. реализуются условия так называемой бифуркации Андронова – Хопфа. Для изучения решений (1) при λ и T, близких соответственно к λ_0 и T_0, применим стандартные методы теории бифуркаций.

Положим в (1)

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1, \quad T = T_0 + \varepsilon T_1,$$

где λ_1 и T_1 как-то фиксированы, а параметр ε является положительным и достаточно малым:

$$0 < \varepsilon \ll 1.$$

Тогда при всех достаточно малых ε в достаточно малой и не зависящей от ε окрестности состояния равновесия $u_0 = 1$ существует двумерное устойчивое локальное интегральное инвариантное многообразие (см., например, [9, 10]). На этом многообразии уравнение (1) можно записать в виде скалярного комплексного обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dg}{dt} = (\varepsilon\alpha_1 + O(\varepsilon^2))g + (d + O(\varepsilon))g|g|^2 + O(|g|^5). \tag{6}$$

Если $\mathrm{Re}\,\alpha_1 \neq 0$ и $\mathrm{Re}\,d \neq 0$, то в (6)удобно произвести нормировочные замены $g(t) \to \sqrt{\varepsilon}g$, $\tau \to \varepsilon\tau$. Тогда уравнение (6) с точностью до слагаемых порядка $O(\varepsilon)$ принимает вид

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \alpha_1\xi + d\xi|\xi|^2. \tag{7}$$

Решения уравнения (7) и уравнения (1) связаны асимптотической формулой

$$u = 1 + \sqrt{\varepsilon}[\xi(\tau)\exp(i\sigma t) + \bar{\xi}(\tau)\exp(-i\sigma t)]+ \\ + \varepsilon u_2(t,\tau) + \varepsilon^{3/2}u_3(t,\tau) + \dots, \tag{8}$$

где функции $u_j(t,\tau)$ являются периодическими с периодом $2\pi/\sigma$ по первому аргументу.

Для того, чтобы найти коэффициенты α_1 и d, а значит, ответить на вопрос о поведении всех решений (1) в окрестности u_0 при достаточно малых ε, подставим формальный ряд (8) в (1) и будем последовательно приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях ε в левой и правой частях получившегося формального тождества.

На первом шаге, приравнивая коэффициенты при $\varepsilon^{1/2}$, получаем верное равенство, поскольку функция $V_0(t)$ является решением уравнения (2).

На втором шаге соберем коэффициенты при ε^1. В результате получим уравнение для нахождения $u_2(t,\tau)$:

$$\frac{du_2}{dt} = -\lambda_0 u_2(t-T,\tau) - \lambda_0[\xi^2\exp(2i\sigma - i\sigma T)+ \\ + \bar{\xi}^2\exp(-2i\sigma + i\sigma T)].$$

Отсюда получаем, что

$$u_2(t,\tau) = A\xi^2\exp(2i\sigma t) + \bar{A}\bar{\xi}^2\exp(-2i\sigma t)$$

и

$$A = \frac{2-i}{5}.$$

На третьем шаге учитываем коэффициенты при $\varepsilon^{3/2}$. В итоге получаем уравнение для u_3:

$$\dot{u}_3 = -\lambda_0 u_3(t-T,\tau) + A_1\exp(i\sigma t) + A_3\exp(3i\sigma t)+ \\ + \bar{A}_1\exp(-i\sigma t) + \bar{A}_3\exp(-3i\sigma t). \tag{9}$$

Значение коэффициента A_3 несущественно, а для A_1 имеет место формула

$$A_1 = \frac{d\xi}{d\tau} - \alpha_1\xi - d|\xi|^2\xi, \tag{10}$$

где

$$\alpha_1 = (1+\frac{\pi^2}{4})^{-1}[(\frac{\pi}{2}+i)\lambda_1 + \lambda_0^2 T_1(1-i\frac{\pi}{2})], \tag{11}$$

$$d = -\lambda_0[3\pi - 2 + i(\pi+6)](10(1+\frac{4}{\pi^2}))^{-1}. \tag{12}$$

Условие разрешимости уравнения (9) в классе $2\pi/\sigma$ -периодических функций состоит в выполнении равенства $A_1 = 0$. Отсюда, с учетом равенств (10)—(12), приходим к итоговому уравнению (7) с найденными коэффициентами α_1 и d. Уравнение (7) интегрируется в явном виде. Важно отметить, что

$$\operatorname{Re} d < 0. \tag{13}$$

Поэтому при условии $\operatorname{Re}\alpha_1 \leqslant 0$ все решения (7) стремятся к нулю при $\tau \to \infty$. Если же $\operatorname{Re}\alpha_1 > 0$, то уравнение (7) имеет устойчивый цикл

$$\xi_0(\tau) = \xi_0 \exp(i\varphi_0\tau),$$

в котором

$$\xi_0 = [10(\frac{\pi}{2}\lambda_1 + \lambda_0^2 T_1)(3\pi - 2)^{-1}]^{1/2},$$
$$\varphi_0 = \operatorname{Im}\alpha_1 + \xi_0^2 \operatorname{Im} d.$$

Сформулируем итоговый результат.

Теорема 1. *Пусть* $\operatorname{Re}\alpha_1 > 0$. *Тогда при всех достаточно малых* ε *уравнение* (6) *имеет устойчивый цикл* $u_0(t,\varepsilon)$, *для которого имеет место асимптотическое представление*

$$u_0(t,\varepsilon) = 1 + \sqrt{\varepsilon}(\xi_0(\tau)\exp(i\sigma t) + \bar{\xi}_0(\tau)\exp(-i\sigma t)) + \varepsilon u_2(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{3/2}). \tag{14}$$

2. Бифуркация в окрестности состояния равновесия в случае, когда малые возмущения содержат большое запаздывание

Рассматриваются логистические уравнения с запаздыванием и с малым возмущением

$$\dot{u} = \lambda[1 - u(t-T)]u + \varepsilon F(u, u(t-h)), \tag{15}$$

где некоторая нелинейная функция $F(*,*)$ является достаточно гладкой. Для параметра ε, как и выше, выполнено условие $0 < \varepsilon \ll 1$, поэтому последнее слагаемое в (15) означает малое возмущение уравнения (1).

Сначала остановимся на простейшем случае, когда параметр запаздывания h как-то фиксирован, а для коэффициентов λ и T снова выполнены условия

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1, \quad T = T_0 + \varepsilon T_1 \quad \text{и} \quad \lambda_0 T_0 = \frac{\pi}{2}. \tag{16}$$

Выделим главные слагаемые функции $F(u, u(t-h))$ в окрестности значений $u \equiv 1$:

$$F(1+V, 1+V(t-h)) = F(1,1) + aV + bV(t-h) + f(V, V(t-h)), \tag{17}$$

где $f(V, V(t-h)$ имеет в нуле порядок малости не ниже второго.

Уравнение (15) имеет положительное состояние равновесия

$$u_0(\varepsilon) = 1 + \varepsilon\lambda_0^{-1}F(1,1) + O(\varepsilon^2). \tag{18}$$

Линеаризуем (15) на $u_0(\varepsilon)$. Характеристический квазиполином получающегося уравнения имеет вид

$$\mu = -(\lambda_0 + \varepsilon\lambda_1)\exp(-\mu(T_0 + \varepsilon T_1)) + \varepsilon a + \varepsilon b \exp(-\mu h). \tag{19}$$

Этот квазиполином имеет два корня $\mu_1(\varepsilon)$ и $\mu_2(\varepsilon)$, близкие при $\varepsilon \to 0$ к мнимой оси:

$$\mu_{1,2} = \pm i\sigma + O(\varepsilon), \tag{20}$$

а все остальные его корни имеют отрицательные вещественные части, которые отделены от нуля при $\varepsilon \to 0$. Тем самым применимы все результаты предыдущего раздела. Используя в (15) формальное разложение (8), приходим к уравнению на двумерном локальном инвариантном интегральном многообразии

$$\frac{d\xi}{d\tau} = (\alpha_1 + (a+b)(1 - i\frac{\pi}{2})(1 + \frac{\pi^2}{4})^{-1})\xi + d\xi|\xi|^2, \tag{21}$$

где коэффициенты α_1 и d те же, что и в (7). По решениям уравнения (21) с помощью формулы (8) восстанавливаются решения уравнения (15) на рассматриваемом двумерном многообразии и формулируются стандартные (см. Теорему 1) выводы о существовании и устойчивости периодического решения (15).

Более интересна ситуация, когда параметр h в (15) является достаточно большим. Пусть для некоторого фиксированного значения h_1 имеем

$$h = \frac{h_1}{\varepsilon}. \tag{22}$$

Для состояния равновесия $u_0(\varepsilon)$ верна формула (18), а структура корней характеристического квазиполинома (19) меняется существенным образом. Дело в том, что уже бесконечно много корней в (19) стремятся к мнимой оси при $\varepsilon \to 0$. Покажем это.

Положим в (19) $\mu = i\sigma + \varepsilon\mu_1$. Тогда для $\mu_1 = \mu_0 + O(\varepsilon)$ приходим к уравнению

$$\begin{aligned}\mu_1 = [1 - \frac{\pi}{2}\exp(-i\sigma T)]^{-1}[a - (\lambda_1 - i\sigma\lambda_0 T_1)\exp(-i\sigma T_0) + \\ + b\exp(i\varphi(\varepsilon))\cdot\exp(-\mu_1 h_1)].\end{aligned} \tag{23}$$

Здесь $\varphi(\varepsilon) = (-\sigma h_1)\varepsilon^{-1}|_{mod 2\pi}$, $\varphi(\varepsilon) \in [0, 2\pi)$. При $\varepsilon \to 0$ выражение $\varphi(\varepsilon)$ бесконечно много раз изменяется от 0 до 2π.

Уравнение (23), очевидно, имеет счетное множество корней. Отсюда уже просто следует вывод о том, что уравнение (19) имеет бесконечно много корней, которые стремятся к мнимой оси при $\varepsilon \to 0$. Это означает, что в задаче об устойчивости состояния равновесия $u_0(\varepsilon)$ уравнения (15) при условии (22) реализуется критический случай бесконечной размерности. Такого рода критические случаи изучались в работах автора [11, 12].

Применим результаты из [11] для уравнения (15). Снова рассмотрим формальный ряд (3). Подставим его в (15) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях ε, считая, что величина $\varphi = \varphi(\varepsilon)$ фиксирована. Повторяя предыдущие построения, для неизвестной амплитуды $\xi(\tau)$ приходим к уравнению с фиксированным запаздыванием

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{d\tau} = (\alpha_1 + a(1 - i\frac{\pi}{2})(1 + \frac{\pi^2}{4})^{-1})\xi + \\ + b(1 - i\frac{\pi}{2})(1 + \frac{\pi^2}{4})^{-1}\exp(-\frac{i\sigma h_1}{\varepsilon})\xi(\tau - h_1) + d|\xi|^2\xi,\end{aligned} \tag{24}$$

где $\tau = \varepsilon t$. Таким образом аналогом (21) здесь является уравнение (24) в бесконечномерном фазовом пространстве.

Сформулируем основные утверждения, обоснования которых вытекают из приведенных выше построений. Фиксируем произвольно $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$ и рассмотрим уравнение

$$\frac{d\xi}{d\tau} = (\alpha_1 + a)\xi + b\exp(i\varphi_0)\xi(\tau - h_1) + d|\xi|^2\xi, \tag{25}$$

где $a = (1 - i\pi/2)(1 + \pi^2/4)^{-1}$, $b = b(1 - i\pi/2)(1 + \pi^2/4)^{-1}$.

Теорема 2. *Пусть при некотором φ_0 уравнение (25) имеет ограниченное при $\tau \to \infty$ решение $\xi(\tau)$. Тогда существует последовательность $\varepsilon_n \to 0$, определяемая равенством $\varphi(\varepsilon) = \varphi_0$, что при $\varepsilon = \varepsilon_n$ уравнение (15) имеет асимптотическое по невязке с точностью до $O(\varepsilon^{3/2})$ решение*

$$\begin{aligned} u = 1 + \sqrt{\varepsilon}_n(\xi(\tau)\exp(i\sigma t) + \bar{\xi}(\tau)\exp(-i\sigma t)) + \\ + \varepsilon_n[\lambda_0^{-1}F(1,1) + \frac{2-i}{5}\xi^2(\tau)\exp(2i\sigma t)] + \\ + \frac{2+i}{5}\xi^{-2}(\tau)\exp(-2i\sigma t)], \quad \tau = \varepsilon_n t. \end{aligned}$$

Для простейших решений уравнения (25) вида

$$\xi_0(\tau) = \rho_0 \exp(i\varphi_0\tau) \quad (\rho_0 > 0) \tag{26}$$

можно получить более точные утверждения.

Итак, пусть для некоторого φ_0 уравнение (25) имеет, при выполнении некоторых условий типа общности положения, устойчивое (неустойчивое) решение (26). Тогда при достаточно малых ε_n уравнение (15) имеет устойчивое (неустойчивое) периодическое решение

$$u_0(t, \varepsilon) = 1 + \sqrt{\varepsilon}_n 2\rho_0 \cos((\sigma + \varepsilon_n\varphi_0 + O(\varepsilon_n^2))t) + O(\varepsilon_n).$$

Отметим, что количество решений вида (26) уравнения (25) тем больше, чем больше значение параметров b и h_1. Таким образом, условие (22) больших значений запаздывания может приводить к существенному усложнению динамических свойств в окрестности состояния равновесия (15).

3. О локальной динамике уравнения (15) в случае сверхбольших значений h

Коротко остановимся на ситуации, когда параметр h в (15) является «сверхбольшим», т. е. параметр h_1 в (22) является большим:

$$h_1 = \gamma^{-1} \quad \text{и} \quad 0 < \gamma \ll 1. \tag{27}$$

Повторяя предыдущие построения, получаем уравнение (24). Ниже считаем, что параметр ε в (24) как-то фиксирован.

Ограничимся исследованием решений (24) из малой, но не зависящей от ε и γ окрестности нулевого состояния равновесия. Удобно в (24) произвести замену времени $\tau_1 = \gamma^{-1}\tau$. Тогда получим сингулярно возмущенное уравнение

$$\gamma\frac{d\xi}{d\tau_1} = (\alpha_1 + a)\xi + b\exp(\frac{i\sigma}{\varepsilon\gamma})\xi(\tau_1 - 1) + d|\xi|^2\xi. \tag{28}$$

Характеристический квазиполином для линеаризованного в нуле уравнения (28) имеет вид

$$\gamma\mu = A_1 + A_2\exp(-\frac{i\sigma}{\varepsilon\gamma})\exp(-\mu), \tag{29}$$

где $A_1 = \alpha_1 + (1 - i\pi/2)(1 + \pi^2/4)^{-1}a$, $A_2 = (1 - i\pi/2)(1 + \pi^2/4)^{-1}b$. Положим $A_1 = A_{11} + \varepsilon A_{12}$ и $A_{20} = |A_2| = |b|(1 + \pi^2/4)^{-1/2}$. Тогда величина A_2 представима в виде $A_2 = A_{20}\exp(i\varphi_{20})$.

При условии $A_{11} > 0$ квазиполином (29) имеет корень с положительной и отделенной от мнимой оси при $\gamma \to 0$ вещественной частью. Поэтому задача о динамике (28) в окрестности нуля становится нелокальной. Ниже предполагаем, что

$$A_{11} < 0. \tag{30}$$

Далее, при условии $|A_1|A_{20}^{-1} < 1$ тоже получаем, что у квазиполинома (29) есть корень с положительной вещественной частью, равной $\ln A_{20}|A_1|^{-1}$. Отметим, что при условии $|A_1|A_{20}^{-1} > 1$ есть корень (29) с отрицательной вещественной частью, однако для отрицательности вещественных частей всех корней (29) этого условия недостаточно. Сформулируем итоговое утверждение о корнях (29).

Лемма 1. *Пусть выполнено неравенство* (30) *и пусть*

$$A_{20} < |A_{11}|. \tag{31}$$

Тогда при всех достаточно малых γ все корни (29) *имеют отрицательные и отделенные от нуля при $\gamma \to 0$ вещественные части. Если же*

$$A_{20} > |A_{11}|, \tag{32}$$

то при достаточно малых γ найдется корень (29) *с положительной и отделенной от нуля при $\gamma \to 0$ вещественной частью.*

Простое обоснование этой леммы опустим.

Таким образом, в изучении нуждается только случай, когда значение A_{20} близко к $|A_{11}|$. В связи с этим ниже полагаем, что для некоторого фиксированного A_0 выполнено равенство

$$A_2 = |A_{11}| + \gamma^2 A_0. \tag{33}$$

В этом случае бесконечно много корней (29) стремятся к мнимой оси при $\gamma \to 0$, а все остальные корни имеют отрицательные и отделенные от нуля при $\gamma \to 0$ вещественные части. Таким образом, опять реализуется критический случай (в задаче об устойчивости стационара $u_0(\varepsilon)$) бесконечной размерности. Метод изучения таких критических случаев разработан в [13–16]. Применим здесь соответствующие результаты.

Сначала исследуем поведение корней характеристического уравнения (29) при $\gamma \to 0$. Найдем асимптотику тех корней, которые стремятся к мнимой оси при $\gamma \to 0$. Введем несколько обозначений. Положим в (29) $\mu = i\omega$ и результат запишем в виде

$$P(\omega) = A_{20}\exp(i\varphi_2 - i\omega),$$

где $P(\omega) = i(\gamma\omega - A_{12}) - A_{11}$. Имеем

$$\min_{\omega} |P(\omega)| = |P(\omega_0)| = A_{11} \quad \text{и} \quad \omega_0 = A_{12}\gamma^{-1}.$$

Введем еще одно обозначение. Через $\varkappa = \varkappa(\gamma)$ обозначим такое значение из полуинтервала $[0, 2\pi)$, для которого величина

$$\sigma(\varepsilon\gamma)^{-1} + A_{12}\gamma^{-1} - \varphi_{20} + \varkappa(\gamma)$$

является целой кратной 2π. Сформулируем итоговое утверждение.

Лемма 2. *При условиях (27), (30), и (33) уравнение (29) имеет бесконечно много корней $\mu_n(\gamma)$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, для которых имеют место асимптотические представления*

$$\mu_n(\gamma) = i[A(\varepsilon\gamma)^{-1} + A_{12}\gamma^{-1} - \varphi_{20} + \varkappa(\gamma) + 2\pi n] + \gamma\mu_{n_1} + \gamma^2\mu_{n_2} + \ldots, \tag{34}$$

где

$$\mu_{n_1} = -i(2\pi n + \varkappa)A_{20}^{-1},$$
$$\mu_{n_2} = -\frac{1}{2}(2\pi n + \varkappa)^2 A_{20}^{-2} + i(2\pi n + \varkappa)A_{20}^{-2} + A_0.$$

Линейное уравнение

$$\gamma\frac{d\xi}{d\tau_1} = A_1\xi + A_2\exp(-\frac{i\sigma}{\varepsilon\gamma})\xi(\tau_1 - 1) \tag{35}$$

имеет при условиях (30), (33) бесконечно много решений вида

$$\xi_n(\tau_1, \gamma) = \eta_n \exp(i\mu_n(\gamma)\tau_1), \tag{36}$$

где η_n – произвольные комплексные постоянные.

Формулу (36) запишем иначе

$$\xi_n(\tau_1, \gamma) = \exp(iB(\gamma)\tau_1) \cdot \exp(2\pi n i(1 - \gamma A_{20}^{-1})\tau_1)\eta_n(s), \tag{37}$$

в которой

$$B(\gamma) = -\sigma(\varepsilon\gamma)^{-1} + A_{12}\gamma^{-1} + \varkappa(\gamma)(1 - \gamma A_{20}^{-1}),$$
$$\eta_n(s) = \exp[-(\mu_{n_2} + O(\gamma))s], \quad s = \gamma^2\tau_1.$$

Решение нелинейного уравнения (28) будем искать в виде линейной комбинации всех решений вида (37) с неизвестными амплитудами $\eta_n(s)$:

$$\xi(\tau_1, \gamma) = \gamma\exp(iB(\gamma)\tau_1) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \eta_n(s)\exp(2\pi n i x) +$$
$$+ \gamma^{3/2} g_1(\tau_1, x, s) + \ldots, \quad x = (1 - \gamma A_{20}^{-1}). \tag{38}$$

Здесь $g_1(\tau_1, x, s), \ldots$ — периодические по первым двум аргументам функции. Подставим (38) в (28). Производя стандартные действия, получим уравнение для $g_1(\tau_1, x, s)$. Из условия его разрешимости приходим к уравнению для функции

$$\eta(s,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \eta_n(s)\exp(2\pi nix):$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial s} = (2A_{20}^2)^{-1}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + A_{20}^{-2}(i\varkappa+1)\frac{\partial\eta}{\partial x} + \\ + (A_0 + \varkappa^2 A_{20}^{-2})\eta + A_{20}^{-1} d\eta|\eta|^2. \tag{39}$$

Поскольку функция $\eta(s,x)$ 1-периодически зависит от второго аргумента, уравнение (39) должно быть дополнено периодическими краевыми условиями

$$\eta(s, x+1) \equiv \eta(s,x). \tag{40}$$

Из приведенных построений вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (27), (30) *и* (33). *Пусть для некоторого* $\varkappa = \varkappa_0 \in [0, 2\pi)$ *краевая задача* (39), (40) *имеет ограниченное при* $s \to \infty$, $x \in [0,1]$ *решение* $\eta_0(s,x)$. *Тогда найдется такая последовательность* $\gamma_m \to 0$, *определяемая из условия* $\varkappa(\gamma_m) = \varkappa_0$, *что уравнение* (28) *имеет асимптотическое по невязке с точностью до* $O(\gamma^3)$ *решение*

$$\xi(\tau_1, \gamma) = \gamma\eta(s,x), \quad s = \gamma^2\tau_1, \quad x = (1 - \gamma A_{20}^{-1})\tau_1, \quad \gamma = \gamma_m.$$

Уравнение (39) с краевыми условиями (40) является классическим уравнением Гинзбурга — Ландау. Его динамике посвящены исследования многих авторов (см., например, [17–21]). Известно, в частности, что это уравнение может иметь довольно сложную, в том числе — нерегулярную динамику.

Отметим, что в краевой задаче (39), (40) просто находятся решения — бегущие волны — вида

$$\eta = \rho\exp(i2\pi mx + i\varphi s).$$

Для них можно получить результаты о существовании точных решений в (28) и ответить на вопрос об их устойчивости.

Таким образом, в этом разделе показано, что увеличение запаздывания h_1 согласно соотношению (27) может приводить к усложнению динамических свойств исходного уравнения.

Особо отметим, что при различных значениях $\varkappa$ динамика (39), (40) может быть различной. Это означает, что при $\gamma \to 0$ может происходить неограниченный процесс прямых и обратных бифуркаций в (39), (40).

Далее встает вопрос о структуре решений (28) при дальнейшем уменьшении γ (увеличении h_1). На первый взгляд принципиальных изменений не происходит, поскольку параметр γ фигурирует только в выражении $\varkappa = \varkappa(\gamma)$ уравнения (39). Однако это не совсем так. Дело в том, что выше исследования приведены для случая, когда «надкритичность» A_0 связана со значением A_2 формулой (33).

Необходимо, конечно, рассмотреть более общую связь, когда

$$A_2 = |A_{11}| + \gamma^{\delta} A_0, \quad 0 < \delta < 2. \tag{41}$$

Соответствующие результаты были получены в [14, 15]. Здесь лишь укажем, что отличие случаев $\delta = 2$ и $0 < \delta < 2$ является существенным. Например, возникают более сложные многопараметрические семейства нелинейных краевых задач, играющих роль краевой задачи (39), (40). Все это говорит о том, что при $\gamma \to 0$ (в условии (41)) может происходить резкое усложнение динамики. Например, спонтанное увеличение количества установившихся режимов в (28).

4. Малые возмущения в окрестности цикла

Здесь предполагаем, что параметры r и T в (15) фиксированы и $rT > \frac{\pi}{2}$, т. е. в (1) имеется экспоненциально орбитально устойчивый цикл $u_0(t)$ периода $\widetilde{T}_0$.

При условии малости параметра γ приходим к стандартной задаче о малом возмущении грубого цикла. Введем несколько обозначений.

Сначала отметим, что функция $\dot{u}_0(t)$ является решением линеаризованного на $u_0(t)$ уравнения (1)

$$\dot{v} = r(1 - u_0(t-T))v - ru_0(t)v(t-T). \tag{42}$$

Формально сопряженным к этому уравнению является уравнение

$$\dot{y} = -r(1 - u_0(t-T))y + ru_0(t+T)y(t+T). \tag{43}$$

Хейловское скалярное произведение определяется формулой

$$< v(s), y(s) >= v(0)y(0) - r\int\limits_{-T}^{0} u_0(s+1)v(s)y(s+1)ds$$

($v(s) \in C_{[-T,0]}$, $y(s) \in C_{[0,T]}$). Отметим, что для любых двух решений (42) и (43), определенных при всех $t \in R$, справедливо тождество

$$< v(s+t), y(s+t) >\equiv< v(s), y(s) > .$$

Уравнение (43) имеет единственное (с точностью до множителя) периодическое решение $y_0(t)$ ($\not\equiv 0$). Положим

$$\sigma =< F(u_0(t), u_0(t-h)), y_0(t) > .$$

Следующее простое утверждение является обобщением хорошо известного для обыкновенных дифференциальных уравнений результата о возмущении грубого цикла.

Теорема 4. *При всех достаточно малых ε уравнение (15) имеет орбитально устойчивый цикл $u_0(t, \varepsilon)$, для которого*

$$u_0(t,\varepsilon) = u_0\left((1+\sigma\varepsilon + o(\varepsilon))t\right) + O(\varepsilon).$$

Более интересна ситуация, когда вместе с условием $0 < \varepsilon \ll 1$ выполнено условие

$$h \gg 1.$$

Результаты о бифуркациях в окрестности цикла при малых возмущениях с большим запаздыванием получены в работах [11, 12]. Применим их к уравнению (15).

Пусть $h = h_1\varepsilon^{-1}$. Введем в рассмотрение формальные ряды

$$u(t,\varepsilon) = u_0(\tau) + \varepsilon u_1(\tau, s) + \dots,$$

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 + \varepsilon\varphi(s) + \dots,$$

где $V_j(t)$ – $\widetilde{T}_0$-периодичны по τ, $\varphi(s)$ – скалярная почти периодическая функция, s – «медленное» время: $s = \varepsilon t$. Подставим эти ряды в (15). Тогда, собирая коэффициенты при одинаковых степенях ε, приходим к уравнению

$$\frac{du_1}{d\tau} = r(1 - u_0(\tau - T))u_1 - ru_0u_1(\tau - T) + \varepsilon R(\tau, s),$$

где $R(\tau, s) = F(u_0(\tau), u_0(\tau(t - h_1/\varepsilon)))$. Условие разрешимости для этого уравнения в указанном классе функций состоит в выполнении равенства $< R(\tau, s), y_0(\tau) >= 0$.

Обозначим через $g(z)$ функцию

$$g(z) =< R(u_0(\tau), u_0(\tau(t - z))), y_0(\tau) > . \tag{44}$$

Учитывая, что $\tau(t - h) = \tau(t) - h_1\varepsilon^{-1} - \int\limits_{s-h_1}^{s} (\varphi(s_1) + \dots)ds_1$, из (44) приходим к уравнению для определения $\varphi(s)$:

$$\varphi(s) = g(\Theta + \int\limits_{-h_1}^{0} \varphi(s + p)dp), \tag{45}$$

где $\Theta = \Theta(\varepsilon) = \{\varepsilon^{-1}h_1\}|_{\bmod \widetilde{T}_0}$. После того, как решение $\varphi(s)$ этого уравнения найдено, алгоритм последовательного нахождения коэффициентов фигурирующих выше формальных рядов можно неограниченно продолжать.

Рассмотрим вопрос о состояниях равновесия уравнения (45). Для их нахождения получаем уравнение

$$\varphi = g(\Theta + h_0\varphi).$$

Вопрос об устойчивости некоторого состояния равновесия φ_0 при $\Theta = \Theta_0$ этого уравнения решается стандартным образом.

Теорема 5. *Пусть при некотором $\Theta = \Theta_0$ уравнение (45) имеет состояние равновесия φ_0 и пусть выполнено неравенство*

$$h_1 g'(\Theta_0 + h_1\varphi_0) \neq 1.$$

Тогда существует такая последовательность $\varepsilon_n \to 0$, *определяемая из условия* $\Theta(\varepsilon) = \Theta_0$, *что при* $\varepsilon = \varepsilon_n$ *и при достаточно больших* n *уравнение* (15) *имеет периодическое решение* $u_0(t, \varepsilon)$ *вида*

$$u_0(t, \varepsilon) = u_0(\tau) + \varepsilon u_1(\tau, s) + o(\varepsilon),$$

где $\tau = (1 + \varepsilon\varphi_0 + O(\varepsilon^2))$. *Это решение устойчиво (неустойчиво) при*

$$h_0 g'(\Theta_0 + h_0\varphi_0) < 1 \ (> 1).$$

Таким образом, уравнение (45) может иметь любое число (в зависимости от h_1) устойчивых состояний равновесия, а уравнение (15) соответственно такое же число устойчивых периодических решений. Кроме этого, для (45) и (15) характерен неограниченный процесс прямых и обратных бифуркаций при $\varepsilon \to 0$, поскольку $\Theta = \Theta(\varepsilon)$ бесконечно много раз меняется от 0 до $\widetilde{T}_0$ при $\varepsilon \to 0$.

5. Пример. Комплексное логистическое уравнение с запаздыванием

Рассматривается скалярное комплексное уравнение

$$\dot{u} = r[1 - d|u(t-T)|^2]u, \quad d = 1 + i\Delta. \tag{46}$$

Это уравнение имеет периодическое решение

$$u_0(t) = \exp(i\Delta_0 t), \quad \Delta_0 = -r\Delta.$$

Условие устойчивости этого решения состоит в выполнении неравенства

$$rT < \frac{\pi}{4}. \tag{47}$$

Отметим, что после замены $v = |u|^2$ уравнение (46) принимает вид

$$\dot{u} = 2r[1 - v(t-T)]v. \tag{48}$$

Объектами исследования здесь является уравнение (46) с малыми возмущениями с большим запаздыванием

$$\dot{u} = r[1 - d|u(t-T)|^2]u + \varepsilon\alpha u(t - \frac{h_1}{\varepsilon}), \quad \alpha = \alpha_0 \exp(i\psi_0), \tag{49}$$

где $h_1 > 0$, а ε — малый положительный параметр:

$$0 < \varepsilon \ll 1.$$

Ниже в разделе 5.1. исследуется вопрос о локальной (в окрестности $u_0(t)$) динамике уравнения (49).

5.1. О решениях уравнения (49) близких к циклу $u_0(t)$

Уравнение вида (49) изучено в работе [11]. Применим здесь алгоритм исследования из [11]. Для этого введем в рассмотрение формальный асимптотический ряд

$$u = \exp(i\Delta_0\tau)[1 + \varepsilon u_1(\tau) + \dots], \tag{50}$$

где $\Delta_0 = -r\Delta$, $\tau = \tau(t)$

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 + \varepsilon\varphi_0(s) + \dots, \quad s = \varepsilon t. \tag{51}$$

Отсюда получаем, что

$$\tau(t - \frac{h_1}{\varepsilon}) = \tau(t) - \frac{h_1}{\varepsilon} - \int\limits_{s-h_1}^{s} (\varphi_0(s_1) + \dots)ds_1. \tag{52}$$

Подставим (50) в (49) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях ε. Для $u_1(\tau)$ тогда получаем уравнение

$$\begin{aligned} i\Delta_0\varphi_0 + \dot{u}_1 = -(1 + i\Delta)(u_1(t - T) + \bar{u}_1(t - T)) \\ + \exp[-i(\Theta + \Delta_0 \int\limits_{-h_1}^{0} \varphi_0(s + s_1)ds_1)]. \end{aligned} \tag{53}$$

В (53) положено

$$\Theta = \Theta(\varepsilon) = \Delta_0 h_1 \varepsilon^{-1}|_{mod 2\pi}.$$

Из условия разрешимости уравнения (53) в классе периодических функций для определения неизвестной функции $\varphi_0(s)$ приходим к уравнению

$$\Delta_0\varphi_0(s) = \sqrt{1 + \Delta_0^2}\sin(\Theta + \Delta_0 \int\limits_{-h_1}^{0} \varphi_0(s + s_1)ds_1 + \varkappa), \quad \varkappa = \operatorname{arctg}(-\Delta_0). \tag{54}$$

Рассмотрим вопрос о состояниях равновесия уравнения (54). Для их нахождения получаем уравнение

$$\varphi = g(\Theta + h_1\varphi), \tag{55}$$

$\varphi = \Delta_0\varphi_0$, $g(x) = \sqrt{1 + \Delta_0^2}\sin(x + \varkappa)$.

Пусть при некотором $\Theta = \Theta_0$ уравнение (55) имеет решение φ^0, т. е. при $\Theta = \Theta_0$ уравнение (54) имеет состояние равновесия $\varphi(s) = \Delta_0\varphi^0$. Исследуем на устойчивость это состояние равновесия. Для этого рассмотрим линеаризованное на φ^0 уравнение (55). В результате приходим к уравнению

$$\psi(s) = \sqrt{1 + \Delta_0^2}\cos(\Theta_0 + h_1\varphi^0) \int\limits_{-h_1}^{0} \psi(s + s_1)ds_1. \tag{56}$$

Имеет место следующее простое утверждение.

Лемма 3. *При условии*

$$h_1\sqrt{1+\Delta_0^2}\cos(\Theta_0+h_1\varphi^0)<1, \tag{57}$$

все корни характеристического квазиполинома уравнения (56) *имеют отрицательные вещественные части, а при*

$$h_1\sqrt{1+\Delta_0^2}\cos(\Theta_0+h_1\varphi^0)>1 \tag{58}$$

имеется положительный корень этого квазиполинома.

Основной результат.

Теорема 6. *Пусть при некотором* $\Theta=\Theta_0$ *уравнение* (55) *имеет состояние равновесия* φ^0 *и пусть выполнено неравенство*

$$h_1\sqrt{1+\Delta_0^2}\cos(\Theta_0+h_1\varphi^0)\neq 1.$$

Тогда существует такая последовательность $\varepsilon_n\to 0$*, определяемая из условия* $\Theta(\varepsilon)=\Theta_0$*, что при* $\varepsilon=\varepsilon_n$ *и при достаточно больших* n *уравнение* (49) *имеет периодическое решение* $u_0(t,\varepsilon)$ *вида*

$$u_0(t,\varepsilon)=\exp(i\Delta_0\tau)[1+\varepsilon u_1(\tau)+O(\varepsilon)],$$

где $\tau=(1+\varepsilon\varphi^0+o(\varepsilon))t$*. Это решение устойчиво при условии* (57) *и неустойчиво при условии* (58)*.*

Из этой теоремы, в частности, следует, что количество устойчивых периодических решений (49) может быть сколь угодно большим в зависимости от величины параметра h_1. Кроме этого, для (49) характерен неограниченный процесс прямых и обратных бифуркаций от цикла $u_0(t)$ при $\varepsilon\to 0$. Это связано с тем, что количество и устойчивость состояний равновесия в (56), а значит, и периодических решений (49), зависит от величины $\Theta=\Theta(\varepsilon)$, которая бесконечно много раз меняется от 0 до 2π при $\varepsilon\to 0$.

Список литературы / References

[1] Wright E. M., "A non-linear difference-differential equation", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **194** (1955), 66–87.

[2] Kakutani S., Markus L., "On the non-linear difference-differential equation $y'(t)=(a-by(t-\tau))y(t)$", *Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations*, **4**, ed. S. Lefschetz, Princeton University Press, Princeton, 1958, 1–18, Annals of Mathematical Studies (AM-41).

[3] К вопросу об оценке в пространстве параметров области глобальной устойчивости уравнения Хатчинсона, *Нелинейные колебания в задачах экологии*, ЯрГУ, Ярославль, 1985, 55–62; [Kashchenko S. A., "K voprosu ob otsenke v prostranstve parametrov oblasti globalnoy ustoychivosti uravneniya Khatchinsona", *Nelineynye kolebaniya v zadachakh ekologii*, YarGU, Yaroslavl, 1985, 55–62, (in Russian).]

[4] Jones G. S., "The existence of periodic solutions of $f'(x) = -\alpha f(x-1)[1+f(x)]$", *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*, **5** (1962), 435–450.

[5] Кащенко С.А., "Сложные стационарные режимы одного дифференциально-разностного уравнения, обобщающего уравнение Хатчинсона", *Исследования по устойчивости и теории колебаний*, ЯрГУ, Ярославль, 1983, 8; [Kashchenko S. A., "Slozhnye statsionarnye rezhimy odnogo differentsialno-raznostnogo uravneniya, obobshchayushchego uravnenie Khatchinsona", *Issledovaniya po ustoychivosti i teorii kolebaniy*, YarGU, Yaroslavl, 1983, 8, (in Russian).]

[6] Кащенко С. А., "О периодических решениях уравнения $x'(t) = -lx(t-1)[1+x(t)]$", *Исследования по устойчивости и теории колебаний*, ЯрГУ, Ярославль, 1978, 110–117; [Kashchenko S. A., "O periodicheskikh resheniyakh uravneniya $x'(t) = -lx(t-1)[1+x(t)]$", *Issledovaniya po ustoychivosti i teorii kolebaniy*, YarGU, Yaroslavl, 1978, 110–117, (in Russian).]

[7] Кащенко С. А., "Асимптотика периодического решения обобщённого уравнения Хатчинсона", *Исследования по устойчивости и теории колебаний*, ЯрГУ, Ярославль, 1981; [Kashchenko S. A., "Asimptotika periodicheskogo resheniya obobshchennogo uravneniya Khatchinsona", *Issledovaniya po ustoychivosti i teorii kolebaniy*, YarGU, Yaroslavl, 1981, (in Russian).]

[8] Kashchenko S., "Asymptotics of the Solutions of the Generalized Hutchinson Equation", *Automatic Control and Computer Sciences*, **47**:7 (2013), 470–494.

[9] Hale J. K., *Theory of functional differential equations*, Springer Verlag, New York, 1977, 626 pp.

[10] Hartman P., *Ordinary Differential Equations*, Wiley, New York, 1965, 626 pp.

[11] Кащенко С. А., "Бифуркации в окрестности цикла при малых возмущениях с большим запаздыванием", *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **40**:5 (2000), 693–702; English transl.: Kashchenko S. A., "Bifurcations in the neighborhood of a cycle under small perturbations with a large delay", *Comput. Math. Math. Phys.*, **40**:5 (2000), 659–668.

[12] Kashchenko S. A., "Bifurcational Features in Systems of Nonlinear Parabolic Equations with Weak Diffusion", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **15**:11 (2005), 3595–3606.

[13] Кащенко С. А., "Применение метода нормализации к изучению динамики дифференциально-разностных уравнений с малым множителем при производной", *Дифференциальные уравнения*, **25**:8 (1989), 1448–1451; English transl.: Kashchenko S. A., "Application of the normalization method to the study of the dynamics of a differential-difference equation with a small factor multiplying the derivative", *Differ. Uravn.*, **25**:8 (1989), 1448–1451.

[14] Кащенко И. С., "Асимптотический анализ поведения решений уравнения с большим запаздыванием", *Доклады РАН*, **421**:5 (2008), 586–589; [Kashchenko I. S., "Asymptotic analysis of the behavior of solutions to equations with large delay", *Doklady Mathematics*, **78**:1 (2008), 570–573, (in Russian).]

[15] Кащенко И.С., "Локальная динамика уравнений с большим запаздыванием", *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **48**:12 (2008), 2141–2150; English transl.: Kashchenko I. S., "Local dynamics of equations with large delay", *Comput. Math. Math. Phys.*, **48**:12 (2008), 2172–2181.

[16] Кащенко С. А., "Уравнение Гинзбурга — Ландау — нормальная форма для дифференциально-разностного уравнения второго порядка с большим запаздыванием", *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **38**:3 (1998), 457–465; English transl.: Kashchenko S. A., "The Ginzburg–Landau equation as a normal form for a second-order difference-differential equation with a large delay", *Comput. Math. Math. Phys.*, **38**:3 (1998), 443–451.

[17] Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., *Нестационарные структуры и диффузионный хаос*, Наука, М., 1992, 544 с.; [Akhromeeva T. S., Kurdyumov S. P., Malinetskiy G. G., *Nestatsionarnye struktury i diffuzionnyy khaos*, Nauka, M., 1992, 544 pp., (in Russian).]

[18] Aranson I. S., Kramer L., "The world of the complex Ginzburg–Landau equation", *Reviews of Modern Physics*, **74**:1 (2002), 99–143.

[19] Кудряшов Н. А., *Методы нелинейной математической физики*, МИФИ, М., 2008, 352 с.; [Kudryashov N. A., *Metody nelineynoy matematicheskoy fiziki*, MIFI, M., 2008, 352 pp., (in Russian).]

[20] Кащенко А. А., "Устойчивость бегущих волн в уравнении Гинзбурга — Ландау с малой диффузией", *Моделирование и анализ информационных систем*, **18**:3 (2011), 58–62; [Kashchenko A. A., "Analysis of running waves stability in the Ginzburg–Landau equation with small diffusion", *Model. Anal. Inform. Sist.*, **18**:3 (2011), 58–62, (in Russian).]

[21] Kashchenko A. A., "Analysis of Running Waves Stability in the Ginzburg–Landau Equation with Small Diffusion", *Automatic Control and Computer Sciences*, **49**:7 (2015), 514–517.

Kashchenko S.A., "About Bifurcations at Small Perturbations in a Logistic Equation with Delay", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:2 (2017), 168–185.

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-2-168-185

Abstract. The article considers bifurcation problems for a logistic equation with delay at small perturbations. The most interesting results are for the case when small perturbations contain a large delay. The main results are special nonlinear equations of evolution in the normal form. Their nonlocal dynamics defines the behaviour of the solutions of the original equation in a small neigbourhood of the balance state or the cycle. It turns out that the order of large delay magnitude is principal. For the simplest case, when this order is congruent with the magnitude inverse to the small parameter appearing in the equation, the normal form is a complex equation with delay. In the case when the order of the delay coefficient is even higher, the normal form is presented by a multiparameter family of special boundary-value problems of degenerate-parabolic type. All these things allow to make a conclusion about the fact that in the considered problems with large delay the multistability is typical.

Keywords: nonlinear dynamics, bifurcation, asymptotic presentation

About the authors:
Sergey A. Kashchenko, orcid.org/0000-0002-8777-4302, professor,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: kasch@uniyar.ac.ru