

©Преображенская М. М., 2017

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-2-186-204

УДК 517.9

Релаксационные циклы в модели синаптически взаимодействующих осцилляторов

Преображенская М. М.

получена 16 января 2017

Аннотация. В настоящей работе рассматривается математическая модель кольцевой нейронной сети с синаптическим взаимодействием элементов. Модель представляет собой систему скалярных нелинейных дифференциально-разностных уравнений, правые части которых зависят от большого параметра. Неизвестные функции, входящие в систему, характеризуют мембранные потенциалы нейронов. Представляет интерес поиск в рамках данной системы уравнений релаксационных циклов, а именно периодических решений с асимптотически большим всплеском на периоде. С этой целью ставится задача отыскания решений в виде дискретных бегущих волн, что позволяет перейти от исследования системы к изучению одного скалярного нелинейного дифференциально-разностного уравнения с двумя запаздываниями. Далее, при стремлении большого параметра к бесконечности определяется предельный объект, представляющий собой релейное уравнение с двумя запаздываниями. Конструктивно, с использованием метода шагов, доказываем, что можно выделить шесть случаев ограничений на параметры, в каждом из которых решение релейного уравнения с начальной функцией из подходящего класса совпадает с одной и той же периодической функцией с требуемыми свойствами. Затем определяется оператор последований Пуанкаре и с использованием принципа Шаудера доказываем существование релаксационного периодического решения сингулярно возмущенного уравнения с двумя запаздываниями. Для этого строится асимптотика этого решения, а затем доказываем его близость к решению релейного уравнения. Из экспоненциальной оценки производной Фреше оператора Пуанкаре следует единственность в построенном классе функций решения дифференциально-разностного уравнения с двумя запаздываниями, а также обосновывается его экспоненциальная орбитальная устойчивость.

Ключевые слова: релаксационные колебания, запаздывание, большой параметр, синаптическая связь

Для цитирования: Преображенская М. М., "Релаксационные циклы в модели синаптически взаимодействующих осцилляторов", *Моделирование и анализ информационных систем*, **24:2** (2017), 186–204.

Об авторах:

Преображенская Маргарита Михайловна, orcid.org/0000-0002-7032-1155, ассистент, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, младший научный сотрудник, ИЦ РАН, ул. Лесная, д. 9, г. Черноголовка, Московская область, 142432 Россия, e-mail: rita.preo@gmail.com

Благодарности:

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект №14-21-00158).

1. Постановка задачи

В настоящей работе используется подход к моделированию химических синапсов, предложенный в статье [1], в основе которого лежит реализация идеи быстрой поро-

говой модуляции. Быстрая пороговая модуляция (fast threshold modulation) — это специальный способ связи динамических систем, для которого характерно скачкообразное изменение правых частей дифференциальных уравнений при переходе некоторых управляющих переменных через свои критические значения (см. [2–7]).

Несколько иная математическая модель цепочки нейронов с синаптической связью была предложена в статье [1] и имеет вид

$$\dot{u}_j = \left(\lambda f(u_j(t-1)) + bg(u_{j-1}) \ln(u_*/u_j) \right) u_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad u_0 = u_m. \quad (1)$$

Здесь $u_j(t) > 0$ — нормированные мембранные потенциалы нейронов, связанных в кольцо, $\lambda \gg 1$ — большой параметр, характеризующий скорость протекания электрических процессов, $b = \text{const} > 0$, $u_* = \exp(c\lambda)$ — пороговое значение, $c = \text{const} \in \mathbb{R}$, слагаемые $bg(u_{j-1}) \ln(u_*/u_j)u_j$ моделируют синаптическое взаимодействие. Относительно функций $f(u)$, $g(u)$ предполагаем, что они из класса $C^2(\mathbb{R}_+)$, где $\mathbb{R}_+ = \{u \in \mathbb{R} : u \geq 0\}$, и удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} f(0) = 1; \quad f(u) + a, \quad uf'(u), \quad u^2 f''(u) = O(u^{-1}) \quad \text{при } u \rightarrow +\infty, \quad a = \text{const} > 0; \\ g(u) > 0 \quad \forall u > 0, \quad g(0) = 0; \quad g(u) - 1, \quad ug'(u), \quad u^2 g''(u) = O(u^{-1}) \quad \text{при } u \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (2)$$

Будем искать периодическое решение системы (1) такое, что функции u_j будут иметь один всплеск на периоде с разностью фаз, равной $\Delta = \text{const} > 0$.

Причины, описанные в статье [1], по которым для исследования выбрана система (1), состоят в следующем. Во-первых, связующие слагаемые $bg(u_{j-1})u_j \ln(u_*/u_j)$ меняют знак с «+» на «−» при увеличении потенциалов u_j и при прохождении их через критическое значение u_* . Во-вторых, для системы (1) удастся корректно определить предельный объект, которым оказывается некоторая релейная система с запаздыванием, что будет продемонстрировано во втором разделе настоящей статьи.

Анализ сингулярно возмущенной системы (1) основан на следующих двух математических идеях. Первая из них описывается в [1, 8–14] и связана с переходом в (1) к логарифмической шкале, то есть с заменой $x_j := (1/\lambda) \ln u_j$, кроме того, вместо большого параметра λ вводится в рассмотрение малый параметр $\varepsilon := 1/\lambda \ll 1$. Эта замена позволяет перейти к близкой к релейной системе

$$\dot{x}_j = F(x_j(t-1), \varepsilon) + b(c - x_j)G(x_{j-1}, \varepsilon), \quad j = 1, \dots, m, \quad x_0 = x_m, \quad (3)$$

где $F(x, \varepsilon) := f(\exp(x/\varepsilon))$, $G(x, \varepsilon) := g(\exp(x/\varepsilon))$.

Вторая идея состоит в поиске периодического решения системы (3) в виде дискретной бегущей волны. Этот способ представления решения сформулирован, например, в статьях [1, 12, 15, 16]. Основная идея состоит в следующей замене переменных:

$$x_j = x(t + (j-1)\Delta, \varepsilon), \quad j = 1, \dots, m, \quad (4)$$

которая приводит к задаче о поиске периодического решения следующего уравнения с двумя запаздываниями

$$\dot{x} = F(x(t-1), \varepsilon) + b(c - x)G(x(t-\Delta), \varepsilon). \quad (5)$$

Период решения уравнения (5) должен быть равен $T = m\Delta/k$, $k \in \mathbb{N}$, что следует из условия $x_0 = x_m$.

Для полученного уравнения (5) задача состоит в следующем. Необходимо подобрать параметры a , b , c , Δ , такие, что при всех достаточно малых ε уравнение (5) будет иметь экспоненциально орбитально устойчивый цикл $x = x_*(t, \varepsilon)$ периода $T_*(\varepsilon)$, где

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_*(\varepsilon) = T_* > 0.$$

При этом требуем, чтобы функция $x_*(t, \varepsilon)$ на отрезке времени длины периода имела один промежуток положительности и один промежуток отрицательности. Это с учетом сделанной экспоненциальной замены и будет означать, что функции u_j обладают одним всплеском на периоде с разностью фаз Δ .

2. Анализ вспомогательного уравнения

Из свойств (2) функций f и g следует, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(x, \varepsilon) = R(x), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G(x, \varepsilon) = H(x),$$

$$R(x) := \begin{cases} 1, & \text{при } x < 0, \\ -a, & \text{при } x > 0, \end{cases} \quad H(x) := \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0, \\ 1, & \text{при } x > 0. \end{cases} \quad (6)$$

Далее, исследуем предельное релейное уравнение

$$\dot{x} = R(x(t-1)) + b(c-x)H(x(t-\Delta)), \quad (7)$$

для чего определим класс начальных функций. Так же, как в работах [1, 13, 14], фиксируем постоянные $\sigma_0 > 0$, $q_1 > \sigma_0$, $q_2 \in (0, \sigma_0)$, оценки на которые будут уточнены позднее, и обозначим через $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ замкнутое, ограниченное и выпуклое множество функций $\varphi(t)$ (см. рис. 1), определенное следующим образом:

$$S(\sigma_0, q_1, q_2) = \{\varphi \in C[-1 - \sigma_0, -\sigma_0] : -q_1 \leq \varphi(t) \leq -q_2 \forall t \in [-1 - \sigma_0, -\sigma_0], \varphi(-\sigma_0) = -\sigma_0\}. \quad (8)$$

Через $x_\varphi(t)$, $t \geq -1 - \sigma_0$, обозначим решение уравнения (7) с произвольной начальной функцией $\varphi(t)$, удовлетворяющей (8).

Будем интересоваться периодическим решением $x_\varphi(t)$. Обозначим период через T_φ и дополнительно предположим, что на интервале $(0, T_\varphi)$ функция $x_\varphi(t)$ имеет ровно один ноль t_φ .

Построим решение методом шагов. Отметим, что в зависимости от знака $x(t-1)$ и $x(t-\Delta)$ уравнение (7) принимает одну из четырех форм:

$$\dot{x} = 1 \text{ при } x(t-1) < 0, \quad x(t-\Delta) < 0; \quad (A)$$

$$\dot{x} = -a \text{ при } x(t-1) > 0, \quad x(t-\Delta) < 0; \quad (B)$$

$$\dot{x} = 1 + b(c-x) \text{ при } x(t-1) < 0, \quad x(t-\Delta) > 0; \quad (C)$$

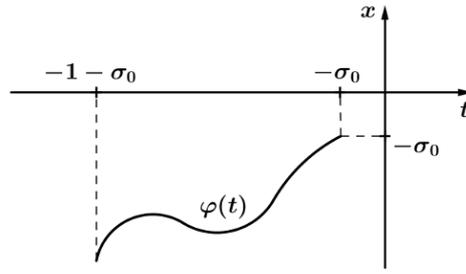


Рис. 1. Вид начальной функции $\varphi(t)$, удовлетворяющей (8)
Fig. 1. The form of the initial function $\varphi(t)$ satisfying (8)

$$\dot{x} = -a + b(c - x) \text{ при } x(t - 1) > 0, x(t - \Delta) > 0. \quad (D)$$

Обозначим через $x_A(\tilde{t}, \tilde{x}; t)$ решение задачи Коши для уравнения из случая (A) с начальным условием $x|_{t=\tilde{t}} = \tilde{x}$, где \tilde{t}, \tilde{x} — некоторые известные константы. Таким образом, получаем в каждом случае решение соответствующей задачи Коши:

$$(A): x_A(\tilde{t}, \tilde{x}; t) \equiv t - \tilde{t} + \tilde{x};$$

$$(B): x_B(\tilde{t}, \tilde{x}; t) \equiv -at + a\tilde{t} + \tilde{x};$$

$$(C): x_C(\tilde{t}, \tilde{x}; t) \equiv (\tilde{x} - 1/b - c) \exp(-b(t - \tilde{t})) + 1/b + c;$$

$$(D): x_D(\tilde{t}, \tilde{x}; t) \equiv (\tilde{x} + a/b - c) \exp(-b(t - \tilde{t})) - a/b + c.$$

В начале рассмотрим случай, когда

$$I. 0 < \Delta < 1. \quad (9)$$

На первом этапе рассмотрим отрезок $[-\sigma_0, \Delta]$. На этом промежутке аргументы $x(t - 1), x(t - \Delta)$ функций R и H совпадают с функциями $\varphi(t - 1), \varphi(t - \Delta)$, которые принимают отрицательные значения, следовательно, здесь имеем дело с задачей Коши (A) при $\tilde{t} = \tilde{x} = -\sigma_0$. Таким образом,

$$x_\varphi(t) = t \text{ при } t \in [-\sigma_0, \Delta]. \quad (10)$$

Отметим, что по построению $x_\varphi(0) = 0$, а значит, в силу периодичности выполняется $x_\varphi(T_\varphi) = 0$. Таким образом, с учетом (10) и предположения о том, что t_φ — единственный корень уравнения $x_\varphi(t)$ на интервале $(0, T_\varphi)$, функция $x_\varphi(t)$ устроена так, как показано на рисунке 2, то есть положительна на интервале $(0, t_\varphi)$, а на (t_φ, T_φ) — отрицательна. Кроме того, поскольку речь идет о периодическом решении $x_\varphi(t)$, то дополнительно требуем, во-первых, чтобы выполнялось условие

$$T_\varphi - t_\varphi > 1, \quad (11)$$

а во-вторых, точка T_φ , отвечающая длине периода, должна попадать на промежуток, где решение описывается формулой $x_A(\tilde{t}, \tilde{x}; t)$.

Дальнейшее построение решения $x_\varphi(t)$ зависит от взаимного расположения на оси Ot точек $\Delta, 1, t_\varphi + \Delta, t_\varphi + 1$ переключения релейных функций $R(x(t - 1)), H(x(t - \Delta))$ и первых двух нулей t_φ, T_φ решения $x_\varphi(t)$. Что касается значений $\Delta, 1, t_\varphi + \Delta, t_\varphi + 1$, то, принимая во внимание предположение (9), для них возможны две ситуации:

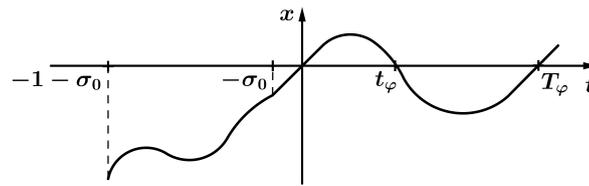


Рис. 2. Предполагаемый вид решения $x_\varphi(t)$ уравнения (7) с начальной функцией, удовлетворяющей (8)

Fig. 2. An assumed form of the solution $x_\varphi(t)$ of the equation (7) with the initial function satisfying (8)

- I.1. когда интервалы $(\Delta, 1)$, $(t_\varphi + \Delta, t_\varphi + 1)$ не пересекаются (рис. 3(a)),
 I.2. и когда пересекаются (рис. 3(b)).

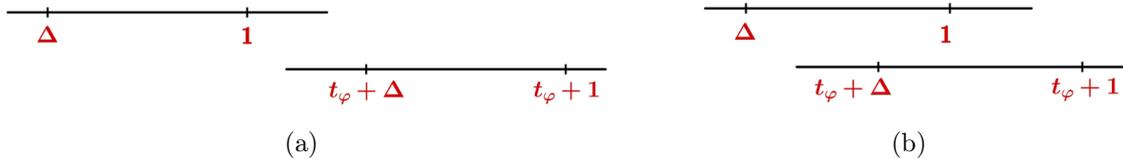


Рис. 3. Случаи взаимного расположения точек переключения релейных функций $R(x(t-1))$ и $H(x(t-\Delta))$

Fig. 3. The cases of the relative location of the switching points of the relay functions $R(x(t-1))$ and $H(x(t-\Delta))$

В первой ситуации t_φ может попасть на один из двух участков: $(\Delta, 1)$, $(1, t_\varphi + \Delta)$. Тогда с учетом возможного расположения значения T_φ получаем пять вариантов расположения соответствующих точек:

- I.1.1.1 $t_\varphi \in (\Delta, 1)$, $T_\varphi \in (1, t_\varphi + \Delta)$ (рис. 4(a));
 I.1.1.2 $t_\varphi \in (\Delta, 1)$, $T_\varphi \in (t_\varphi + \Delta, t_\varphi + 1)$ (рис. 4(c));
 I.1.1.3 $t_\varphi \in (\Delta, 1)$, $T_\varphi > t_\varphi + 1$ (рис. 4(e));
 I.1.2.1 $t_\varphi \in (1, t_\varphi + \Delta)$, $T_\varphi \in (t_\varphi + \Delta, t_\varphi + 1)$ (рис. 4(g));
 I.1.2.2 $t_\varphi \in (1, t_\varphi + \Delta)$, $T_\varphi > t_\varphi + 1$ (рис. 4(i)).

Во второй ситуации t_φ может принадлежать только интервалу $(\Delta, t_\varphi + \Delta)$, а T_φ — одному из трех промежутков. Таким образом, добавляются еще три случая:

- I.2.1 $t_\varphi \in (\Delta, t_\varphi + \Delta)$, $T_\varphi \in (t_\varphi + \Delta, 1)$ (рис. 4(k));
 I.2.2 $t_\varphi \in (\Delta, t_\varphi + \Delta)$, $T_\varphi \in (1, t_\varphi + 1)$ (рис. 4(m));
 I.2.3 $t_\varphi \in (\Delta, t_\varphi + \Delta)$, $T_\varphi > t_\varphi + 1$ (рис. 4(o)).

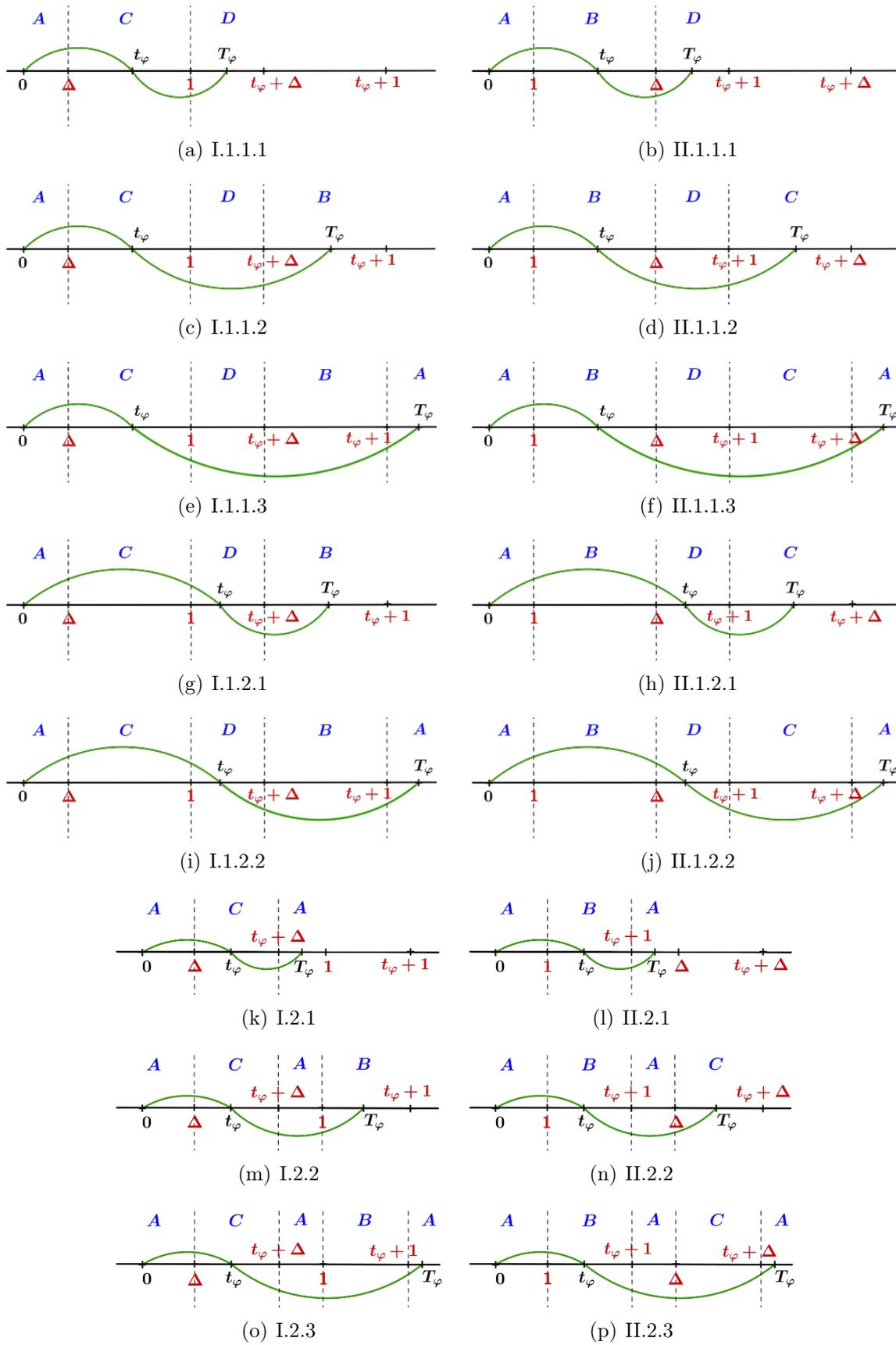


Рис. 4. Случаи взаимного расположения значений $1, \Delta, t_\varphi + 1, t_\varphi + \Delta, t_\varphi, T_\varphi$
 Fig. 4. The cases of the relative location of the values $1, \Delta, t_\varphi + 1, t_\varphi + \Delta, t_\varphi, T_\varphi$

Если предположение (9) заменить обратным

$$\text{II. } 1 < \Delta, \quad (12)$$

то получим еще восемь возможных случаев расположения точек переключения релейных функций и нулей решения, аналогичных приведенным (рис. 4(b), 4(d), 4(f), 4(h), 4(j), 4(l), 4(n), 4(p)). Отметим, что в этой ситуации в качестве множества $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ начальных функций следует рассматривать класс

$$S(\sigma_0, q_1, q_2) = \{\varphi \in C[-\Delta - \sigma_0, -\sigma_0] : -q_1 \leq \varphi(t) \leq -q_2 \quad \forall t \in [-\Delta - \sigma_0, -\sigma_0], \\ \varphi(-\sigma_0) = -\sigma_0\}, \quad (13)$$

аналогичный (8), но определенный на отрезке $[-\Delta - \sigma_0, -\sigma_0]$. Связано это с тем, что длина отрезка, на котором заданы начальные функции, совпадает с наибольшим запаздыванием рассматриваемого уравнения. При этом предположение (11) заменяется на

$$T_\varphi - t_\varphi > \Delta. \quad (14)$$

Далее, остается выбрать из полученных шестнадцати случаев те, в которых функция $x_\varphi(t)$ является T_φ -периодической. Это означает, что выполняется условие (11) (в случае I) или (14) (в случае II) и T_φ находится как решение уравнения $x_A(\tilde{t}, \tilde{x}; t) = 0$, при некоторых начальных условиях $\tilde{t} > 0, \tilde{x} < 0$. Оба эти условия соблюдаются в случаях I.1.1.3, I.1.2.2, I.2.3, II.1.1.3, II.1.2.2, II.2.3. В каждом случае наложим на параметры a, b, c, Δ ограничения, обеспечивающие требуемый порядок точек переключения и нулей решения $x_\varphi(t)$, необходимый знак функции $x_\varphi(t)$ в точках переключения, подходящую монотонность участков решения, заданных экспонентами. Ниже перечислены ограничения на параметры для каждого случая.

I.1.1.3

$$0 < \Delta < 1, \quad \frac{1}{b} + c < 0,$$

$$1 - \Delta < \frac{1}{b} \ln \left(\frac{bc - b\Delta + 1}{bc + 1} \right) + \Delta < 1, \quad \exp(b\Delta - b) \left(-\frac{1}{b} - c + \Delta \right) + \frac{1}{b} + c < 0, \\ \frac{(bc + 1)((a + 1) \exp b - (bc - b\Delta + 1) \exp(b\Delta)) \exp(-2b\Delta)}{b(bc - b\Delta + 1)} + c < \frac{a}{b};$$

I.1.2.2

$$0 < \Delta < 1, \quad c < \frac{a}{b},$$

$$b \exp(b\Delta) (\exp(b\Delta) - 1)(bc - a) < 0, \quad \exp(b(\Delta - 1)) \left(-\frac{1}{b} - c + \Delta \right) + \frac{1}{b} + c > 0;$$

I.2.3

$$0 < \Delta < 1, \quad \frac{1}{b} + c < 0$$

$$\Delta < \frac{1}{b} \ln \left(\frac{bc - b\Delta + 1}{bc + 1} \right) + \Delta < 1 - \Delta, \quad b(bc + 1) \exp(b\Delta) (\exp(b\Delta) - 1) < 0, \\ b(c \exp(-b\Delta) - c + 2\Delta - 1) + \ln \left(\frac{bc - b\Delta + 1}{bc + 1} \right) + \exp(-b\Delta) - 1 > 0;$$

II.1.1.3

$$\frac{1}{a} + 1 < \Delta < \frac{1}{a} + 2,$$

$$\exp\left(b\left(-\frac{1}{a} + \Delta - 2\right)\right)\left(a\left(\frac{1}{b} - \Delta + 1\right) - c + 1\right) + c < \frac{a}{b},$$

$$-(1+a)\exp\left(\left(2 + \frac{1}{a}\right)b\right) + (1+bc)\exp\left(b\left(1 + \frac{1}{a} + \Delta\right)\right) +$$

$$+ \exp(b\Delta)(b - bc + a(1 + b - b\Delta)) < 0;$$

II.1.2.2

$$1 < \Delta < \frac{1}{a} + 1, \quad c < \frac{a}{b},$$

$$(\exp b - 1)(bc - a) < 0, \quad bc(\exp(b\Delta) - 1) + \exp(b\Delta) - \exp b(a + 1) + a < 0;$$

II.2.3

$$\frac{1}{a} + 2 < \Delta < a + \frac{1}{a} + 2,$$

$$\frac{1}{b} + c < \exp\left(-\frac{(a+1)b}{a}\right)\left(a + \frac{1}{a} + 2 + \frac{1}{b} + c - \Delta\right).$$

В качестве доказательства совместности условий в каждом случае приведем пример набора констант, удовлетворяющих данным условиям:

I.1.1.3 $\Delta = 0.7, a = 4, b = 30, c = -0.3;$

I.1.2.2 $\Delta = 0.7, a = 9, b = 6, c = -0.1;$

I.2.3 $\Delta = 0.35, a = 4, b = 20, c = -1;$

II.1.1.3 $\Delta = 2, a = 3/2, b = 8, c = -2;$

II.1.2.2 $\Delta = 3, a = 1/4, b = 5, c = -2;$

II.2.3 $\Delta = 3, a = 8, b = 8, c = -2.$

Графики соответствующих решений релейного уравнения (7) изображены на рисунке 5.

Таким образом, получаем, что справедлива следующая

Лемма 1. В каждом из приведенных выше случаев выбора параметров a, b, c, Δ решение релейного уравнения (5) с начальной функцией (6) совпадает с одной и той же кусочно линейной T_* -периодической функцией x_* , имеющей один нуль t_* на интервале $(0, T_*)$. Причем $x_*(t) > 0$ при $t \in (0, t_*)$ и $x_*(t) < 0$ при $t \in (t_*, T_*)$.

Во всех случаях ограничений на параметры на каждом участке между точками переключения решение $x_\varphi(t)$ определяется однозначно из соответствующей задачи (A), (B), (C) или (D) с начальным условием $x|_{t=\tilde{t}} = \tilde{x}$, где \tilde{t} — это начало очередного промежутка, а начальное значение \tilde{x} выбирается из соображений непрерывности решения. Ниже приведены формулы для функции x_* в каждом случае выбора параметров a, b, c, Δ .

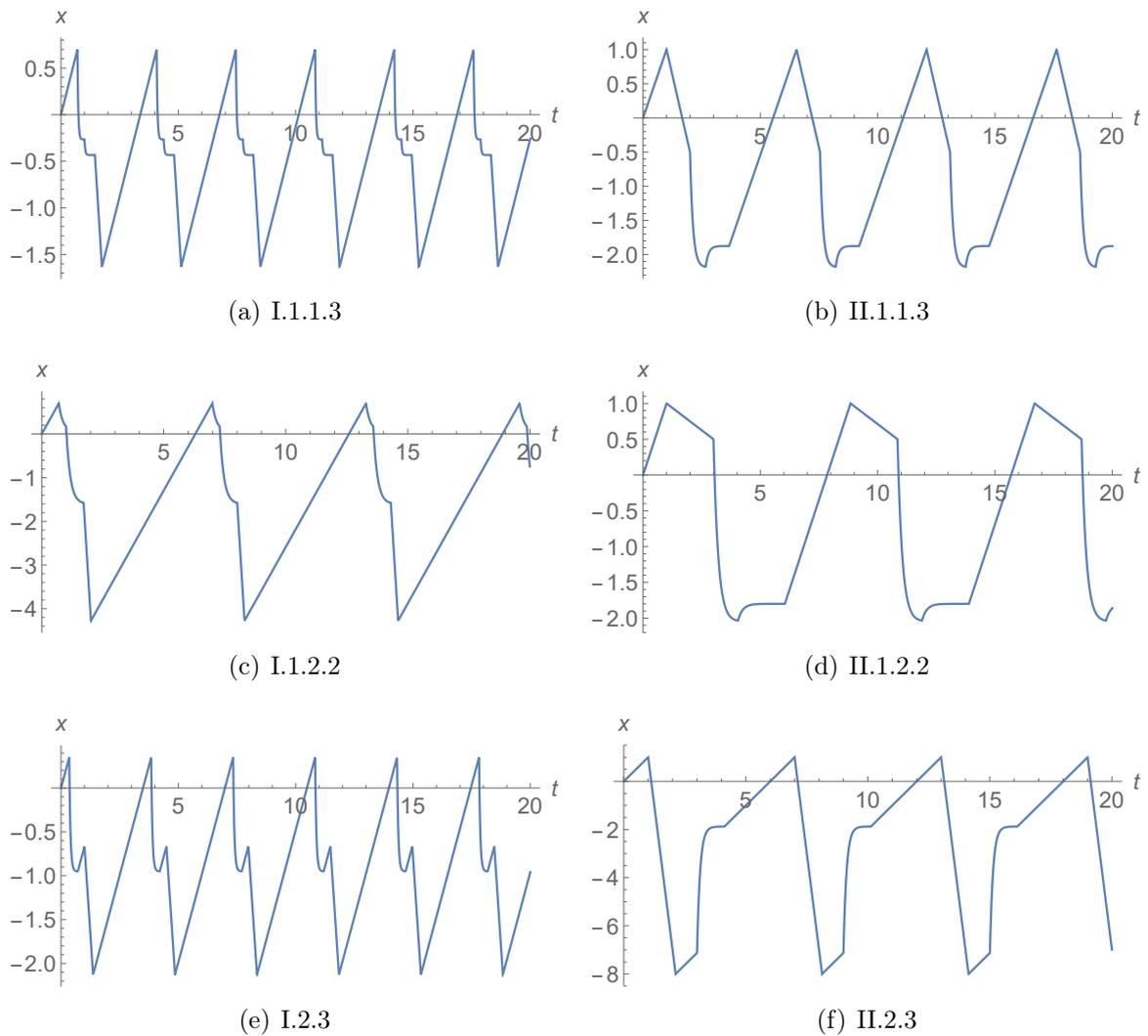


Рис. 5. Графики решений релейного уравнения в разных случаях выбора параметров a, b, c, Δ

Fig. 5. The graphs of solutions of the relay equation in different cases of the choice of the parameters a, b, c, Δ

I.1.1.3

$$x_*(t) = \begin{cases} x_A(0, 0; t) & \text{при } t \in [0, \Delta], \\ x_{C_1}(t) := x_C(\Delta, \Delta; t) & \text{при } t \in [\Delta, 1], \\ x_{D_1}(t) := x_D(1, x_{C_1}(1); t) & \text{при } t \in [1, t_* + \Delta], \\ x_{B_1}(t) := x_B(t_* + \Delta, x_{D_1}(t_* + \Delta); t) & \text{при } t \in [t_* + \Delta, t_* + 1], \\ x_{A_1}(t) := x_A(t_* + 1, x_{B_1}(t_* + 1); t) & \text{при } t \in [t_* + 1, T_*], \end{cases} \quad (15)$$

$$x_*(t + T_*) \equiv x_*(t),$$

где

$$t_* = -\frac{1}{b} \ln \frac{1/b + c}{1/b + c - \Delta} + \Delta, \quad T_* = t_* + 1 - x_{B_1}(t_* + 1). \quad (16)$$

I.1.2.2 Для $x_*(t)$ и T_* справедливы те же формулы, что в случае I.1.1.3, но при

$$t_* = -\frac{1}{b} \ln \left(\frac{a/b - c}{x_{C_1}(1) + a/b - c} \right) + 1.$$

I.2.3

$$x_*(t) = \begin{cases} x_A(0, 0; t) & \text{при } t \in [0, \Delta], \\ x_{C_1}(t) := x_C(\Delta, \Delta; t) & \text{при } t \in [\Delta, t_* + \Delta], \\ x_{A_2}(t) := x_A(t_* + \Delta, x_{C_1}(t_* + \Delta); t) & \text{при } t \in [t_* + \Delta, 1], \\ x_{B_2}(t) := x_B(1, x_{A_2}(1); t) & \text{при } t \in [1, t_* + 1], \\ x_A(t_* + 1, x_{B_2}(t_* + 1); t) & \text{при } t \in [t_* + 1, T_*], \end{cases}$$

$$x_*(t + T_*) \equiv x_*(t),$$

где

$$t_* = -\frac{1}{b} \ln \left(\frac{-1/b - c}{\Delta - 1/b - c} \right) + \Delta, \quad T_* = t_* + 1 - x_{B_2}(t_* + 1).$$

II.1.1.3

$$x_*(t) = \begin{cases} x_A(0, 0; t) & \text{при } t \in [0, 1], \\ x_{B_3}(t) := x_B(1, 1; t) & \text{при } t \in [1, \Delta], \\ x_{D_2}(t) := x_D(\Delta, x_{B_3}(\Delta); t) & \text{при } t \in [\Delta, t_* + 1], \\ x_{C_2}(t) := x_C(t_* + 1, x_{D_2}(t_* + 1); t) & \text{при } t \in [t_* + 1, t_* + \Delta], \\ x_A(t_* + \Delta, x_{C_2}(t_* + \Delta); t) & \text{при } t \in [t_* + \Delta, T_*], \end{cases}$$

$$x_*(t + T_*) \equiv x_*(t),$$

где

$$t_* = 1 + 1/a, \quad T_* = t_* + \Delta - x_{C_2}(t_* + \Delta).$$

II.1.2.2 Для $x_*(t)$ и T_* справедливы те же формулы, что в случае II.1.1.3, но при

$$t_* = -\frac{1}{b} \ln \left(\frac{a/b - c}{x_{B_3}(\Delta) + a/b - c} \right) + 1.$$

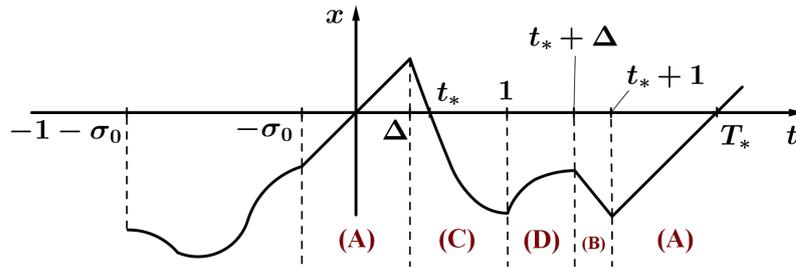


Рис. 6. Функция x_* в случае I.1.1.3
 Fig. 6. The function x_* in the case of I.1.1.3

II.2.3

$$x_*(t) = \begin{cases} x_A(0, 0; t) & \text{при } t \in [0, 1], \\ x_{B_3}(t) := x_B(1, 1; t) & \text{при } t \in [1, t_* + 1], \\ x_{A_3}(t) := x_A(t_* + 1, x_{B_3}(t_* + 1); t) & \text{при } t \in [t_* + 1, \Delta], \\ x_{C_3}(t) := x_C(\Delta, x_{A_3}(\Delta); t) & \text{при } t \in [\Delta, t_* + \Delta], \\ x_A(t_* + \Delta, x_{C_3}(t_* + \Delta); t) & \text{при } t \in [t_* + \Delta, T_*], \end{cases}$$

$$x_*(t + T_*) \equiv x_*(t),$$

где

$$t_* = 1 + 1/a, \quad T_* = t_* + \Delta - x_{C_3}(t_* + \Delta).$$

В частности в случае I.1.1.3 явные формулы для решения $x_*(t)$ имеют вид

$$x_A(0, 0; t) \equiv t, \tag{17}$$

$$x_{C_1}(t) \equiv (\Delta - 1/b - c) \exp(-b(t - \Delta)) + 1/b + c, \tag{18}$$

$$x_{D_1}(t) \equiv (x_{C_1}(1) + a/b - c) \exp(-b(t - 1)) - a/b + c, \tag{19}$$

$$x_{B_1}(t) \equiv -a(t - t_* - \Delta) + x_{D_1}(t_* + \Delta), \tag{20}$$

$$x_{A_1}(t) \equiv t - t_* - 1 - a(1 - \Delta) + x_{D_1}(t_* + \Delta). \tag{21}$$

Схематичный график функции x_* изображен на рисунке 6.

Теперь наложим ограничения на до сих пор не выбранный параметр σ_0 из (8), (13). Будем считать выполненным условие

$$\sigma_0 < \min\{T_* - t_* - 1, T_* - t_* - \Delta\}, \tag{22}$$

которое обеспечивает принадлежность функции $x_\varphi(t + T_*)$ множеству (8) (или (13)).

Проделанный выбор параметров позволяет сформулировать утверждение о существовании и устойчивости периодического решения уравнения (5).

Теорема 1. При выполнении сформулированных ограничений на параметры a, b, c, Δ и при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ уравнение (5) обладает единственным орбитально экспоненциально устойчивым циклом $x_*(t, \varepsilon)$, $x_*(-\sigma_0, \varepsilon) \equiv -\sigma_0$ периода $T_*(\varepsilon)$, который удовлетворяет предельным равенствам

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{0 \leq t \leq T_*(\varepsilon)} |x_*(t, \varepsilon) - x_*(t)| = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_*(\varepsilon) = T_*. \tag{23}$$

3. Доказательство теоремы 1

Общая схема доказательства дается в статьях [1, 13, 14]. Для ее изложения введем некоторые обозначения. Зафиксируем произвольную функцию $\varphi(t) \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$ и рассмотрим решение $x = x_\varphi(t, \varepsilon)$, $t \geq \sigma_0$, уравнения (5) с начальным условием $\varphi(t)$, $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$. Предположим, что уравнение $x_\varphi(t - \sigma_0, \varepsilon) = -\sigma_0$ имеет не менее 2-х положительных корней и обозначим 2-й корень через $t = T_\varphi$. Кроме того, зададим оператор последований Пуанкаре $\Pi_\varepsilon : C[-1 - \sigma_0, -\sigma_0] \rightarrow C[-1 - \sigma_0, -\sigma_0]$, определяя его равенством

$$\Pi_\varepsilon(\varphi) := x_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon), \quad -1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0 \quad (\text{или} \quad -\Delta - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0). \quad (24)$$

Дальнейший план доказательства такой же, как в упомянутых статьях. Для его реализации устанавливаются равномерные по φ и t асимптотические равенства для $x_\varphi(t, \varepsilon)$ на различных промежутках изменения t . Из них следует, что при подходящем выборе параметров σ_0, q_1, q_2 оператор Π_ε определен на множестве $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ и преобразует его в себя, что позволяет использовать известный принцип Шаудера. Затем выполняется оценка нормы производной Фреше оператора Π_ε , из которой следует, что он является сжимающим на множестве $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ и, тем самым, неподвижная точка в этом множестве единственна.

3.1. Построение асимптотики решения

В качестве примера построим асимптотику в случае I.1.1.3.

Построение асимптотики решения будет выполняться шагами по промежуткам изменения t .

Рассмотрим сперва отрезок $t \in [-\sigma_0, \Delta - \sigma_0]$. Считаем, что наряду с ограничением (22) выполняется условие $\sigma_0 < \Delta$. Здесь $t - 1$ и $t - \Delta$ принадлежат отрезкам, вложенным в $[-1 - \sigma_0, -\sigma_0]$, где функции $x(t - 1, \varepsilon)$, $x(t - \Delta, \varepsilon)$ совпадают с функциями $\varphi(t - 1)$, $\varphi(t - \Delta)$. Согласно (8), это означает, что $x(t - 1, \varepsilon) < -q_2$, $x(t - \Delta, \varepsilon) < -q_2$, следовательно, учитывая условия (2), получаем, что

$$F(x(t - 1, \varepsilon), \varepsilon) = 1 + O(\exp(-q_2/\varepsilon)), \quad (25)$$

$$G(x(t - \Delta, \varepsilon), \varepsilon) = O(\exp(-q_2/\varepsilon)).$$

Таким образом, на рассматриваемом отрезке имеем дело с задачей Коши

$$\dot{x} = 1 + O(\exp(-q_2/\varepsilon)), \quad x|_{t=-\sigma_0} = -\sigma_0,$$

откуда приходим к равномерному по φ асимптотическому равенству

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = t + O(\exp(-q/\varepsilon)) \quad \text{при} \quad t \in [-\sigma_0, \Delta - \sigma_0]. \quad (26)$$

Здесь и далее q обозначает подходящую положительную константу, точное значение которой не важно.

Для дальнейшего построения асимптотики решения $x_\varphi(t, \varepsilon)$ уравнения (5) зафиксируем параметр

$$\alpha \in (1/2, 1).$$

Рассматривая отрезок $[\Delta - \sigma_0, \Delta - \varepsilon^\alpha]$, получаем аналогичную предыдущей задаче Коши, но с остатками порядка $O(\exp(-q\varepsilon^{\alpha-1}))$ в нелинейности:

$$\dot{x} = 1 + O(\exp(-q\varepsilon^{\alpha-1})), \quad x|_{t=\Delta-\sigma_0} = \Delta - \sigma_0 + O(\exp(-q/\varepsilon)).$$

Таким образом, на указанном промежутке для решения справедлива формула

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = t + O(\exp(-q/\varepsilon)) \text{ при } t \in [\Delta - \sigma_0, \Delta - \varepsilon^\alpha]. \quad (27)$$

Теперь рассмотрим отрезок $[\Delta - \varepsilon^\alpha, \Delta + \varepsilon^\alpha]$, на котором решение релейного уравнения терпит излом. На этом участке для функции $F(x(t-1, \varepsilon), \varepsilon)$ сохраняется формула (25), а функция $G(x(t-\Delta, \varepsilon), \varepsilon)$ с учетом (26) принимает вид:

$$G(x(t-\Delta, \varepsilon), \varepsilon) = g\left(\exp\frac{t-\Delta+O(\exp(-q/\varepsilon))}{\varepsilon}\right).$$

На текущем участке имеем дело с задачей Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + b(c-x) \cdot g\left(\exp\frac{t-\Delta+O(\exp(-q/\varepsilon))}{\varepsilon}\right) + O(\exp(-q_2/\varepsilon)), \\ x|_{t=\Delta-\varepsilon^\alpha} = \Delta - \varepsilon^\alpha + O(\exp(-q/\varepsilon)). \end{cases} \quad (28)$$

Решение задачи (28) будем искать в виде

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = \Delta + \varepsilon w_1(\tau)|_{\tau=(t-\Delta)/\varepsilon} + \delta(t, \varepsilon), \quad (29)$$

где функция $w_1(\tau)$ задается равенством

$$w_1(\tau) := \tau + b(c-\Delta) \int_{-\infty}^{\tau} g(\exp s) ds, \quad (30)$$

а $\delta(t, \varepsilon)$ — подлежащий определению остаток.

Докажем, что остаток $\delta(t, \varepsilon)$ является равномерно по φ и t экспоненциально малым. С этой целью сперва выясним асимптотическое поведение функции w_1 .

Лемма 2. Для функции w_1 справедливы следующие асимптотические равенства:

$$w_1(\tau) = \tau + O(\exp \tau) \text{ при } \tau \rightarrow -\infty, \quad (31)$$

$$w_1(\tau) = (1 + bc - b\Delta)\tau + d_1 b(c - \Delta) + O(\exp(-\tau)) \text{ при } \tau \rightarrow +\infty, \text{ где} \quad (32)$$

$$d_1 := \int_0^1 \frac{g(u)}{u} du + \int_1^{+\infty} \frac{g(u) - 1}{u} du. \quad (33)$$

Отметим, что в равенстве (32) коэффициент $1 + bc - b\Delta$ при τ совпадает с угловым коэффициентом касательной к функции $x_*(t)$ в точке Δ справа.

Равенство (31) вытекает непосредственно из свойств (2) функции g .

Для доказательства равенства (32) представим интеграл (30) в виде суммы:

$$\int_{-\infty}^{\tau} g(\exp s) ds = \int_{-\infty}^0 g(\exp s) ds + \int_0^{\tau} g(\exp s) ds.$$

Первый интеграл после замены $u = \exp s$ преобразуется в $\int_0^1 \frac{g(u)}{u} du$, который в силу (2) равен конечному числу. Для второго, учитывая свойства (2), верно

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau} g(\exp s) ds &= \tau + \int_0^{+\infty} (g(\exp s) - 1) ds - \int_{\tau}^{+\infty} (g(\exp s) - 1) ds = \\ &= \tau + \int_1^{+\infty} \frac{g(u) - 1}{u} du + O(\exp(-\tau)), \end{aligned}$$

где интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{g(u)-1}{u} du$ сходится в силу свойств (2) функции g . Таким образом, лемма 2 доказана.

Далее, подставляя (29), (30) в (28) и учитывая асимптотические свойства функции w_1 из леммы 2, получаем задачу Коши для остатка δ :

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= b(c - \Delta) \cdot \left(g\left(\exp \frac{t - \Delta + O(\exp(-q/\varepsilon))}{\varepsilon} \right) - g\left(\exp \frac{t - \Delta}{\varepsilon} \right) \right) - \left(b(t - \Delta) + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon b^2(c - \Delta) \int_{-\infty}^{(t-\Delta)/\varepsilon} g(\exp s) ds + \delta(t, \varepsilon) \right) \cdot g\left(\exp \frac{t - \Delta + O(\exp(-q/\varepsilon))}{\varepsilon} \right), \quad (34) \end{aligned}$$

$$\delta|_{t=\Delta-\varepsilon^\alpha} = -\varepsilon b(c - \Delta) \int_{-\infty}^{-\varepsilon^{\alpha-1}} g(\exp s) ds + O(\exp(-q/\varepsilon)). \quad (35)$$

Принимая во внимание неравенство

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leq \frac{M_1}{1 + \min(x_1^2, x_2^2)} |x_1 - x_2| \text{ при всех } x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+, \quad (36)$$

асимптотические свойства интеграла $\int_{-\infty}^{\tau} g(\exp s) ds$ и то, что t изменяется на отрезке длины, пропорциональной ε^α , получаем асимптотику правых частей равенств (34) и (35):

$$\begin{cases} \dot{\delta} = -\delta \cdot g\left(\exp \frac{t - \Delta + O(\exp(-q/\varepsilon))}{\varepsilon} \right) + O(\varepsilon^\alpha), \\ \delta|_{t=\Delta-\varepsilon^\alpha} = O(\varepsilon \exp(-q\varepsilon^{\alpha-1})). \end{cases} \quad (37)$$

Из вида задачи Коши (37) следует, что $\delta(t, \varepsilon) = O(\varepsilon \exp(-q\varepsilon^{\alpha-1}))$ равномерно по φ .

Дальнейшее построение асимптотики решения $x_\varphi(t, \varepsilon)$ происходит аналогичным образом, поэтому ограничимся лишь результатом. Перед его формулировкой введем обозначение для константы

$$d_2 := \int_0^1 \frac{f(u) - 1}{u} du + \int_1^{+\infty} \frac{f(u) + a}{u} du.$$

Отметим, что в силу свойств (2) функции f соответствующие несобственные интегралы сходятся. Кроме того, определим функции w_2, w_3, w_4 , аналогичные (30):

$$w_2(\tau) := \dot{x}_{C_1}(1)\tau + bd_1(c - \Delta) + \int_{-\infty}^{\tau} (f(\exp s) - 1) ds, \quad (38)$$

$$w_3(\tau) := \dot{x}_{D_1}(t_\varphi(\varepsilon) + \Delta)\tau + bd_1(c - \Delta) + d_2 + b(c - x_{D_1}(t_\varphi(\varepsilon) + \Delta)) \int_{-\infty}^{\tau} (g(\exp((1+bc)s)) - 1) ds, \quad (39)$$

$$w_4(\tau) := -a\tau + bd_1(c - \Delta) + d_2 - \frac{d_1}{1+bc} + \int_{-\infty}^{\tau} (f(\exp((1+bc)s)) + a) ds. \quad (40)$$

Напомним, что d_1 определяется формулой (33). Сформулируем утверждение, описывающее асимптотическое поведение введенных функций (38), (39), (40) при $\tau \rightarrow -\infty$ и $\tau \rightarrow +\infty$.

Лемма 3. Для функций w_2, w_3, w_4 справедливы следующие асимптотические равенства:

$$w_2(\tau) = \dot{x}_{C_1}(1)\tau + bd_1(c - \Delta) + O(\exp(\tau)) \text{ при } \tau \rightarrow -\infty,$$

$$w_2(\tau) = \dot{x}_{D_1}(1)\tau + bd_1(c - \Delta) + d_2 + O(\exp(-\tau)) \text{ при } \tau \rightarrow +\infty;$$

$$w_3(\tau) = \dot{x}_{D_1}(t_\varphi(\varepsilon) + \Delta)\tau + bd_1(c - \Delta) + d_2 + O(\exp(-(1+bc)\tau)) \text{ при } \tau \rightarrow -\infty,$$

$$w_3(\tau) = -a\tau + bd_1(c - \Delta) + d_2 - \frac{d_1}{1+bc} + O(\exp((1+bc)\tau)) \text{ при } \tau \rightarrow +\infty;$$

$$w_4(\tau) = -a\tau + bd_1(c - \Delta) + d_2 - \frac{d_1}{1+bc} + O(\exp(-(1+bc)\tau)) \text{ при } \tau \rightarrow -\infty,$$

$$w_4(\tau) = \tau + bd_1(c - \Delta) + d_2 - \frac{d_1 + d_2}{1+bc} + O(\exp((1+bc)\tau)) \text{ при } \tau \rightarrow +\infty.$$

Конструктивно, методом шагов, а также с использованием леммы 3, устанавливается справедливость следующего утверждения.

Лемма 4. Уравнение (5) с произвольной начальной функцией φ из класса (8) имеет решение $x_\varphi(t, \varepsilon)$ с асимптотикой

1. $x_\varphi(t, \varepsilon) = t + O(\exp(-q/\varepsilon))$ при $t \in [-\sigma_0, \Delta - \sigma_0]$;
2. $x_\varphi(t, \varepsilon) = t + O(\exp(-q/\varepsilon))$ при $t \in [\Delta - \sigma_0, \Delta - \varepsilon^\alpha]$;
3. $x_\varphi(t, \varepsilon) = \Delta + \varepsilon w_1(\tau)|_{\tau=(t-\Delta)/\varepsilon} + O(\varepsilon \exp(-q\varepsilon^{\alpha-1}))$ при $t \in [\Delta - \varepsilon^\alpha, \Delta + \varepsilon^\alpha]$;
4. $x_\varphi(t, \varepsilon) = x_{C_1}(t) + \varepsilon b d_1(c - \Delta) + O(\varepsilon^{2\alpha})$ при $t \in [\Delta + \varepsilon^\alpha, 1 - \varepsilon^\alpha]$;
5. $x_\varphi(t, \varepsilon) = x_{C_1}(1) + \varepsilon w_2(\tau)|_{\tau=(t-1)/\varepsilon} + O(\varepsilon^{2\alpha})$ при $t \in [1 - \varepsilon^\alpha, 1 + \varepsilon^\alpha]$;
6. $x_\varphi(t, \varepsilon) = x_{D_1}(t) + \varepsilon(b d_1(c - \Delta) + d_2) + O(\varepsilon^{2\alpha})$ при $t \in [1 + \varepsilon^\alpha, t_\varphi(\varepsilon) + \Delta - \varepsilon^\alpha]$, где $t_\varphi(\varepsilon)$ — первый положительный корень уравнения $x_\varphi(t, \varepsilon) = 0$, который лежит при этом на интервале $(\Delta + \varepsilon^\alpha, 1 - \varepsilon^\alpha)$ (см. п. 4);
7. $x_\varphi(t, \varepsilon) = x_{D_1}(t_\varphi(\varepsilon) + \Delta) + \varepsilon w_3(\tau)|_{\tau=(t-t_\varphi(\varepsilon)-\Delta)/\varepsilon} + O(\varepsilon^{2\alpha})$ при $t \in [t_\varphi(\varepsilon) + \Delta - \varepsilon^\alpha, t_\varphi(\varepsilon) + \Delta + \varepsilon^\alpha]$;
8. $x_\varphi(t, \varepsilon) = x_{B_1}(t) + \varepsilon\left(b d_1(c - \Delta) + d_2 - \frac{d_1}{1 + bc}\right) + O(\varepsilon^{2\alpha})$ при $t \in [t_\varphi(\varepsilon) + \Delta + \varepsilon^\alpha, t_\varphi(\varepsilon) + 1 - \varepsilon^\alpha]$;
9. $x_\varphi(t, \varepsilon) = x_{B_1}(t_\varphi(\varepsilon) + 1) + \varepsilon w_4(\tau)|_{\tau=(t-t_\varphi(\varepsilon)-1)/\varepsilon} + O(\varepsilon^{2\alpha})$ при $t \in [t_\varphi(\varepsilon) + 1 - \varepsilon^\alpha, t_\varphi(\varepsilon) + 1 + \varepsilon^\alpha]$;
10. $x_\varphi(t, \varepsilon) = x_{A_1}(t) + \varepsilon\left(b d_1(c - \Delta) + d_2 - \frac{d_1 + d_2}{1 + bc}\right) + O(\varepsilon^{2\alpha})$ при $t \in [t_\varphi(\varepsilon) + 1 + \varepsilon^\alpha, T_\varphi(\varepsilon) - \sigma_0/2]$, где $T_\varphi(\varepsilon)$ — второй положительный корень уравнения $x_\varphi(t - \sigma_0, \varepsilon) = -\sigma_0$, для которого справедлива формула

$$T_\varphi(\varepsilon) = t_\varphi(\varepsilon) + 1 - x_{B_1}(t_\varphi(\varepsilon)) + O(\varepsilon). \quad (41)$$

Все остатки здесь равномерны по $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$ и t из соответствующих промежутков.

Тем самым, построена асимптотика решения $x_\varphi(t, \varepsilon)$ с начальной функцией $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$ (см. (8)). Причем из формул леммы 4 следует, что для решения $x_\varphi(t, \varepsilon)$ и корня $T_\varphi(\varepsilon)$ верны равномерные по $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$ оценки

$$\max_{t \in [-\sigma_0, T_* - \sigma_0/2]} |x_\varphi(t, \varepsilon) - x_*(t)| = O(\varepsilon), \quad T_\varphi(\varepsilon) = T_* + O(\varepsilon), \quad (42)$$

где $x_*(t)$, напомним, — функция (15), а T_* — период этой функции, задаваемый формулой (16).

3.2. Существование, единственность и устойчивость периодического решения

Следующий шаг наших рассуждений состоит в доказательстве существования, единственности и устойчивости периодического решения.

Из равенств (42) заключаем, что оператор (24) определен на множестве $S(\sigma_0, q_1, q_2)$, причем равномерно по φ

$$\max_{t \in [-1-\sigma_0, -\sigma_0]} |x_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon) - x_*(t)| = O(\varepsilon). \quad (43)$$

Для доказательства включения

$$\Pi_\varepsilon(S(\sigma_0, q_1, q_2)) \subset S(\sigma_0, q_1, q_2) \quad (44)$$

так же, как в статьях [1, 13, 14], наложим на параметры q_1, q_2 ограничения

$$q_1 > - \min_{t \in [-1-\sigma_0, -\sigma_0]} x_*(t), \quad 0 < q_2 < - \max_{t \in [-1-\sigma_0, -\sigma_0]} x_*(t) \quad (45)$$

и рассмотрим множество функций $\hat{S}(\sigma_0, q_1, q_2)$, получающееся из $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ при замене в (8) нестрогих равенств строгими. В силу (43) требуемое включение (44) будет выполняться при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ при условии

$$x_*(t) \in \hat{S}(\sigma_0, q_1, q_2), \quad (46)$$

что верно в силу (45).

Таким образом, оператор Π_ε является компактным и преобразует в себя замкнутое ограниченное и выпуклое множество $S(\sigma_0, q_1, q_2)$. Отсюда, используя принцип Шаудера, получаем, что этот оператор имеет в $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ по крайней мере одну неподвижную точку $\varphi = \varphi_*(t, \varepsilon)$. А значит, решение $x_*(t, \varepsilon)$ уравнения (5) с начальной функцией $\varphi_*(t, \varepsilon)$, $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$, является периодическим с периодом $T_*(\varepsilon) = T_\varphi|_{\varphi=\varphi_*}$ и в силу (42), (43) удовлетворяет свойствам (23).

Единственность и устойчивость периодического решения $x_*(t, \varepsilon)$ доказываются стандартным образом на основе оценки производной Фреше оператора Π_ε , получаемой исходя из вида решения $x_\varphi(t, \varepsilon)$ (см. [1, 13, 14]).

4. Заключение

Напомним, что поскольку решение системы (3) отыскивается в виде бегущей волны (4), то на период искомого решения накладывается ограничение: $T = m\Delta/k$, где m — число уравнений в системе (1), $k \in \mathbb{N}$. В связи с этим, далее, чтобы подчеркнуть зависимость периодов функций $x_*(t)$, $x_*(t, \varepsilon)$ (см. (15) и (23)) от фазового сдвига Δ , будем обозначать их $T_*(\Delta)$, $T_*(\Delta, \varepsilon)$ соответственно. Отметим, что из формул (16)–(20) следует справедливость равенства

$$T_*(\Delta) = -\frac{1}{b} \ln \frac{1/b + c}{1/b + c - \Delta} + 1 + a(-a\Delta + a/b - c + (1/b + c) \exp(-b\Delta) - \frac{(1/b + c)(1 + a)}{1 + bc - b\Delta} \exp(-b(2\Delta - 1))). \quad (47)$$

В силу (23) верно представление $T_*(\varepsilon, \Delta) = T_*(\Delta) + O(\varepsilon)$. Потребуем, чтобы $T_*(\Delta) + O(\varepsilon) = m\Delta/k$, где $T_*(\Delta)$ описывается формулой (47), m определяет число нейронов в модели (1), $k \in \mathbb{N}$.

Подводя итог, отметим, что настоящая работа дополняет исследование, проделанное в работе [1]. Доказано, что для уравнения (5) можно выделить ровно шесть случаев значений параметров a , b , c , Δ , при которых существует устойчивое периодическое решение с одним промежутком положительности и одним промежутком отрицательности на периоде (см. рис. 2), причем длина отрицательной фазы не меньше наибольшего из запаздываний уравнения (5). Таким образом, полностью изучен вопрос существования и устойчивости периодических решений указанного вида для уравнения (5) в широкой области параметров.

Список литературы / References

- [1] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Об одном способе математического моделирования химических синапсов”, *Дифференциальные уравнения*, **49**:10 (2013), 1227–1244; [Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “On a Method for Mathematical Modeling of Chemical Synapses”, *Differential Equations*, **49**:10 (2013), 1193–1210].
- [2] Somers D., Kopell N., “Rapid synchronization through fast threshold modulation”, *Biol. Cybern.*, **68** (1993), 393–407.
- [3] Somers D., Kopell N., “Anti-phase solutions in relaxation oscillators coupled through excitatory interactions”, *J. Math. Biol.*, **33** (1995), 261–280.
- [4] Izhikevich E. M., *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting*, MIT Press, 2010.
- [5] FitzHugh R. A., “Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane”, *Biophysical J.*, **1** (1961), 445–466.
- [6] Terman D., “An Introduction to Dynamical Systems and Neuronal Dynamics”, *Tutorials in Mathematical Biosciences I, Lecture Notes in Mathematics*, **1860** (2005), 21–68.
- [7] Hutchinson G. E., “Circular causal systems in ecology”, *Ann. N. Y. Acad. of Sci.*, **50** (1948), 221–246.
- [8] Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х., “Реле с запаздыванием и его C^1 -аппроксимация”, *Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН*, **216** (1997), 126–153; [Kolesov A. Yu., Mishchenko E. F., Rozov N. Kh., “Relay with delay and its C^1 -approximation”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **216** (1997), 119–146].
- [9] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Релаксационные автоколебания в нейронных системах. I”, *Дифференциальные уравнения*, **47**:7 (2011), 919–932; [Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Relaxation self-oscillations in neuron systems: I”, *Differential Equations*, **47**:7 (2011), 927–941].
- [10] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Релаксационные автоколебания в нейронных системах. II”, *Дифференциальные уравнения*, **47**:12 (2011), 1675–1692; [Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Relaxation self-oscillations in neuron systems: II”, *Differential Equations*, **47**:12 (2011), 1697–1713].
- [11] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Релаксационные автоколебания в нейронных системах. III”, *Дифференц. уравнения*, **48**:2 (2012), 155–170; [Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Relaxation self-oscillations in neuron systems: III”, *Differential Equations*, **48**:2 (2012), 159–175].
- [12] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Дискретные автоволны в нейронных системах”, *ЖВМ и МФ*, **52**:5 (2012), 840–858; [Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Discrete autowaves in neural systems”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **52**:5 (2012), 702–719].
- [13] Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х., “Об одной модификации уравнения Хатчинсона”, *ЖВМ и МФ*, **50**:12 (2010), 2099–2112; [Kolesov A. Yu., Mishchenko E. F.,

- Rozov N. Kh., “A modification of Hutchinson’s equation”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **50**:12 (2010), 1990–2002].
- [14] Преображенская М. М., “Существование и устойчивость релаксационных циклов в нейродинамической модели с двумя запаздываниями”, *Вестник НИЯУ МИФИ*, **5**:4 (2016), 351–366; [Preobrazhenskaia M. M., “Existence and stability of relaxation cycles in a neurodynamic model with two delays”, *Vestnik NIYaU MIFI*, **5**:4 (2016), 351–366].
- [15] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Релаксационные автоколебания в сетях импульсных нейронов”, *УМН*, **70**:3(423) (2015), 3–76; [Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Self-excited relaxation oscillations in networks of impulse neurons”, *Russian Math. Surveys*, **70**:3 (2015), 383–452].
- [16] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Релаксационные автоколебания в сетях Хопфилда с запаздыванием”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **77**:2 (2013), 53–96; [Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Relaxation self-oscillations in Hopfield networks with delay”, *Izvestiya: Mathematics*, **77**:2 (2013), 271–312].

Preobrazhenskaia M. M., "Relaxation Cycles in a Model of Synaptically Interacting Oscillators", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:2 (2017), 186–204.

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-2-186-204

Abstract. In this paper the mathematical model of a neural network with a ring synaptic interaction elements is considered. The model is a system of scalar nonlinear differential-difference equations, the right parts of which depend on a large parameter. The unknown functions included in the system characterize the membrane potentials of the neurons. The search of relaxation cycles within the system of equations is interested. To this end solutions of the task are found in the form of discrete traveling waves. It allows to research a scalar nonlinear differential-difference equations with two delays instead of system. Further, a limit object that represents a relay equation with two delays is defined by large parameter tends to infinity. There are six cases of restrictions on the parameters. In every case exist alone periodic solution of relay equation started from initial function from suitable function class. It is structurally proved by using the step method. Next, the existence of a relaxation periodic solutions of a singularly perturbed equation with two delays is proved by using Poincare operator and Schauder principle. The asymptotics of this solution is constructed, and then it is proved that the solution is close to decision of the relay equation. Because of the exponential estimate Frechet derivative of the Poincare operator implies the uniqueness and stability of solutions of differential-difference equation with two delays.

Keywords: relaxation oscillations, delay, large parameter, synaptic connection

About the authors:

Margarita M. Preobrazhenskaia, orcid.org/0000-0002-7032-1155,
P.G. Demidov Yaroslavl State University, 14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia,
Scientific Center in Chernogolovka RAS, 9 Lesnaya str., Chernogolovka, Moscow region 142432, Russia,
e-mail: rita.preo@gmail.com

Acknowledgments:

This work was supported by the Russian Science Foundation (project nos. №14-21-00158).