Моделирование и анализ информационных систем. Т. 24, №2 (2017), с. 205–214
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 24, No 2 (2017), pp. 205–214

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-2-205-214

УДК 512.71

О гипотезах Тэйта для дивизоров на расслоенном многообразии и его общем схемном слое в случае конечной характеристики

Прохорова Т. В.

получена 12 декабря 2016

Аннотация. В работе изучаются взаимоотношения между гипотезой Тэйта для дивизоров на расслоенном многообразии над конечным полем и гипотезой Тэйта для дивизоров на общем схемном слое при условии, что общий схемный слой имеет иррегулярность нуль. Пусть $\pi : X \to C$ – сюръективный морфизм гладких проективных многообразий над конечным полем $\mathbb{F}_q$ характеристики p, C – кривая, общий схемный слой морфизма π является гладким многообразием V над полем $k = \kappa(C)$ рациональных функций кривой C, $\overline{k}$ – алгебраическое замыкание поля k, k^s – его сепарабельное замыкание, $\mathrm{NS}(V)$ – группа Нерона – Севери классов дивизоров на многообразии V по модулю алгебраической эквивалентности, причем выполнены следующие условия: $H^1(V \otimes \overline{k}, \mathcal{O}_{V\otimes \overline{k}}) = 0, \quad \mathrm{NS}(V) = \mathrm{NS}(V \otimes \overline{k})$. Если для простого числа l, не делящего $\mathrm{Card}([\mathrm{NS}(V)]_{\mathrm{tors}})$ и отличного от характеристики поля $\mathbb{F}_q$, верно соотношение $\mathrm{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \tilde{\to} [H^2(V \otimes k^s, \mathbb{Q}_l(1))]^{\mathrm{Gal}(k^s/k)}$ (другими словами, если верна гипотеза Тэйта для дивизоров на V), то для любого простого числа $l \neq \mathrm{char}(\mathbb{F}_q)$ гипотеза Тэйта верна для дивизоров на X: $\mathrm{NS}(X) \otimes \mathbb{Q}_l \tilde{\to} [H^2(X \otimes \overline{\mathbb{F}}_q, \mathbb{Q}_l(1))]^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)}$. В частности, из этого результата следует гипотеза Тэйта для дивизоров на арифметической модели K3 – поверхности над достаточно большим глобальным полем конечной характеристики, отличной от 2.

Ключевые слова: гипотеза Тэйта, глобальное поле, группа Брауэра, арифметическая модель, K 3 – поверхность

Для цитирования: Прохорова Т. В., "О гипотезах Тэйта для дивизоров на расслоенном многообразии и его общем схемном слое в случае конечной характеристики", *Моделирование и анализ информационных систем*, **24**:2 (2017), 205–214.

Об авторах:
Прохорова Татьяна Вячеславовна, orcid.org/0000-0002-6883-2087, канд. физ.-мат. наук,
Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых,
ул. Горького, 87, г. Владимир, 600000 Россия,
e-mail: tvprokhorova@mail.ru

Введение

Пусть V – гладкое проективное многообразие над глобальным полем $k = \kappa(C)$ рациональных функций на гладкой проективной кривой C над конечным полем $\mathbb{F}_q$ характеристики p. Предположим, что существует проективный плоский $\mathbb{F}_q$-морфизм

$\pi : X \to C$, где X – регулярная схема, общий схемный слой π изоморфен V (мы называем $\pi : X \to C$ *арифметической моделью* V).

В работе доказано, что из гипотезы Тэйта для дивизоров на регулярном многообразии V над достаточно большим глобальным полем k следует гипотеза Тэйта для дивизоров на X.

Автор благодарит С. Г. Танкеева за ценные советы.

Основные результаты

Предложение 1. [1, предложение 0.3] *Пусть X – гладкое проективное многообразие над конечным полем $\mathbb{F}_q$. Если для простого числа $l \neq \mathrm{char}(\mathbb{F}_q)$ верна гипотеза Тэйта о дивизориальных циклах:*

$$\mathrm{NS}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_l = H^2(X \otimes \overline{\mathbb{F}}_q, \mathbb{Q}_l(1))^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)},$$

то это соотношение верно для всех $l \neq \mathrm{char}(\mathbb{F}_q)$.

Предложение 2. [2, предложение 4.3] *Пусть X – гладкое проективное многообразие над конечным полем $\mathbb{F}_q$. Следующие утверждения эквивалентны*:

a) $\mathrm{NS}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_l = H^2(X \otimes \overline{\mathbb{F}}_q, \mathbb{Q}_l(1))^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)}$;

b) группа $\mathrm{Br}'(X)(l)$ *конечна*;

c) каноническое отображение $\mathbb{Z}_l \otimes \mathrm{Pic}\, X \to H^2(X_{et}, \mathbb{Z}_l(1))$ *биективно* ;

d) порядок полюса дзета-функции Хассе – Вейля
$Z(X,t)$ *в точке* $t = q^{-1}$ *равен рангу группы* $\mathrm{Pic}\, X$.

В этой работе мы докажем следующий основной результат:

Теорема 1. *Пусть $\pi : X \to C$ – сюръективный морфизм гладких проективных многообразий над конечным полем $\mathbb{F}_q$ характеристики p, C – кривая, общий схемный слой морфизма π является гладким многообразием V над полем $k = \kappa(C)$,* $H^1(V \otimes \overline{k}, \mathcal{O}_{V\otimes\overline{k}}) = 0$, $\mathrm{NS}(V) = \mathrm{NS}(V \otimes \overline{k})$. *Если для простого числа l, не делящего* $\mathrm{Card}([\mathrm{NS}(V)]_{\mathrm{tors}})$ *и отличного от характеристики поля $\mathbb{F}_q$, верно соотношение*

$$\mathrm{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} [H^2(V \otimes k^{\mathrm{s}}, \mathbb{Q}_l(1))]^{\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{s}}/k)}$$

(другими словами, если верна гипотеза Тэйта для дивизоров на V), то для любого простого числа $l \neq \mathrm{char}(\mathbb{F}_q)$ гипотеза Тэйта верна для дивизоров на X:

$$\mathrm{NS}(X) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} [H^2(X \otimes \overline{\mathbb{F}}_q, \mathbb{Q}_l(1))]^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)}.$$

Доказательство. Будем обозначать через $\kappa(y)$ поле вычетов точки $y \in X$.

Пусть $i_y : \mathrm{Spec}\,\kappa(y) \to X$ – каноническое вложение $y \in X$ и

$$\mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}} = \bigoplus_{\substack{y \in X\setminus V \\ \mathrm{codim}_X(y)=1}} i_{y*}\mathbb{Z}$$

– пучок вертикальных дивизоров Картье. Существует точная последовательность пучков (в этальной топологии схемы X)

$$0 \to \mathbb{G}_{m,X} \to h_* \mathbb{G}_{m,V} \to \mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}} \to 0, \tag{1}$$

где $h : V \hookrightarrow X$ – вложение общего схемного слоя морфизма π [3, последняя формула на с. 637].

Мы имеем

$$\mathrm{Div}_X = \bigoplus_{\substack{y \in X \\ \mathrm{codim}_X(y)=1}} i_{y*}\mathbb{Z} = \left(\bigoplus_{\substack{y \in V \\ \mathrm{codim}_X(y)=1}} i_{y*}\mathbb{Z} \right) \bigoplus \mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}}.$$

Хорошо известно, что $H^1(X, \mathrm{Div}_X) = 0$ [4, гл. 3, § 2, пример 2.22]. Следовательно, $H^1(X, \mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}}) = 0$. Значит, (1) даёт точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 &\to H^2(X, \mathbb{G}_m) \to H^2(X, h_*\mathbb{G}_{m,V}) \to H^2(X, \mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}}) \\ &\to H^3(X, \mathbb{G}_m) \to H^3(X, h_*\mathbb{G}_{m,V}) \to H^3(X, \mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}}). \end{aligned} \tag{2}$$

Спектральная последовательность Лере

$$E_2^{p,q} = H^p(X, R^q h_* \mathbb{G}_{m,V}) \Rightarrow H^{p+q}(V, \mathbb{G}_{m,V})$$

даёт точную последовательность

$$0 \to E_2^{1,0} \to E^1 \to E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2^{0,1}} E_2^{2,0} \to E_1^2 \to E_2^{1,1} \to E_2^{3,0},$$

где $E_1^2 = \mathrm{Ker}[E^2 \to E_2^{0,2}]$ [4, приложение B]. Следовательно, мы имеем точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 &\to H^1(X, h_*\mathbb{G}_{m,V}) \to H^1(V, \mathbb{G}_{m,V}) \\ &\to H^0(X, R^1 h_*\mathbb{G}_{m,V}) \xrightarrow{d_2^{0,1}} H^2(X, h_*\mathbb{G}_{m,V}) \\ &\to \mathrm{Ker}[H^2(V, \mathbb{G}_{m,V}) \to H^0(X, R^2 h_*\mathbb{G}_{m,V})] \\ &\to H^1(X, R^1 h_*\mathbb{G}_{m,V}). \end{aligned} \tag{3}$$

С другой стороны, $R^1 h_* \mathbb{G}_{m,V} = 0$ в силу аргументов п. (b) доказательства леммы 4.4.1 в [3]. Поэтому (3) даёт изоморфизм

$$H^2(X, h_*\mathbb{G}_{m,V}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}'(V) \to H^0(X, R^2 h_*\mathbb{G}_{m,V})]$$

и (2) даёт точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Br}'(X) \to \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}'(V) \to H^0(X, R^2 h_*\mathbb{G}_{m,V})] \to H^2(X, \mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}}). \tag{4}$$

В дальнейшем мы обозначаем через η общую схемную точку кривой C и через $\kappa(y)^{\mathrm{s}}$ сепарабельное замыкание поля вычетов $\kappa(y)$ в алгебраическом замыкании $\overline{\kappa(y)}$.

Существует каноническое отображение $\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}'(V)$, индуцированное структурным морфизмом $V \to \operatorname{Spec} k$. С другой стороны, существует каноническая точная последовательность

$$0 \to \mathrm{Br}(C) \to \mathrm{Br}(k) \to \bigoplus_{\substack{v\in C\\ v\neq\eta}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(\kappa(v)^{\mathrm{s}}/\kappa(v)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ \to H^3(C, \mathbb{G}_m) \to H^3(\mathrm{Spec}(k), \mathbb{G}_m)$$

[4, гл. III, § 2, пример 2.22(a)], где $\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}$ обозначает группу непрерывных гомоморфизмов. В нашем случае C – полная гладкая алгебраическая кривая над конечным полем F_q, поэтому $\mathrm{Br}(C) = 0$ и $H^3(C, \mathbb{G}_m) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ [4, гл. III, § 2, пример 2.22(g)]. Мы приходим к хорошо известной точной последовательности глобальной теории полей классов

$$0 \to \mathrm{Br}(k) \to \bigoplus_{\substack{v\in C\\ v\neq\eta}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(\kappa(v)^{\mathrm{s}}/\kappa(v)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \tag{5}$$

Для замкнутой точки $v \in C$ рассмотрим каноническое вложение $i_v : \operatorname{Spec} \kappa(v) \hookrightarrow C$. Спектральная последовательность Лере

$$E_2^{p,q} = H^p(C, R^q i_{v*}\mathbb{Z}) \to H^{p+q}(\operatorname{Spec} \kappa(v), \mathbb{Z})$$

дает точную последовательность

$$0 \to E_2^{1,0} \to E^1 \to E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2^{0,1}} E_2^{2,0} \to E_1^2 \to E_2^{1,1},$$

где $E_1^2 = \mathrm{Ker}[E^2 \to E_2^{0,2}]$ [4, приложение B]; следовательно, мы имеем точную последовательность

$$\begin{aligned} &0 \to H^1(C, i_{v*}\mathbb{Z}) \to H^1(\operatorname{Spec} \kappa(v), \mathbb{Z}) \\ &\quad\to H^0(C, R^1 i_{v*}\mathbb{Z}) \xrightarrow{d_2^{0,1}} H^2(C, i_{v*}\mathbb{Z}) \\ &\quad\to \mathrm{Ker}[H^2(\operatorname{Spec} \kappa(v), \mathbb{Z}) \to H^0(C, R^2 i_{v*}\mathbb{Z})] \\ &\quad\to H^1(C, R^1 i_{v*}\mathbb{Z}). \end{aligned} \tag{6}$$

Хорошо известно, что $R^q i_{v*}\mathbb{Z} = 0$ для всех $q > 0$ [4, гл. III, § 2, пример 2.22(a)]; поэтому (6) даёт изоморфизм

$$H^2(C, i_{v*}\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^2(\operatorname{Spec} \kappa(v), \mathbb{Z}).$$

С другой стороны,

$$H^2(\operatorname{Spec} \kappa(v), \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(\kappa(v)^{\mathrm{s}}/\kappa(v)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

[4, гл. III, § 2, пример 2.22]. Следовательно,

$$
\begin{aligned}
H^2(C, \mathrm{Div}_C) &\stackrel{\mathrm{def}}{=} H^2\left(C, \bigoplus_{\substack{v\in C\\ v\neq\eta}} i_{v*}\mathbb{Z}\right)\\
&= \bigoplus_{\substack{v\in C\\ v\neq\eta}} H^2(C, i_{v*}\mathbb{Z})\\
&= \bigoplus_{\substack{v\in C\\ v\neq\eta}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(\kappa(v)^{\mathrm{s}}/\kappa(v)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})
\end{aligned}
$$

[4, гл. III, § 2, пример 2.22(a)]. Поэтому (5) даёт точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Br}(k) \to H^2(C, \mathrm{Div}_C). \tag{7}$$

С другой стороны, имеется канонический морфизм

$$\pi^* : H^*(C, \mathrm{Div}_C) \to H^*(X, \pi^*(\mathrm{Div}_C)).$$

Каноническое вложение $\pi^*(\mathrm{Div}_C) \hookrightarrow \mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}}$ даёт каноническое отображение

$$H^2(X, \pi^*(\mathrm{Div}_C)) \to H^2(X, \mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}}).$$

Следовательно, имеются канонические морфизмы

$$\varphi : \mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}'(V), \tag{8}$$

$$H^2(C, \mathrm{Div}_C) \to H^2(X, \mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}}). \tag{9}$$

Пусть $B = \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}'(V) \to H^0(X, R^2h_*\mathbb{G}_{m,V})]$. Очевидно, что (4), (7) – (9) дают коммутативную диаграмму с точными строками

$$
\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Br}'(X) & \longrightarrow & B & \longrightarrow & H^2(X, \mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}})\\
 & & \uparrow & & \varphi\uparrow & & \uparrow\\
 & & 0 & \longrightarrow & \mathrm{Br}(k)\cap\varphi^{-1}(B) & \longrightarrow & H^2(C, \mathrm{Div}_C)
\end{array}
\tag{10}
$$

По условию теоремы 1 для простого числа l, не делящего $\mathrm{Card}([\mathrm{NS}(V)]_{\mathrm{tors}})$ и отличного от характеристики поля $\mathbb{F}_q$, верна гипотеза Тэйта для дивизоров на V

$$\mathrm{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \stackrel{\sim}{\to} [H^2(V \otimes k^{\mathrm{s}}, \mathbb{Q}_l(1))]^{\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{s}}/k)}.$$

Поэтому в силу [5, теорема 2.2] группа $\mathrm{Br}'(V \otimes_k k^{\mathrm{s}})^{\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{s}}/k)}(l)$ конечна.

Хорошо известно, что спектральная последовательность Хохшильда–Серра

$$H^p(\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{s}}/k), H^q_{\text{ét}}(V \otimes_k k^{\mathrm{s}}, \mathbb{G}_m)) \Longrightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(V, \mathbb{G}_m)$$

даёт точную последовательность

$$0 \to E_2^{1,0} \to E^1 \to E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2^{0,1}} E_2^{2,0} \to E_1^2 \to E_2^{1,1} \to E_2^{3,0},$$

где $E_1^2 = \mathrm{Ker}[E^2 \to E_2^{0,2}]$; очевидно, что эта последовательность имеет вид

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Pic}(V) &\to \mathrm{Pic}(V \otimes_k k^{\mathrm{s}})^{\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{s}}/k)} \\ &\to \mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}'(V) \to \mathrm{Br}'(V \otimes_k k^{\mathrm{s}})^{\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{s}}/k)}] \\ &\to H^1(\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{s}}/k), \mathrm{Pic}(V \otimes_k k^{\mathrm{s}})) \to H^3(\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{s}}/k), \mathbb{G}_m). \end{aligned}$$

Поэтому из конечности группы $\mathrm{Br}'(V \otimes_k k^{\mathrm{s}})^{\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{s}}/k)}(l)$ и тривиальности группы $H^1(\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{s}}/k), \mathrm{Pic}(V \otimes_k k^{\mathrm{s}}))(l)$ (так как l не делит порядок группы кручения в $\mathrm{Pic}(V \otimes_k k^{\mathrm{s}})$) следует, что группа $[\mathrm{Br}'(V)/\,\mathrm{Im}(\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}'(V))](l)$ конечна.

Значит, группа

$$B/[\varphi(\mathrm{Br}(k)) \cap B](l) = \mathrm{Coker}[\mathrm{Br}(k) \cap \varphi^{-1}(B) \xrightarrow{\varphi} B](l)$$

конечная. Поэтому достаточно показать, что пересечение группы $\mathrm{Br}'(X)(l)$ с образом морфизма групп

$$[\mathrm{Br}(k) \cap \varphi^{-1}(B)](l) \xrightarrow{\varphi} B(l)$$

конечно. В силу коммутативности диаграммы (10) достаточно доказать конечность ядра канонического отображения $H^2(C, \mathrm{Div}_C) \to H^2(X, \mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}})$.

Очевидно, что ядро отображения $H^2(C, \mathrm{Div}_C) \to H^2(X, \mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}})$ является прямой суммой по всем замкнутым точкам v кривой C ядер отображений

$$\pi^* : H^2(\mathrm{Spec}\,\kappa(v), \mathbb{Z}) \to \bigoplus_D H^2(\mathrm{Spec}\,\kappa(D), \mathbb{Z}), \tag{11}$$

которые также можно записать в виде

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(\overline{\kappa(v)}/\kappa(v)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \bigoplus_D \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(\kappa(D)^{\mathrm{s}}/\kappa(D)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Здесь D пробегает неприводимые компоненты слоя морфизма $X \to C$ над точкой v, поле $\kappa(D)^{\mathrm{s}}$ является сепарабельным замыканием поля $\kappa(D)$ рациональных функций на D.

Пусть κ_D – целое замыкание $\kappa(v)$ в поле $\kappa(D)$. Тогда $\kappa(v) \subset \kappa(D)$ – такое расширение полей, что многообразие D является геометрически целым над κ_D. Мы имеем композицию канонических морфизмов полей

$$\kappa(D) = \kappa_D(D) \leftarrow \kappa_D \leftarrow \kappa(v),$$

индуцирующую композицию отображений

$$H^2(\mathrm{Spec}\,\kappa(v), \mathbb{Z}) \to H^2(\mathrm{Spec}\,\kappa_D, \mathbb{Z}) \to H^2(\mathrm{Spec}\,\kappa_D(D), \mathbb{Z}) = H^2(\mathrm{Spec}\,\kappa(D), \mathbb{Z}).$$

Очевидно, что композиция

$$H^2(\mathrm{Spec}\,\kappa(v), \mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi^*} \bigoplus_D H^2(\mathrm{Spec}\,\kappa(D), \mathbb{Z}) \to H^2(\mathrm{Spec}\,\kappa(D), \mathbb{Z}) \tag{12}$$

отображения π^* в (11) и канонической проекции

$$\bigoplus_D H^2(\mathrm{Spec}\,\kappa(D), \mathbb{Z}) \to H^2(\mathrm{Spec}\,\kappa(D), \mathbb{Z})$$

является композицией канонических отображений

$$H^2(\operatorname{Spec}\kappa(v),\mathbb{Z}) \to H^2(\operatorname{Spec}\kappa_D,\mathbb{Z}) \to H^2(\operatorname{Spec}\kappa_D(D),\mathbb{Z}) = H^2(\operatorname{Spec}\kappa(D),\mathbb{Z})$$

$$\xrightarrow{x\mapsto \operatorname{mult}_{\pi^{-1}(v)}(D)\cdot x} H^2(\operatorname{Spec}\kappa(D),\mathbb{Z}), \tag{13}$$

где $\operatorname{mult}_{\pi^{-1}(v)}(D)$ – кратность подмногообразия D в слое $X_v = \pi^{-1}(v)$.

Пусть $\mathbb{F}_q$ – конечное поле порядка q и пусть $W \hookrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{F}_q}$ – геометрически неприводимое проективное подмногообразие размерности r и степени d. Хорошо известный результат Ленга и Вейля [6, теорема 1] показывает, что

$$|\operatorname{Card}(W(\mathbb{F}_q)) - q^r| \leq (d-1)(d-2)\, q^{r-1/2} + c(n,d,r)\, q^{r-1}$$

для константы $c(n,d,r) > 0$, зависящей только от n, d и r.

В силу оценки Ленга–Вейля и леммы Гензеля многообразие V имеет точки почти во всех пополнениях глобального поля k. Другими словами, имеется такое конечное множество S замкнутых точек кривой C, что для всех $v \notin S$ морфизм $X \to C$, ограниченный на спектр локального кольца $\mathcal{O}_v$, имеет сечение $\theta : \operatorname{Spec}\mathcal{O}_v \to X \times_C \operatorname{Spec}\mathcal{O}_v$. В силу следствия 2.2 в [7], точка $\theta(v)$ является регулярной точкой схемного слоя $\pi^{-1}(v)$. Поэтому $\mathcal{O}_{\pi^{-1}(v),\theta(v)}$ – регулярное локальное кольцо и слой $\pi^{-1}(v)$ аналитически неприводим в точке $\theta(v)$ [8, гл. 11, замечание 1 к предложению 11.24]; в частности, $\theta(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_v)$ пересекает *одну* неприводимую компоненту схемного слоя $\pi^{-1}(v)$ (то, что сечение на регулярной модели пересекает в точности одну неприводимую компоненту кратности 1 слоя, доказано также в [9, лемма 1.1, b]). Поэтому любой вертикальный дивизор Картье D с носителем в слое $\pi^{-1}(v)$ может быть единственным образом записан в виде

$$D = n_0 \cdot \pi^{-1}(v) + \sum_i n_i \cdot D_i,$$

где $n_j \in \mathbb{Z}$ и D_i – такие неприводимые компоненты слоя $\pi^{-1}(v)$, что выполнено равенство $D_i \cap \theta(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_v) = \varnothing$. Следовательно, получаем разложение пучков

$$\operatorname{Div}^{\mathrm{vert}}_{X\times_C \operatorname{Spec}\mathcal{O}_v} = \pi^*(\operatorname{Div}_{\operatorname{Spec}\mathcal{O}_v}) \oplus \left(\bigoplus_{\substack{y\in X\times_C \operatorname{Spec}\mathcal{O}_v \setminus V,\ \operatorname{codim}_{X\times_C\operatorname{Spec}\mathcal{O}_v}(y)=1,\\ \overline{\{y\}}\cap\theta(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_v)=\varnothing}} i_{y*}\mathbb{Z} \right). \tag{14}$$

Соотношение $\pi\circ\theta = \mathrm{id}_{\operatorname{Spec}\mathcal{O}_v}$ показывает, что композиция

$$H^*(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_v, \operatorname{Div}_{\operatorname{Spec}\mathcal{O}_v}) \xrightarrow{\pi^*} H^*(X\times_C \operatorname{Spec}\mathcal{O}_v, \pi^*(\operatorname{Div}_{\operatorname{Spec}\mathcal{O}_v}))$$
$$\xrightarrow{\theta^*} H^*(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_v, \operatorname{Div}_{\operatorname{Spec}\mathcal{O}_v})$$

является тождественным отображением. Поэтому мы получаем вложение

$$H^2(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_v, \operatorname{Div}_{\operatorname{Spec}\mathcal{O}_v}) \overset{\pi^*}{\hookrightarrow} H^2(X\times_C \operatorname{Spec}\mathcal{O}_v, \pi^*(\operatorname{Div}_{\operatorname{Spec}\mathcal{O}_v})).$$

С другой стороны, разложение (14) даёт вложение

$$H^2(X \times_C \operatorname{Spec} \mathcal{O}_v, \pi^*(\mathrm{Div}_{\operatorname{Spec} \mathcal{O}_v})) \hookrightarrow H^2(X \times_C \operatorname{Spec} \mathcal{O}_v, \mathrm{Div}^{\mathrm{vert}}_{X \times_C \operatorname{Spec} \mathcal{O}_v})).$$

Следовательно, для $v \notin S$ ядро отображения (11) тривиально.

Остаётся доказать, что для $v \in S$ ядро композиции (12) конечно.

Для начала заметим, что отображение $H^2(\operatorname{Spec} \kappa_D, \mathbb{Z}) \to H^2(\operatorname{Spec} \kappa(D), \mathbb{Z})$ в композиции (13) инъективно. Действительно, это отображение совпадает с отображением

$$H^1(\mathrm{Gal}(\overline{\kappa_D}/\kappa_D), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^1(\mathrm{Gal}(\kappa(D)^{\mathrm{s}}/\kappa(D)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Оно инъективно, потому что $\kappa(D)$ и любое алгебраическое замыкание поля κ_D линейно разделены, так что имеется канонический изоморфизм [10, гл. V, § 10, п. 4, теорема 1]

$$\mathrm{Gal}(\overline{\kappa_D}/\kappa_D) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(\overline{\kappa_D}(D)/\kappa(D));$$

остаётся использовать каноническую последовательность инфляции – ограничения [11, гл. IV, § 5, предложение 5.1]

$$\begin{aligned} 0 \to H^1(\mathrm{Gal}(\overline{\kappa_D}(D)/\kappa(D)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) &\xrightarrow{\mathrm{inf}} H^1(\mathrm{Gal}(\kappa(D)^{\mathrm{s}}/\kappa(D)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ &\xrightarrow{\mathrm{res}} H^1(\mathrm{Gal}(\kappa(D)^{\mathrm{s}}/\overline{\kappa_D}(D)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Следовательно, достаточно доказать конечность ядра композиции отображений

$$H^2(\operatorname{Spec} \kappa(v), \mathbb{Z}) \to H^2(\operatorname{Spec} \kappa_D, \mathbb{Z}) \xrightarrow{x \mapsto \mathrm{mult}_{\pi^{-1}(v)}(D) \cdot x} H^2(\operatorname{Spec} \kappa_D, \mathbb{Z}). \qquad (15)$$

Пусть $d = [\kappa_D : \kappa(v)]$. Поскольку композиция ограничения и коограничения является умножением на d, то мы видим, что ядро композиции (15) содержится в ядре умножения на $\mathrm{mult}_{\pi^{-1}(v)}(D) \cdot d : \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, которое, очевидно, конечно. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть $\pi : X \to C$ – сюръективный морфизм гладких проективных многообразий над конечным полем $\mathbb{F}_q$ нечетной характеристики p, общий схемный слой которого является* K 3*–поверхностью V над полем $k = \kappa(C)$ рациональных функций кривой C. Предположим, что* $\mathrm{NS}(V) = \mathrm{NS}(V \otimes \overline{k})$. *Тогда для любого простого числа $l \neq p$*

$$\mathrm{NS}(X) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} [H^2(X \otimes \overline{\mathbb{F}}_q, \mathbb{Q}_l(1))]^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)}.$$

Действительно, для K 3 – поверхности V верна гипотеза Тэйта для дивизоров [12], поэтому теорема следует из предложений 1 – 2 и теоремы 1.

Список литературы / References

[1] J.S. Milne, "Values of zeta functions of varieties over finite fields", *Amer. J. Math.*, **108** (1986), 297–360.

[2] J. Tate, "Conjectures on algebraic cycles in l-adic cohomology", *Proc. Symposia in Pure Math.*, **55** (1994 Part 1), 71 – 83.

[3] Colliot-Thélène J.-L., Skorobogatov A.N., Swinnerton-Dyer P., "Hasse principle for pencils of curves of genus one whose Jacobians have rational 2-division points", *Invent. Math.*, **134**:3 (1998), 579–650.

[4] Милн Дж., *Этальные когомологии*, Мир, М., 1983; [Milne J.S., *Etale cohomology*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1980].

[5] Танкеев С. Г., "О группе Брауэра арифметической модели гиперкэлерова многообразия над числовым полем", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **79**:3 (2015), 203 – 224; [Tankeev S.G., "On the Brauer group of arithmetic model of a hyperkähler variety over a number field", *Izv. Math.*, **79**:3 (2015), 623–644].

[6] Lang S., Weil A., "Number of points of varieties in finite fields", *Amer. J. Math.*, **76**:4 (1954), 819–827.

[7] Танкеев С. Г., "О группе Брауэра арифметической схемы. II", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:5 (2003), 155–176; [Tankeev S.G., "On the Brauer group of arithmetic scheme. II", *Izv. Math.*, **67**:5 (2003), 1007–1029].

[8] Атья М., Макдональд И., *Введение в коммутативную алгебру*, Мир, М., 1972; [Atiyah M.F., Macdonald I.G., *Introduction to commutative algebra*, Addison–Wesley Publ. Co., Massachusets, 1969].

[9] Skorobogatov A. N., "Descent on fibrations over the projective line", *Amer. J. Math.*, **118**:5 (1996), 905–923.

[10] Бурбаки Н., *Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы, Элементы математики*, Наука, М., 1965; [Bourbaki N., *Éléments de Mathématique. Algébre, livre II*, Hermann, Paris, 1963].

[11] *Алгебраическая теория чисел*, ред. Касселс Дж., Фрёлих А., Мир, М., 1969; [*Algebraic number theory*, Proc. Internat. Conf. Brighton, 1965, eds. Cassels G. W. S., Frölich A., Academic Press, London, and Thompson, Washington, DC, 1967].

[12] Madapusi Pera K., "The Tate conjecture for K 3 surfaces in odd characteristic Descent on fibrations over the projective line", *Invent. math.*, **201** (2015), 625–668.

Prokhorova T. V., "On the Tate Conjectures for Divisors on a Fibred Variety and on its Generic Scheme Fibre in the Case of Finite Characteristic", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:2 (2017), 205–214.

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-2-205-214

Abstract. We investigate interrelations between the Tate conjecture for divisors on a fibred variety over a finite field and the Tate conjecture for divisors on the generic scheme fibre under the condition that the generic scheme fibre has zero irregularity. Let $\pi : X \to C$ be a surjective morphism of smooth projective varieties over a finite field $\mathbb{F}_q$ of characteristic p, C is a curve and the generic scheme fibre of π is a smooth variety V over the field $k = \kappa(C)$ of rational functions of the curve C, $\overline{k}$ is an algebraic closure of the field k, k^s is its separable closure, $\mathrm{NS}(V)$ is the Néron - Severi group of classes of divisors on the variety V modulo algebraic equivalence, and assume that the following conditions hold: $H^1(V \otimes \overline{k}, \mathcal{O}_{V\otimes\overline{k}}) = 0$, $\mathrm{NS}(V) = \mathrm{NS}(V \otimes \overline{k})$. If, for a prime number l not dividing $\mathrm{Card}([\mathrm{NS}(V)]_{\mathrm{tors}})$ and different from the characteristic of the field $\mathbb{F}_q$, the following relation holds $\mathrm{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} [H^2(V \otimes k^s, \mathbb{Q}_l(1))]^{\mathrm{Gal}(k^s/k)}$ (in other words, if the Tate conjecture for divisors on V

holds), then for any prime number $l \neq \mathrm{char}(\mathbb{F}_q)$ the Tate conjecture holds for divisors on X: $\mathrm{NS}(X) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} [H^2(X \otimes \overline{\mathbb{F}}_q, \mathbb{Q}_l(1))]^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)}$. In particular, it follows from this result that the Tate conjecture for divisors on an arithmetic model of a K 3 surface over a sufficiently large global field of finite characteristic different from 2 holds as well.

Keywords: Tate conjecture, global field, Brauer group, arithmetic model, K 3 surface

About the authors:
Tatyana V. Prokhorova, orcid.org/0000-0002-6883-2087, PhD,
A. G. and N. G. Stoletov Vladimir State University,
87 Gorky str., Vladimir 600000, Russia,
e-mail: tvprokhorova@mail.ru