Моделирование и анализ информационных систем. Т. 24, № 3 (2017), с. 280–287
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 24, No 3 (2017), pp. 280–287

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-3-280-287

УДК 519.632.34

Сингулярно возмущенная эллиптическая задача Дирихле с трехзонным пограничным слоем

Белошапко В. А.

получена 15 декабря 2016

Аннотация. Исследована сингулярно возмущенная эллиптическая задача с граничными условиями Дирихле в случае кратного корня вырожденного уравнения. Возникает трехзонный пограничный слой с различным масштабом погранслойных переменных и различным характером поведения решения в разных зонах, асимптотическое разложение решения ведется по дробным степеням малого параметра. Построено и обосновано полное асимптотическое разложение решения задачи.

Ключевые слова: сингулярно возмущенное эллиптическое уравнение, случай кратного корня вырожденного уравнения, асимптотическое разложение решения погранслойного типа, трехзонный пограничный слой, оценочная функция

Для цитирования: Белошапко В. А., "Сингулярно возмущенная эллиптическая задача Дирихле с трехзонным пограничным слоем", *Моделирование и анализ информационных систем*, **24**:3 (2017), 280–287.

Об авторах:
Белошапко Вера Александровна, orcid.org/0000-0002-7847-4113, аспирант,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет
Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991, Россия, e-mail: postvab@rambler.ru

Благодарности:
Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №15-01-04619.

1. Постановка задачи

Рассмотрим краевую задачу

$$\varepsilon^2 \Delta u = f(u, x, \varepsilon), \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega, \tag{1}$$

$$u = u^0(x), \quad x \in \partial\Omega, \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2}$ – оператор Лапласа, Ω – ограниченная область с границей $\partial\Omega$.

Известно [1], [2], что если вырожденное уравнение $f(u, x, 0) = 0$ имеет простой корень $u = \varphi(x), x \in \bar{\Omega}$, причем $f_u(\varphi(x), x, 0) > 0, x \in \bar{\Omega}$, функции f, $u^0(x)$ и граница $\partial\Omega$ достаточно гладкие, $u^0(x)$ принадлежит области притяжения корня $\varphi(x)$, то задача (1), (2) для достаточно малых ε имеет решение $u(x,\varepsilon)$, асимптотика решения состоит из регулярной и погранслойной частей, разложение ведется по целым степеням малого параметра.

В данной работе задача (1), (2) исследуется при следующих условиях.

Условие А1. *Пусть функция f имеет вид*

$$f(u,x,\varepsilon) = h(u,x)(u-\varphi(x))^2 - \varepsilon f_1(u,x,\varepsilon), \tag{3}$$

причем функции h, φ, f_1 достаточно гладкие.

В отличие от [3], функция h зависит не только от переменной x, но и от искомой функции u. Таким образом, результаты данной работы являются обобщением результатов работы [3] на более широкий класс задач. Здесь корень $u = \varphi(x)$ вырожденного уравнения является двукратным и, так же как в работах [3] – [7], это приводит к качественному изменению асимптотики (при малых ε) решения задачи (1), (2) по сравнению со случаем простого корня: изменяется масштаб погранслойных переменных, пограничный слой является многозонным, а регулярный и погранслойный ряды становятся рядами не по целым, а по дробным степеням ε. Кроме того, существенное влияние на вид асимптотики решения оказывает теперь член порядка ε, входящий в правую часть (3), а именно функция $\bar{f}_1(x)$. В связи с этим введем следующее условие.

Условие А2. *Пусть* $\bar{f}_1(x) := f_1(\varphi(x),x,0) > 0$, *при* $x \in \bar{\Omega}$.

Условие А3. *Пусть существует функция* $\psi(x)$, $x \in \bar{\Omega}$, *такая, что*

$$\begin{gathered} \psi(x) > \varphi(x), \quad h(\psi(x),x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \bar{\Omega} \quad \text{и} \\ h(u,x) > 0 \quad \text{при} \quad \varphi(x) \le u < \psi(x), \quad x \in \bar{\Omega}. \end{gathered} \tag{4}$$

Случай, когда $h(u,x) > 0$ при $u > \varphi(x)$, $x \in \bar{\Omega}$, более простой, поэтому остановимся на рассмотрении задачи (1), (2) при условии А3.

Отметим, что при $u < \varphi(x)$ и $u > \psi(x)$, $x \in \bar{\Omega}$ знак функции $h(u,x)$ не имеет значения, так как решение $u(x,\varepsilon)$ задачи (1), (2) удовлетворяет неравенствам (см. ниже)

$$\varphi(x) < u(x,\varepsilon) < \psi(x), \quad x \in \bar{\Omega}.$$

Условие А4. *Пусть* $0 < \Pi^0(x) := u^0(x) - \varphi(x) < \psi(x) - \varphi(x)$, $x \in \partial\Omega$.

2. Построение асимптотики решения

Как и в случае простого корня вырожденного уравнения, асимптотика решения задачи (1), (2) при условиях А1 – А3 будет состоять из регулярной $\bar{u}(x,\varepsilon)$ и погранслойной $\Pi(\rho,l,\varepsilon)$ частей, причем регулярная часть будет теперь рядом по степеням $\sqrt{\varepsilon}$, погранслойная часть рядом по степеням $\varepsilon^{1/4}$ (а не ε для обеих частей асимптотики), пограничный слой будет иметь трехзонный характер, и в связи с этим наряду с $\rho = r/\varepsilon$ появится еще одна погранслойная переменная $\zeta = r/\varepsilon^{3/4}$.

2.1. Регулярная часть асимптотики решения

Регулярную часть $\bar{u}(x,\varepsilon)$ асимптотики решения будем строить в виде

$$\bar{u}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2} \bar{u}_i(x). \tag{5}$$

Уравнения для коэффициентов $\bar{u}_i(x)$ этого ряда получаются стандартным способом, т. е. путем подстановки ряда (5) в уравнение (1) вместо u и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях $\sqrt{\varepsilon}$ в разложениях левой и правой частей равенства. В результате получаем: $\bar{u}_0 = \varphi(x)$, функция $\bar{u}_1(x) = [\bar{h}^{-1}(x) \bar{f}_1(x)]^{1/2} > 0, \; x \in \bar{\Omega}$. Следующие коэффициенты $\bar{u}_i(x)$ ряда (5) последовательно определяются как решения линейных алгебраических уравнений

$$\left[2\bar{h}(x)\bar{u}_1(x)\right] \bar{u}_i(x) = F_i(x), \quad i \geq 2, \tag{6}$$

где $F_i(x)$ выражаются рекуррентно через $\bar{u}_j(x), j < i$, а коэффициент при $\bar{u}_i(x)$ отличен от нуля в силу (4) и $\bar{u}_1(x) > 0, \; x \in \bar{\Omega}$.

2.2. Погранслойная часть асимптотики решения

Перейдя к локальным координатам (r,l) в окрестности границы $\partial\Omega$ рассматриваемой области $\bar{\Omega}$ и произведя растяжение переменной r, получив при этом погранслойные переменные $\rho = r/\varepsilon$ и $\zeta = r/\varepsilon^{3/4} = \varepsilon^{1/4}\rho$ (отметим, что масштаб погранслойных переменных ρ и ζ отличается от масштаба погранслойных переменных задач Неймана [5], [6]) оператор $\varepsilon^2\Delta$ запишем в следующем виде:

$$\varepsilon^2\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \sum_{j=4}^{\infty} \varepsilon^{\frac{j}{4}} L_j\right), \tag{7}$$

где L_j – линейные дифференциальные операторы с коэффициентами, зависящими от ζ, l, содержащие операторы дифференцирования $\frac{\partial}{\partial\rho}$, $\frac{\partial}{\partial l}$, $\frac{\partial^2}{\partial l^2}$.

Погранслойную часть асимптотики $\Pi(\rho,l,\varepsilon)$ будем строить в виде ряда по степеням $\varepsilon^{1/4}$:

$$\Pi(\rho,l,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} \Pi_i(\rho,l). \tag{8}$$

Отметим, что в отличие от случая граничных условий Неймана [5], [6] слагаемые погранслойной части асимптотики возникают уже в нулевом приближении $(\Pi_0(\rho,l))$.

Уравнения для коэффициентов $\Pi_i(\rho,l)$ ряда (8) будем извлекать из стандартного для метода пограничных функций равенства (см. [1])

$$\varepsilon^2\Delta\Pi = \Pi f, \tag{9}$$

где в силу (7) и (8) $\varepsilon^2\Delta\Pi = \left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \sum_{j=4}^{\infty} \varepsilon^{\frac{j}{4}} L_j\right) \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4}\Pi_i(\rho,l)$, а функция $\Pi f = [f(\bar{u}(r,l,\varepsilon) + \Pi(\rho,l,\varepsilon), r, l, \varepsilon) - f(\bar{u}(r,l,\varepsilon), r, l, \varepsilon)]_{r=\varepsilon^{3/4}\zeta}$. Здесь и далее используется обозначение $\bar{u}(r,l,\varepsilon) := \bar{u}\left(x(r,l),\varepsilon\right)$ и аналогичные обозначения для других функций.

Граничные условия для функций $\Pi_i(\rho,l)$ при $\rho = 0$ обусловлены тем, что погранслойная часть асимптотики совместно с регулярной частью должны удовлетворять заданному граничному условию (2), т. е.

$$\bar{u}(0,l,\varepsilon) + \Pi(0,l,\varepsilon) = u^0(l) := u^0(x)|_{x\in\partial\Omega}, \quad 0 \le l \le l_0. \tag{10}$$

Кроме того, потребуем, чтобы члены погранслойного ряда удовлетворяли стандартному условию при $\rho \to \infty$:

$$\Pi_i\left(\infty,l\right) = 0. \tag{11}$$

Для корректного описания поведения решения в пограничном слое будем использовать тот же алгоритм формирования уравнений для функций $\Pi_i(\rho,l)$, что и в работе [3], отличающийся от стандартного алгоритма. Функция $\Pi_0(\rho,l)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial^2\Pi_0}{\partial\rho^2} = h(\varphi(0,l)+\Pi_0,0,l)\left({\Pi_0}^2 + 2\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(0,l)\Pi_0\right), \quad \rho > 0, \tag{12}$$

с граничными условиями

$$\Pi_0(0,l) = \Pi^0(l), \tag{13}$$

$$\Pi_0(\infty,l) = 0, \tag{14}$$

где $\Pi^0(l) = \Pi^0(x)\big|_{x\in\partial\Omega}$, и переменная $l,\ \ 0 \le l \le l_0$ входит, как параметр.

Заметим, что функция Π_0 и также следующие коэффициенты Π_i ряда (8) будут зависеть не только от ρ и l, но также и от ε, но с целью уменьшения громоздкости формул будем писать $\Pi_i(\rho,l)$ вместо $\Pi_i(\rho,l,\varepsilon)$.

Уравнение (12) более сложное, чем аналогичное уравнение для $\Pi_0(\rho,l)$ в работе [3], так как функция h теперь зависит и от искомой функции $\Pi_0(\rho,l)$. Однако трехзонный характер решения сохраняется и в этом случае, что будет показано ниже.

Задача (12), (13), (14) стандартным образом сводится к дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{\partial\Pi_0}{\partial\rho} = -\sqrt{2\int_0^{\Pi_0} h(\varphi(0,l)+s,0,l)(s^2+2\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(0,l)s)ds}, \quad \rho > 0, \tag{15}$$

с начальным условием (13).

Так как $0 < \Pi^0(l) < \psi(0,l) - \varphi(0,l),\ \ 0 \le l \le l_0$ (условие A4), $h(\varphi(0,l)+s,0,l) > 0$ при $0 \le s \le \Pi^0$ (условие A3), то найдутся такие положительные числа $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, для которых выполнено неравенство

$${\varkappa_1}^2 \le h(\varphi(0,l)+s,0,l) \le {\varkappa_2}^2 \quad \text{при} \quad 0 \le s \le \Pi^0. \tag{16}$$

Из (15), (16) следует

$$-\sqrt{2}\varkappa_2\left[\frac{1}{3}\Pi_0+\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(0,l)\right]^{1/2}\Pi_0\le\frac{\partial\Pi_0}{\partial\rho}\le-\sqrt{2}\varkappa_1\left[\frac{1}{3}\Pi_0+\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(0,l)\right]^{1/2}\Pi_0.$$

После интегрирования получаем двустороннюю оценку для функции $\Pi_0(\rho,l)$:

$$\Pi_{\varkappa_2}(\rho,l)\le\Pi_0(\rho,l)\le\Pi_{\varkappa_1}(\rho,l),\quad \rho\ge 0, \tag{17}$$

где через $\Pi_{\varkappa}(\rho,l)$ обозначено решение задачи ($\varkappa>0$)

$$\begin{gathered}\frac{\partial\Pi_\varkappa}{\partial\rho}=-\sqrt{2}\varkappa\left[\frac{1}{3}\Pi_\varkappa+\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(0,l)\right]^{1/2}\Pi_\varkappa,\quad \rho>0,\\ \Pi_\varkappa(0,l)=\Pi^0(l),\\ \Pi_\varkappa(\infty,l)=0.\end{gathered}\tag{18}$$

Решение этой задачи находится в явном виде:

$$\Pi_\varkappa(\rho,l)=12\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(0,l)(1+O(\varepsilon^{1/4}))\frac{e^{-\varepsilon^{1/4}k_0\varkappa\rho}}{1-(1-p\varepsilon^{1/4}+O(\sqrt{\varepsilon}))e^{-\varepsilon^{1/4}k_0\varkappa\rho}},\tag{19}$$

где $k_0=\sqrt{2\bar{u}_1(0,l)}$, $p=\sqrt{\frac{12\bar{u}_1(0,l)}{\Pi^0}}$.

В результате анализа поведения функции $\Pi_\varkappa(\rho,l)$ на разных промежутках ρ можно выделить 3 зоны пограничного слоя.

В первой зоне, где $0\le\rho\le\varepsilon^{-\gamma}$, γ – любое число из промежутка $0\le\gamma<1/4$, т.е. $0\le r\le\varepsilon^{1-\gamma}$, функция $\Pi_\varkappa(\rho,l)$ убывает степенным образом:

$$\Pi_\varkappa(\rho,l)=O\left(\frac{1}{(1+\rho)^2}\right).$$

Вторая зона, где $\varepsilon^{-\gamma}\le\rho\le\varepsilon^{-1/4}$, т. е. $\varepsilon^{1-\gamma}\le r\le\varepsilon^{3/4}$, является переходной, в ней происходит изменение масштаба погранслойной переменной и характера убывания функции $\Pi_\varkappa(\rho,l)$.

И, наконец, в третьей зоне, где $\rho\ge\varepsilon^{-1/4}$, т. е. $r\ge\varepsilon^{3/4}$, возникает новая погранслойная переменная $\zeta=r/\varepsilon^{3/4}$, и функция $\Pi_\varkappa$ убывает экспоненциально с ростом ζ:

$$\Pi_\varkappa(\rho,l)=O\left(\varepsilon^{1/2}\right)\exp(-k_0\varkappa\zeta).$$

Решая задачу (18) без использования метода сращивания, получаем функцию $\Pi_\varkappa(\rho,l)$, являющуюся единым решением этой задачи во всех трех зонах пограничного слоя. Двусторонняя оценка (17) обеспечивает такое же трехзонное поведение функции $\Pi_0(\rho,l)$.

Следующие члены пограничного ряда (8) имеют поведение, аналогичное $\Pi_0(\rho,l)$, как мы увидим в дальнейшем.

Уравнения для коэффициентов $\Pi_i(\rho,l)$ погранслойного ряда так же, как и для $\Pi_0(\rho,l)$, получим не стандартным способом, а с определенными модификациями этого способа [3] – [5]. Уравнение для $\Pi_i(\rho,l)$, $\quad i=1,2...$ имеет вид

$$\frac{\partial^2\Pi_i}{\partial\rho^2}=\lambda(\rho,l,\varepsilon)\Pi_i+\pi_i(\rho,l,\varepsilon),\qquad \rho>0, \tag{20}$$

где функция

$$\begin{aligned}\lambda(\rho,l,\varepsilon)=\tilde{h}(\rho,l)\left(2\Pi_0(\rho,l)+2\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(0,l)\right)+\\+\tilde{h}_u(\rho,l)\left({\Pi_0}^2(\rho,l)+2\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(0,l)\Pi_0(\rho,l)\right),\end{aligned} \tag{21}$$

$\tilde{h}(\rho,l):=h(\varphi(0,l)+\Pi_0(\rho,l),0,l)$, функции $\pi_i(\rho,l,\varepsilon)$ выражаются через $\Pi_j(\rho,l)$, $j<i$ и формируются таким же нестандартным способом, как и в работе [3], в частности $\pi_1(\rho,l,\varepsilon)\equiv 0$.

Граничные условия для пограничных функций $\Pi_i(\rho,l)$, $i=1,2,...$ следуют из (10), (11) и имеют вид:

$$\Pi_i(0,l)=\begin{cases}-\bar{u}_{i/2}(0,l), & \text{если } i \text{ – четное число,}\\ 0, & \text{если } i \text{ – нечетное число.}\end{cases} \tag{22}$$
$$\Pi_i(\infty,l)=0.$$

Введя обозначение $\Phi(\rho,l)=\frac{\partial\Pi_0}{\partial\rho}(\rho,l)$, решение задачи (20), (22) можно записать в виде:

$$\Pi_i(\rho,l)=\Phi(\rho,l)\Phi^{-1}(0,l)\Pi_i(0,l)+\Phi(\rho,l)\int_0^{\rho}\Phi^{-2}(\rho_1,l)d\rho_1\int_{\infty}^{\rho_1}\Phi(\rho_2,l)\pi_i(\rho_2,l,\varepsilon)d\rho_2. \tag{23}$$

Для всех $\Pi_i(\rho,l)$ имеет место единообразная оценка

$$|\Pi_i(\rho,l,\varepsilon)|\le c\Pi_{\varkappa}(\rho,l),\qquad \rho\ge 0, \tag{24}$$

с различными c и $\varkappa$ для разных i, и $\varkappa\le\varkappa_1$. Из этой оценки следует, что все $\Pi_i(\rho,l)$ имеют такое же поведение, как и $\Pi_0(\rho,l)$. Так как погранслойные функции имеют смысл только в δ окрестности границы $\partial\Omega$, то умножим стандартным образом [1] – [5] погранслойные функции на срезающие функции, сохранив старые обозначения $\Pi_i(\rho,l)$.

3. Обоснование асимптотики

Итак, мы построили регулярный (5) и погранслойный (8) ряды. Для суммы этих рядов обозначим через $U_n(x,\varepsilon)$ частичную сумму следующего вида:

$$U_n(x,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^{i/2}\bar{u}_i(x)+\sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/4}\Pi_i(\rho,l). \tag{25}$$

Теорема 1. *При условиях A1 – A4 для достаточно малых ε задача (1), (2) имеет решение $u(x,\varepsilon)$, для которого функция (25) является равномерным в $\bar\Omega$ асимптотическим приближением с точностью порядка $O(\varepsilon^{(n+1)/2})$, т.е. для любого $n = 0, 1, 2, \ldots$ справедливо равенство*

$$u(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{(n+1)/2}), \quad x \in \bar\Omega. \tag{26}$$

Теорема доказывается с помощью асимптотического метода дифференциальных неравенств [8], [9], т.е. путем построения подходящих нижнего и верхнего решений задачи (1), (2) с использованием суммы (25).

Функция $\underline{U}(x,\varepsilon)$ берется в виде

$$\underline{U}(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) - \varepsilon^{n/2} z(x,\varepsilon), \tag{27}$$

где $U_n(x,\varepsilon)$ определено формулой (25), $n \ge 2$, $z(x,\varepsilon) = M + P(\rho, l)$. Достаточно большое, не зависящее от ε число M и функция P выбираются таким образом, чтобы функция $\underline{U}(x,\varepsilon)$, определенная формулой (27), была нижним решением задачи (1), (2). В отличие от [3], нижнее решение имеет более сложный вид.

Аналогично функция

$$\bar U(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) + \varepsilon^{n/2} z(x,\varepsilon)$$

при достаточно большом M и достаточно малых ε является верхним решением задачи (1), (2). Построенные нижнее и верхнее решения являются упорядоченными. Следовательно, существует решение $u(x,\varepsilon)$ задачи (1), (2), удовлетворяющее неравенствам $\underline{U}(x,\varepsilon) \le u(x,\varepsilon) \le \bar U(x,\varepsilon), \quad x \in \bar\Omega$. Из этих неравенств и вида нижнего и верхнего решений стандартным образом следует оценка (26).

Список литературы / References

[1] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., *Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений*, Высшая школа, М., 1990; [Vasilieva A. B., Butuzov V. F., Vysshaya shkola, Moskva, 1990, (in Russian).]

[2] Paul C. Fife, “Semilinear elliptic boundary value problems with small parameters”, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **52** (1973), 205–232.

[3] Бутузов В. Ф., Белошапко В. А., “Сингулярно возмущенная эллиптическая задача Дирихле с кратным корнем вырожденного уравнения”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:5 (2016), 515–528; [Butuzov V. F., Beloshapko V. A., “Singularly Perturbed Elliptic Dirichlet Problem with a Multiple Root of the Degenerate Equation”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:5 (2016), 515–528, (in Russian).]

[4] Бутузов В. Ф., “Об устойчивости и области притяжения стационарного решения сингулярно возмущенной параболической задачи с кратным корнем вырожденного уравнения”, *Дифференциальные уравнения*, **51**:12 (2015), 1593–1605; English transl.: Butuzov V. F., “On the Stability and the Attraction Domain of the Stationary Solution of a Singularly Perturbed Parabolic Equation with a Multiple Root of the Degenerate Equation”, *Differential Equations*, **51**:12 (2015), 1569–1582.

[5] Белошапко В. А., Бутузов В. Ф., "Асимптотика решения сингулярно возмущенной эллиптической задачи с трехзонным пограничным слоем", *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **56**:8 (2016), 1428–1440; English transl.: Beloshapko V. A., Butuzov V. F., "Asymptotics of the solution of a singularly perturbed elliptic problem with three-band boundary layer", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **56**:8 (2016), 1414–1425.

[6] Белошапко В. А., Бутузов В. Ф., "Сингулярно возмущенная эллиптическая задача в случае кратного корня вырожденного уравнения", *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **53**:8 (2013), 1291–1301; English transl.: Beloshapko V. A., Butuzov V. F., "A singularly perturbed elliptic problem in the case of a multiple root of the degenerate equation", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **53**:8 (2013), 1117–1127.

[7] Бутузов В. Ф., "Об особенностях пограничного слоя в сингулярно возмущённых задачах с кратным корнем вырожденного уравнения", *Математические заметки*, **94**:1 (2013), 68–80; English transl.: Butuzov V. F., "On the Special Properties of the Boundary Layer in Singularly Perturbed Problems with Multiple Root of the Degenerate Equation", *Mathematical Notes*, **94**:1 (2013), 60–70.

[8] Нефедов Н. Н., "Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов сингулярно возмущенных уравнений в частных производных", *Дифференциальные уравнения*, **31**:4 (1995), 719–723; English transl.: Nefedov N. N., "The method of differential inequalities for some classes of nonlinear singularly perturbed problems with internal layers", *Differential Equations*, **31**:7 (1995), 1142–1149.

[9] Pao C. V., *Nonlinear parabolic and elliptic equations*, Plenum Press, New York, 1992.

Beloshapko V. A., "Singularly Perturbed Elliptic Dirichlet Problem with Three-band Boundary Layer", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:3 (2017), 280–287.

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-3-280-287

Abstract. A singularly perturbed elliptic problem with Dirichlet boundary conditions is considered in the case of multiple roots of the degenerate equation. A three-zone boundary layer arises in the vicinity of the domain boundary with a different scale of boundary-layer variables and a different behaviour of the solution in different zones. The asymptotic expansion of the solution being in fractional powers of the small parameter, boundary-layer series are constructed using a non-standard algorithm. A complete asymptotic expansion of the solution is constructed and justified.

Keywords: singularly perturbed elliptic equation, case of multiple root of the degenerate equation, asymptotic expansion of boundary layer type solution, three-band boundary layer

On the authors:
Vera A. Beloshapko, orcid.org/0000-0002-7847-4113, graduate student,
Lomonosov Moscow State University
1 Leninskiye Gory, Moscow 119991, Russia,
e-mail: postvab@rambler.ru

Acknowledgments:
This work was supported by RFBR, project No 15-01-04619.