Моделирование и анализ информационных систем. Т. 24, № 3 (2017), с. 288–308
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 24, No 3 (2017), pp. 288–308

©Бутузов В. Ф., 2016

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-3-288-308

УДК 517.228.4

О контрастных структурах с многозонным внутренним слоем

Бутузов В. Ф.

получена 15 декабря 2016

Аннотация. Рассматривается краевая задача для сингулярно возмущённого дифференциального уравнения второго порядка в двух случаях, в каждом из которых один из корней вырожденного уравнения является двукратным. Доказано, что в первом случае образуется узкий внутренний слой, в котором происходит быстрый переход решения от двукратного корня вырожденного уравнения к простому корню, а во втором случае во внутреннем слое происходит «всплеск» решения. Такие решения называются соответственно контрастной структурой типа ступеньки (КСТС) и контрастной структурой типа всплеска (КСТВ). В каждом случае построено асимптотическое разложение контрастной структуры, существенно отличающееся от известного разложения в случае, когда все корни вырожденного уравнения – простые, в частности, внутренний слой оказывается многозонным.

Ключевые слова: сингулярно возмущённое уравнение, внутренний переходный слой, контрастные структуры типа ступеньки и типа всплеска, асимптотическое разложение решения

Для цитирования: Бутузов В. Ф., "О контрастных структурах с многозонным внутренним слоем", *Моделирование и анализ информационных систем*, **24**:3 (2017), 288–308.

Об авторах:
Бутузов Валентин Фёдорович, orcid.org/0000-0002-8715-5720, д-р физ.-мат. наук, профессор,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Ленинские горы, 1, стр. 2, г. Москва, 119991, Россия, e-mail: butuzov@phys.msu.ru

Благодарности:
Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №15-01-04619.

1. Введение. Постановка задач

Рассмотрим краевую задачу

$$\varepsilon^2 \frac{d^2u}{dx^2} = f(u, x, \varepsilon), \quad x \in (0; 1), \tag{1}$$

$$\frac{du}{dx}(0, \varepsilon) = 0, \quad \frac{du}{dx}(1, \varepsilon) = 0, \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $u(x, \varepsilon)$ – искомая скалярная функция, $f(u, x, \varepsilon)$ – достаточно гладкая функция.

Пусть вырожденное уравнение

$$f(u, x, 0) = 0, \tag{3}$$

имеет ровно три корня $u = \varphi_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, причём

$$\varphi_1(x) < \varphi_2(x) < \varphi_3(x), \quad x \in [0;1], \tag{4}$$

$$f_u(\varphi_i(x), x, 0) > 0, \quad i = 1, 3; \quad f_u(\varphi_2(x), x, 0) < 0, \quad x \in [0;1],$$

(эти неравенства показывают, что все корни $u = \varphi_i(x)$ – простые), и пусть уравнение

$$I(x) := \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_3(x)} f(u, x, 0)du = 0 \tag{5}$$

имеет корень $x = x_0 \in (0;1)$, причём $I'(x_0) \neq 0$.

Тогда для достаточно малых ε задача (1), (2) имеет решение $u(x,\varepsilon)$, удовлетворяющее предельному равенству (см. [1])

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u(x, \varepsilon) = \begin{cases} \varphi_1(x), & x \in [0, x_0), \\ \varphi_3(x), & x \in (x_0, 1]. \end{cases} \tag{6}$$

Равенство (6) показывает, что в малой окрестности точки x_0 происходит быстрый переход решения $u(x,\varepsilon)$ от корня $\varphi_1(x)$ вырожденного уравнения к корню $\varphi_3(x)$, т.е. это решение представляет собой контрастную структуру типа ступеньки (КСТС).

Может случиться так, что уравнение (5) выполняется для любого $x \in [0;1]$, т.е. $I(x) \equiv 0$, $x \in [0;1]$. В таком случае (он называется случаем *сбалансированной нелинейности*) также может существовать КСТС, удовлетворяющая предельному равенству (6), но x_0 определяется как корень другого (более сложного) уравнения.

В каждом из этих случаев с помощью известного алгоритма А.Б. Васильевой было построено разложение КСТС в виде ряда по целым степеням ε (см. [1]), при этом функции $Q_i^{(-)}(\sigma)$, $\sigma = (x - x_*)/\varepsilon \leq 0$, $x_* = x_0 + O(\varepsilon)$ и $Q_i^{(+)}(\sigma)$, $\sigma \geq 0$, описывающие быстрое изменение решения в переходном слое слева и справа от точки x_* имели экспоненциальные оценки

$$|Q_i^{(\mp)}(\sigma)| \leq c \exp(-\kappa|\sigma|), \tag{7}$$

где c и κ – здесь и далее подходящие положительные числа, не зависящие от ε.

Можно сказать, что слева и справа от точки x_* внутренний переходный слой был однозонным с экспоненциальным убыванием функций переходного слоя $Q^{(\mp)}(\sigma)$ во всей зоне.

В работе [2] задача (1), (2) рассмотрена в том случае, когда

$$f(u, x, \varepsilon) = (u - \varphi_1(x))^2(u - \varphi_2(x))(u - \varphi_3(x)) - \varepsilon f_1(u, x, \varepsilon). \tag{8}$$

В этом случае корни $\varphi_2(x)$ и $\varphi_3(x)$ вырожденного уравнения (3) – простые, а корень $\varphi_1(x)$ – двукратный. Пусть эти корни удовлетворяют условию (4), и пусть $x = x_0$ – корень уравнения (5). В [2] доказано, что при этих условиях в задаче (1), (2) существует КСТС, удовлетворяющая предельному равенству (6), и построено асимптотическое разложение этой КСТС, которое существенно отличается на отрезке $[0; x_*]$, где $x_* = x_0 + O(\sqrt{\varepsilon})$, от разложения в случае, когда все корни $u = \varphi_i(x)$ вырожденного уравнения – простые. Слева от точки x_* переходный слой оказывается трёхзонным с различным характером быстрого изменения функций $Q_i^{(-)}(\sigma)$

внутреннего слоя в разных зонах, асимптотическое разложение решения ведётся по дробным (а не по целым) степеням ε, и алгоритм построения асимптотики существенно отличается от известного алгоритма А.Б. Васильевой.

В данной работе задача (1), (2) рассматривается в п. 2 в том случае, когда функция $f(u, x, \varepsilon)$ имеет вид (8), но при этом $I(x) \equiv 0$, $x \in [0; 1]$, т.е. имеет место случай сбалансированной нелинейности. При этих и ещё двух условиях (условия A3 и A4) в п. 2 построена асимптотика КСТС, в частности, получено уравнение, из которого определяется теперь точка x_0. Это – первая из рассмотренных здесь задач.

Вторая задача, рассмотренная в п. 3, связана с контрастной структурой типа всплеска (КСТВ). Предполагается, что функция $f(u, x, \varepsilon)$ имеет вид

$$f(u, x, \varepsilon) = (u - \varphi(x))^2(\psi(x) - u) - \varepsilon f_1(u, x, \varepsilon), \tag{9}$$

причём

$$\varphi(x) < \psi(x), \quad x \in [0; 1]. \tag{10}$$

Доказано, что при этом и ещё двух условиях (условия B2 и B3 в п. 3) задача (1), (2) имеет решение $u(x, \varepsilon)$, удовлетворяющее предельному равенству

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u(x, \varepsilon) = \begin{cases} \varphi(x), \quad x \in [0, 1], \quad x \neq \bar{x_0}, \\ \varphi(\bar{x_0}) + \frac{4}{3} a(\bar{x_0}), \quad x = \bar{x_0}, \end{cases} \tag{11}$$

где $\bar{x_0} \in (0; 1)$ – корень уравнения $a'(x_0) = 0$, $a(x_0) := \psi(x_0) - \varphi(x_0) > 0$ (см. (10)).

Равенство (11) показывает, что в малой окрестности точки $\bar{x_0}$ происходит «всплеск» решения $u(x, \varepsilon)$, иными словами, это решение является контрастной структурой типа всплеска. Построена асимптотика этой КСТВ, имеющая особенности, характерные для сингулярно возмущённых задач с кратным корнем вырожденного уравнения (см. [2, 3]), в частности, внутренний слой (малая окрестность точки $\bar{x_0}$) оказывается шестизонным.

2. Контрастная структура типа ступеньки

2.1. Условия

Пусть выполнены следующие условия.

Условие A1. Функция $f(u, x, \varepsilon)$ имеет вид (8), причём функции $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, 3$ и $f_1(u, x, \varepsilon)$ являются достаточно гладкими, и выполнены неравенства (4).

Поскольку речь пойдёт об асимптотике произвольного порядка, будем считать указанные функции бесконечно дифференцируемыми.

Условие A2. $I(x) \equiv 0$, $x \in [0; 1]$ ($I(x)$ определено в (5)).

Условие A3. $\bar{f_1}(x) := f_1(\varphi_1(x), x, 0) > 0$, $x \in [0; 1]$.

2.2. Вид асимптотики

Обозначим через x_* неизвестную пока точку интервала $(0; 1)$, в которой искомое решение $u(x, \varepsilon)$ задачи (1), (2) пересекается с корнем $\varphi_2(x)$, т.е.

$$u(x_*, \varepsilon) = \varphi_2(x_*).$$

Решение $u(x,\varepsilon)$ представим в виде

$$u(x,\varepsilon) = \begin{cases} u^{(-)}(x,\varepsilon), & x \in [0, x_*], \\ u^{(+)}(x,\varepsilon), & x \in [x_*, 1]. \end{cases} \tag{12}$$

Функцию $u^{(-)}(x,\varepsilon)$ будем рассматривать как решение вспомогательной краевой задачи для уравнения (1) на отрезке $[0, x_*]$ с краевыми условиями

$$\frac{\partial u^{(-)}}{\partial x}(0,\varepsilon) = 0, \quad u^{(-)}(x_*,\varepsilon) = \varphi_2(x_*), \tag{13}$$

а функцию $u^{(+)}(x,\varepsilon)$ – как решение краевой задачи для уравнения (1) на отрезке $[x_*, 1]$ с краевыми условиями

$$u^{(+)}(x_*,\varepsilon) = \varphi_2(x_*), \quad \frac{\partial u^{(+)}}{\partial x}(1,\varepsilon) = 0. \tag{14}$$

В п. 2.3 и 2.4 построим асимптотики решений $u^{(-)}(x,\varepsilon)$ и $u^{(+)}(x,\varepsilon)$ в виде, традиционном для метода пограничных функций:

$$u^{(-)}(x,\varepsilon) = \bar{u}^{(-)}(x,\varepsilon) + Q^{(-)}(\sigma,\varepsilon) + \Pi^{(-)}(\xi,\varepsilon), \tag{15}$$

$$u^{(+)}(x,\varepsilon) = \bar{u}^{(+)}(x,\varepsilon) + Q^{(+)}(\sigma,\varepsilon) + \Pi^{(+)}(\tilde{\xi},\varepsilon), \tag{16}$$

где $\bar{u}^{(\mp)}(x,\varepsilon)$ – регулярные части асимптотики; $Q^{(\mp)}(\sigma,\varepsilon)$ – части асимптотики, описывающие быстрое изменение решения в окрестности точки x_*, $\sigma = (x - x_*)/\varepsilon$; $\Pi^{(-)}(\xi,\varepsilon)$ и $\Pi^{(+)}(\tilde{\xi},\varepsilon)$ – погранслойные части асимптотики, $\xi = x/\varepsilon^{\frac{3}{4}}$, $\tilde{\xi} = (1-x)/\varepsilon$, различие в масштабах погранслойных переменных ξ и $\tilde{\xi}$ связано с тем, что главным членом регулярной части асимптотики для $u^{(-)}(x,\varepsilon)$ будет двукратный корень $\varphi_1(x)$ вырожденного уравнения, а для $u^{(+)}(x,\varepsilon)$ – однократный корень $\varphi_3(x)$. В п. 2.3 каждое слагаемое в (15) будет построено в виде ряда по дробным степеням ε (дробные степени также обусловлены кратностью корня $\varphi_1(x)$), а в п. 2.4 каждое слагаемое в (16) будет построено в виде ряда по целым степеням ε. После этого в п. 2.5 будет доказано (при дополнительном условии A4), что существует $x_* = x_*(\varepsilon) \in (0;1)$, такое, что

$$\frac{du^{(-)}}{dx}(x_*,\varepsilon) = \frac{du^{(+)}}{dx}(x_*,\varepsilon). \tag{17}$$

Тем самым будет доказано, что функция $u(x,\varepsilon)$, определённая равенством (12), является решением задачи (1), (2) (контрастной структурой типа ступеньки) с переходным слоем в окрестности точки $x_*(\varepsilon)$. Для самой этой точки с помощью равенства (17) будет получено асимптотическое разложение в ряд по дробным степеням ε.

2.3. Асимптотика решения первой вспомогательной задачи

Асимптотика решения $u^{(-)}(x,\varepsilon)$ задачи (1), (13) состоит из трёх частей (см. (15)).

Регулярную часть построим в виде ряда

$$\bar{u}^{(-)}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2} \bar{u}_i^{(-)}(x). \tag{18}$$

Стандартным способом, подставив этот ряд в уравнение (1) вместо u и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε в левой и правой частях равенства, получим последовательно уравнения для функций $\bar{u}_i(x)$. Для $\bar{u}_0(x)$ получается вырожденное уравнение $f(\bar{u}_0^{(-)}, x, 0) = 0$. В качестве $\bar{u}_0^{(-)}(x)$ возьмём корень $\varphi_1(x)$:

$$\bar{u}_0^{(-)}(x) = \varphi_1(x).$$

Для $\bar{u}_1^{(-)}$ получается квадратное уравнение

$$\bar{h}(x)(\bar{u}_1^{(-)})^2 - \bar{f}_1(x) = 0,$$

где

$$\bar{h}(x) := (\varphi_1(x) - \varphi_2(x))(\varphi_1(x) - \varphi_3(x)) > 0, \quad x \in [0, 1]. \tag{19}$$

Так как $\bar{f}_1(x) > 0$ (см. условие A3), то уравнение для $\bar{u}_1^{(-)}$ имеет два корня. В качестве $\bar{u}_1^{(-)}(x)$ возьмём положительный корень (такой выбор будет играть важную роль при построении рядов $Q^{(-)}(\sigma, \varepsilon)$ и $\Pi^{(-)}(\xi, \varepsilon)$:

$$\bar{u}_1^{(-)}(x) = \left[\bar{h}^{-1}(x)\bar{f}_1(x)\right]^{\frac{1}{2}} > 0, \quad x \in [0; 1].$$

Следующие функции $\bar{u}_i^{(-)}$, $i \geq 2$ однозначно определяются как решения линейных уравнений

$$\left[2\bar{h}(x)\bar{u}_1^{(-)}(x)\right] \bar{u}_i^{(-)} = F_i(x), \quad i = 2, 3, \ldots,$$

где $F_i(x)$ выражается рекуррентно через $\bar{u}_j^{(-)}(x)$ с номерами $j < i$. Таким образом, ряд (18) построен.

Ряд $Q^{(-)}(\sigma, \varepsilon)$ построим в виде

$$Q^{(-)}(\sigma, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} Q_i^{(-)}(\sigma), \quad \sigma = (x - x_*)/\varepsilon \leq 0. \tag{20}$$

Забегая вперёд, отметим, что функции $Q_i^{(-)}(\sigma)$ будут зависеть не только от σ, но также от ε и x_*, однако для упрощения записи будем писать $Q_i^{(-)}(\sigma)$ вместо $Q_i^{(-)}(\sigma, \varepsilon, x_*)$.

Задачу для функций $Q_i^{(-)}(\sigma)$ будем формировать с помощью уравнения, в котором наряду с σ введена ещё одна растянутая переменная $\zeta = (x - x_*)/\varepsilon^{\frac{3}{4}} = \varepsilon^{\frac{1}{4}}\sigma$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Q^{(-)}}{d\sigma^2} = Q^{(-)} f := f\left(\bar{u}^{(-)}(x_* + \varepsilon^{\frac{3}{4}}\zeta, \varepsilon) + Q^{(-)}(\sigma, \varepsilon), x_* + \varepsilon^{\frac{3}{4}}\zeta, \varepsilon\right) - \\ - f\left(\bar{u}^{(-)}(x_* + \varepsilon^{\frac{3}{4}}\zeta, \varepsilon), x_* + \varepsilon^{\frac{3}{4}}\zeta, \varepsilon\right), \end{aligned} \tag{21}$$

и граничных условий

$$Q^{(-)}(0, \varepsilon) = \varphi_2(x_*) - \bar{u}^{(-)}(x_*, \varepsilon), \quad Q^{(-)}(-\infty, \varepsilon) = 0. \tag{22}$$

Однако извлекать из равенства (21) уравнения для функций $Q_i^{(-)}(\sigma)$ будем не стандартным способом (он непригоден в случае кратного корня вырожденного уравнения), а с помощью специального алгоритма, описанного в [2, 3].

Уравнение для $Q_0^{(-)}(\sigma)$ возьмём в виде (ε и x_* входят в качестве параметров)

$$\frac{d^2Q_0^{(-)}}{d\sigma^2} = h(\varphi_1(x_*) + Q_0^{(-)}, x_*)\left[(Q_0^{(-)})^2 + 2\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1^{(-)}(x_*)Q_0^{(-)}\right], \qquad \sigma \le 0, \qquad (23)$$

где

$$h(u, x) := (u - \varphi_2(x))(u - \varphi_3(x)),$$

а граничные условия получаем из (21):

$$Q_0^{(-)}(0) = \varphi_2(x_*) - \varphi_1(x_*), \qquad Q_0^{(-)}(-\infty) = 0. \qquad (24)$$

Отметим, что при стандартном алгоритме правая часть уравнения (23) не будет содержать второго слагаемого в квадратных скобках, и в этом случае решение задачи (23), (24) стремится к нулю при $\sigma \to -\infty$ как $O(\sigma^{-2})$, что не соответствует истинному поведению решения задачи (1), (13) в окрестности точки x_*.

Задача (23), (24) сводится стандартным способом к уравнению первого порядка

$$\frac{dQ_0^{(-)}}{d\sigma} = \left[2\int_0^{Q_0^{(-)}} h(\varphi_1(x_*) + s, x_*)(s^2 + 2\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1^{(-)}(x_*)s)ds\right]^{1/2}, \qquad \sigma \le 0 \qquad (25)$$

с начальным условием

$$Q_0^{(-)}(0) = \varphi_2(x_*) - \varphi_1(x_*). \qquad (26)$$

Несложный анализ показывает, что решение $Q_0^{(-)}(\sigma)$ задачи (25), (26) монотонно стремится к нулю при $\sigma \to -\infty$, причём убывание $Q_0^{(-)}(\sigma)$ имеет различный характер на разных промежутках изменения σ. Можно выделить три зоны.

Первой зоной является отрезок $[-\varepsilon^{-\gamma} \le \sigma \le 0]$, где в качестве γ можно взять число из интервала $0 < \gamma < 1/4$, сколь угодно близкое к $1/4$. В этой зоне $Q_0^{(-)}(\sigma) = O(1/(1+\sigma^2))$, т.е. $Q_0^{(-)}(\sigma)$ убывает с ростом σ степенным образом.

Отрезок $[-\varepsilon^{-1/4} \le \sigma \le -\varepsilon^{-\gamma}]$ является второй (переходной) зоной. Здесь происходит постепенное изменение характера убывания функции $Q_0^{(-)}(\sigma)$ и масштаба растянутой переменной.

И, наконец, в третьей зоне, где $\sigma \le -\varepsilon^{-1/4}$, функция $Q_0^{(-)}(\sigma)$ имеет оценку

$$0 < Q_0^{(-)}(\sigma) \le c\sqrt{\varepsilon}\exp(\kappa\zeta),$$

где $\zeta = (x - x_*)/\varepsilon^{3/4}$, а через c и κ, как уже было сказано, обозначаются подходящие положительные числа, не зависящие от ε. Таким образом, в третьей зоне возникает новая растянутая переменная ζ, имеющая иной масштаб, нежели σ, и функция $Q_0^{(-)}$ убывает экспоненциально при $\zeta \to -\infty$. Отметим, что положительность $\bar{u}_1^{(-)}(x_*)$ является важным фактором, обеспечивающим описанное поведение функции $Q_0^{(-)}(\sigma)$.

Для $Q_0^{(-)}(\sigma)$ нетрудно получить единую оценку на всей полупрямой $\sigma \le 0$:

$$0 < Q_0^{(-)}(\sigma) \le c\exp Q_\kappa(\sigma), \;\; \sigma \le 0,$$

где

$$Q_\kappa(\sigma) = \sqrt{\varepsilon}\exp(\varepsilon^{1/4}\kappa\sigma)\left[1 + \varepsilon^{1/4} - \exp(\varepsilon^{1/4}\kappa\sigma)\right]^{-2}, \qquad \sigma \le 0. \qquad (27)$$

Функция $Q_\kappa(\sigma)$ будет эталонной (оценочной) функцией для всех коэффициентов $Q_i^{(-)}(\sigma)$ ряда (20) подобно тому, как в случае, когда все корни вырожденного уравнения – простые, роль эталонной играла функция $\exp(-\kappa|\sigma|)$ (см. (7)).

При $\sigma = 0$ из (25), сделав в интеграле замену переменной $\varphi_1(x_*)+s = u$, получаем

$$\frac{dQ_0^{(-)}}{d\sigma}(0) = \left[2\int_{\varphi_1(x_*)}^{\varphi_2(x_*)} \left\{f(u,x_*,0) + 2\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(x_*)h(u,x_*)(u-\varphi_1(x_*))\right\} du\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$=: I^{(-)}(x_*) + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{i/2} g_i(x_*), \tag{28}$$

где

$$I^{(-)}(x_*) = \left[2\int_{\varphi_1(x_*)}^{\varphi_2(x_*)} f(u,x_*,0)du\right]^{1/2}, \tag{29}$$

$$g_1(x_*) = \left(I^{(-)}(x_*)\right)^{-1} \bar{u}_1^{(-)}(x_*)m_1(x_*), \tag{30}$$

$$m_1(x_*) = 2\int_{\varphi_1(x_*)}^{\varphi_2(x_*)} (u-\varphi_1(x_*))(u-\varphi_2(x_*))(u-\varphi_3(x_*))du, \tag{31}$$

$g_i(x_*)$, $i = 1, 2, \ldots$, – бесконечно дифференцируемые функции. Задачи для следующих коэффициентов $Q_i^{(-)}(\sigma)$, $i \geq 1$ ряда (20) имеют вид

$$\frac{d^2Q_i^{(-)}}{d\sigma^2} = k(\sigma,\varepsilon)Q_i^{(-)} + q_i^{(-)}(\sigma,\varepsilon), \qquad \sigma \leq 0,$$

$$Q_i^{(-)}(0) = \begin{cases} -\bar{u}_{i/2}^{(-)}(x_*), & \text{если } i - \text{чётное число}, \\ 0, & \text{если } i - \text{нечётное число}, \end{cases} \qquad Q_i^{(-)}(-\infty) = 0,$$

где

$$k(\sigma,\varepsilon) := h_u(\sigma)\left[\left(Q_0^{(-)}(\sigma)\right)^2 + 2\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1^{(-)}(x_*)Q_0^{(-)}(\sigma)\right] +$$

$$+2h(\sigma)\left[Q_0^{(-)}(\sigma) + \sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1^{(-)}(x_*)\right],$$

$$h_u(\sigma) := \frac{\partial h}{\partial u}(\varphi_1(x_*) + Q_0^{(-)}(\sigma), x_*) = 2Q_0^{(-)}(\sigma) - A(x_*) - B(x_*),$$

$$h(\sigma) := h(\varphi_1(x_*) + Q_0^{(-)}(\sigma), x_*) = (A(x_*) - Q_0^{(-)}(\sigma))(B(x_*) - Q_0^{(-)}(\sigma)),$$

$$A(x_*) := \varphi_2(x_*) - \varphi_1(x_*), \quad B(x_*) := \varphi_3(x_*) - \varphi_1(x_*),$$

а функции $q_i^{(-)}(\sigma,\varepsilon)$ выражаются рекуррентно через $Q_j^{(-)}(\sigma)$ с номерами $j < i$ и формируются нестандартным способом, описанным в [2, 3] и позволяющим последовательно для $i = 2, 3, \ldots$ получить оценки

$$|q_i^{(-)}(\sigma,\varepsilon)| \leq c(Q_\kappa^2(\sigma) + \sqrt{\varepsilon}Q_\kappa(\sigma)), \tag{32}$$

$$|Q_i^{(-)}(\sigma)| \leq cQ_\kappa(\sigma), \qquad \sigma \leq 0, \tag{33}$$

с различными c и κ для разных i и функцией $Q_\kappa(\sigma)$, определённой формулой (27).

Выпишем в качестве примера выражения для $q_i^{(-)}(\sigma,\varepsilon)$ при $i=1,2,3$, сформированные в соответствии с алгоритмом, описанным в [2, 3]: $q_1^{(-)}(\sigma,\varepsilon)=0$,

$$q_2^{(-)}(\sigma,\varepsilon)=q_{20}^{(-)}(\sigma)+\sqrt{\varepsilon}q_{21}^{(-)}(\sigma),\;\; q_3^{(-)}(\sigma,\varepsilon)=\varepsilon^{1/4}\left(q_{30}^{(-)}(\sigma)+\sqrt{\varepsilon}q_{31}^{(-)}\right),$$

где

$$q_{20}^{(-)}(\sigma)=\bar{u}_1^{(-)}(x_*)\left(2Q_0^{(-)}(\sigma)-A(x_*)-B(x_*)\right)(Q_0^{(-)}(\sigma))^2,$$

$$q_{21}^{(-)}(\sigma)=2A(x_*)B(x_*)\bar{u}_1^{(-)}(x_*)Q_0^{(-)}(\sigma)-3\left(A(x_*)+B(x_*)\right)(\bar{u}_1^{(-)}(x_*))^2Q_0^{(-)}(\sigma)+$$
$$+2h(\sigma)\bar{u}_2^{(-)}(x_*)Q_0^{(-)}(\sigma)-\left(f_1(\varphi_1(x_*)+Q_0^{(-)}(\sigma),x_*,0)-f(\varphi_1(x_*),x_*,0)\right),$$

$$q_{30}^{(-)}(\sigma)=\left[(AB)'(x_*)(Q_0^{(-)}(\sigma))^2-(A'(x_*)+B'(x_*))\left(Q_0^{(-)}(\sigma)\right)^3\right]\sigma,$$

$$q_{31}^{(-)}(\sigma)=2\left[A(x_*)B(x_*)u_1^{(-)\prime}(x_*)+(AB)'(x_*)\bar{u}_1^{(-)}(x_*)\right]Q_0^{(-)}(\sigma)\sigma.$$

Аналогичный вид имеют следующие функции $q_i^{(-)}(\sigma,\varepsilon)$, $i=4,5,\ldots$, в частности,

$$q_4^{(-)}(\sigma,\varepsilon)=q_{40}^{(-)}(\sigma)+\sqrt{\varepsilon}q_{41}^{(-)}(\sigma,\varepsilon),$$

нетрудно вписать явное выражение для этой функции. Так как $q_1^{(-)}(\sigma,\varepsilon)=0$ и $Q_1^{(-)}(0)=0$, то $Q_1^{(-)}(\sigma)=0$, а при $i\geq 2$ функции $Q_i^{(-)}(\sigma)$ выражаются формулой

$$Q_i^{(-)}(\sigma)=\Phi(\sigma)\Phi^{-1}(0)Q_i^{(-)}(0)+\Phi(\sigma)\int_0^\sigma\Phi^{-2}(s)\int_{-\infty}^s\Phi(t)q_i^{(-)}(t,\varepsilon)dtds, \qquad (34)$$

где

$$\Phi(\sigma)=\frac{dQ_0^{(-)}}{d\sigma}(\sigma).$$

Отсюда получается оценка (33) на основе оценки (32) таким же образом, как в [3].

Кроме того, учитывая равенство $\frac{d\Phi}{d\sigma}(0)=0$, из (34) получаем

$$\frac{dQ_i^{(-)}}{d\sigma}(0)=\Phi^{-1}(0)\int_{-\infty}^0\Phi(t)q_i^{(-)}(t,\varepsilon)dt. \qquad (35)$$

Используя эту формулу, а также формулу (29) и выражение для $q_i^{(-)}(\sigma,\varepsilon)$, $i=2,3,4$, находим

$$\sqrt{\varepsilon}\frac{dQ_2^{(-)}}{d\sigma}(0)=\sqrt{\varepsilon}\left(I^{(-)}(x_*)\right)^{-1}\bar{u}_1^{(-)}(x_*)m_2(x_*)+\varepsilon I_2(x_*)+O(\varepsilon^{3/2}),$$

$$(36)$$

$$\varepsilon^{3/4}\frac{dQ_3^{(-)}}{d\sigma}(0)=\varepsilon I_3(x_*)+O(\varepsilon^{3/2}),\quad \varepsilon\frac{dQ_4^{(-)}}{d\sigma}(0)=\varepsilon I_4(x_*)+O(\varepsilon^{3/2}),$$

где

$$m_2(x_*)=\int_{\varphi_1(x_*)}^{\varphi_2(x_*)}\left(2u-\varphi_2(x_*)-\varphi_3(x_*)\right)(u-\varphi_1(x_*))^2du, \qquad (37)$$

$$I_2(x_*) = \left(I^{(-)}(x_*)\right)^{-1}\int_{-\infty}^{0}\Phi(\sigma)\left[q_{21}^{(-)}(\sigma) - \left(I^{(-)}(x_*)\right)^{-1} g_1(x_*)q_{20}^{(-)}(\sigma)\right]d\sigma, \tag{38}$$

$$I_i(x_*) = \left(I^{(-)}(x_*)\right)^{-1}\int_{-\infty}^{0}\Phi(\sigma)q_{i0}(\sigma)d\sigma, \quad i = 3,4, \tag{39}$$

$I^{(-)}(x_*)$ и $g_1(x_*)$ определены формулами (29) – (31). Полученные выражения для $\frac{dQ_i^{(-)}}{d\sigma}(0)$, $i = 0,2,3,4$ будут использованы в п. 2.5 при рассмотрении уравнения (17).

Итак, ряд (20) построен, причём коэффициенты $Q_i^{(-)}(\sigma)$ этого ряда зависят от неизвестной пока точки x_*. Чтобы функции $Q_i^{(-)}(\sigma)$ не вносили невязок в граничное условие при $x = 0$, проделаем стандартную процедуру [1]: умножим каждую из них на срезающую функцию, что никак не повлияет на построенную асимптотику. То же самое сделаем в дальнейшем, не оговаривая каждый раз, с членами рядов $\Pi^{(-)}(\xi,\varepsilon)$, $Q^{(+)}(\sigma,\varepsilon)$ и $\Pi^{(+)}(\tilde{\xi},\varepsilon)$.

Ряд $\Pi^{(-)}(\xi,\varepsilon)$, где $\xi = x/\varepsilon^{3/4}$, построим в виде

$$\Pi^{(-)}(\xi,\varepsilon) = \varepsilon^{3/4}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}\Pi_i^{(-)}(\xi).$$

Уравнения для функций $\Pi_i^{(-)}(\xi)$ будем извлекать стандартным способом из равенства

$$\sqrt{\varepsilon}\frac{d^2\Pi^{(-)}}{d\xi^2} = \Pi^{(-)}f := f\left(\bar{u}^{(-)}(\varepsilon^{3/4}\xi,\varepsilon) + \Pi^{(-)}(\xi,\varepsilon), \varepsilon^{3/4}\xi,\varepsilon\right) -$$
$$-f\left(\bar{u}^{(-)}(\varepsilon^{3/4}\xi,\varepsilon), \varepsilon^{3/4}\xi,\varepsilon\right), \qquad \xi \geq 0,$$

граничные условия при $\xi = 0$ – из второго равенства в (13), которое запишем в виде

$$\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}\frac{d\bar{u}_i^{(-)}}{dx}(0) + \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}\frac{d\Pi_i^{(-)}}{d\xi}(0) = 0, \tag{40}$$

и добавим стандартное условие на бесконечности

$$\Pi_i^{(-)}(\infty) = 0. \tag{41}$$

В результате для $\Pi_i^{(-)}(\xi)$, $i = 0,1,2,\ldots$ последовательно получаются уравнения

$$\frac{d^2\Pi_i^{(-)}}{d\xi^2} = b^2\Pi_i^{(-)} + \pi_i^{(-)}(\xi), \qquad \xi \geq 0, \tag{42}$$

где $b = [2\bar{h}(0)\bar{u}_1^{(-)}(0)]^{1/2} > 0$, $\bar{h}(0)$ определено в (19), функции $\pi_i(\xi)$ выражаются рекуррентно через $\Pi_i^{(-)}(\xi)$ с номерами $j < i$, в частности, $\pi_0^{(-)}(\xi) = 0$, а граничное условие при $\xi = 0$ следует из (40):

$$\frac{d\Pi_i^{(-)}}{d\xi}(0) = \begin{cases} -\frac{d\bar{u}_{i/2}^{(-)}}{dx}(0), & \text{если } i \text{ – чётное число},\\ 0, & \text{если } i \text{ – нечётное число}. \end{cases} \tag{43}$$

Решения задач (41) - (43) последовательно находятся в явном виде, в частности,

$$\Pi_0^{(-)}(\xi) = \varphi_1'(0)b^{-1}\exp(-b\xi), \qquad \xi \geq 0.$$

Все функции $\Pi_i^{(-)}(\xi)$ имеют экспоненциальную оценку

$$|\Pi_i^{(-)}(\xi)| \le c\exp(-\kappa\xi), \qquad \xi \ge 0.$$

Итак, ряд $\Pi^{(-)}(\xi,\varepsilon)$ построен.

Обозначим через $U_n^{(-)}(x,\varepsilon)$ следующую частичную сумму построенного разложения (15):

$$U_n^{(-)}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2}\bar{u}_i^{(-)}(x) + \sum_{i=0}^{4n+3} \varepsilon^{i/4} Q_i^{(-)}(\sigma) + \varepsilon^{3/4}\sum_{i=0}^{4n} \varepsilon^{i/4}\Pi_i^{(-)}(\xi). \tag{44}$$

Теорема 1. *Если выполнены условия А1, А3, то для достаточно малых ε и любого $x_* \in (0;1)$ краевая задача (1), (13) имеет решение $u^{(-)}(x,\varepsilon)$, для которого при $n = 0,1,2,\ldots$ справедливо асимптотическое равенство*

$$u^{(-)}(x,\varepsilon) = U_n^{(-)}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}), \qquad x \in [0,x_*].$$

Доказательство этой теоремы можно провести так же, как доказательство аналогичной теоремы в [3].

Следствие.*Для производной $\frac{du^{(-)}}{dx}(x,\varepsilon)$ справедливо равенство*

$$\frac{du^{(-)}}{dx}(x,\varepsilon) = \frac{dU_n^{(-)}}{dx}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^n), \qquad x \in [0,x_*]. \tag{45}$$

Доказательство проводится так же, как доказательство аналогичного утверждения в [2].

2.4. Асимптотика решения второй вспомогательной задачи

Асимптотика решения $u^{(+)}(x,\varepsilon)$ задачи (1), (14) состоит из трёх частей (см. (16)). Поскольку главным членом регулярной части асимптотики будет взят простой корень $\varphi_3(x)$ вырожденного уравнения, построение каждой из трёх частей производится стандартным способом (см. [1]) в виде ряда по целым степеням ε:

$$\bar{u}^{(+)}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \bar{u}_i^{(+)}(x), \quad Q^{(+)}(\sigma,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Q_i^{(+)}(\sigma), \quad \Pi^{(+)}(\tilde{\xi},\varepsilon) = \varepsilon\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \Pi_i^{(+)}(\tilde{\xi}),$$

где

$$\bar{u}_0^{(+)}(x) = \varphi_3(x), \quad \sigma = (x-x_*)/\varepsilon \ge 0, \quad \tilde{\xi} = (1-x)/\varepsilon \ge 0.$$

Главный член $Q_0^{(+)}(\sigma)$ ряда $Q^{(+)}(\sigma,\varepsilon)$ является решением задачи

$$\frac{d^2Q_0^{(+)}}{d\sigma^2} = f(\varphi_3(x_*) + Q_0^{(+)}, x_*, 0), \qquad \sigma \ge 0,$$

$$Q_0^{(+)}(0) = \varphi_2(x_*) - \varphi_3(x_*), \;\; Q_0^{(+)}(\infty) = 0.$$

Отсюда следует экспоненциальная оценка

$$|Q_0^{(+)}(\sigma)| \le c\exp(-\kappa\sigma), \qquad \sigma \ge 0,$$

а для $\frac{dQ_0^{(+)}}{d\sigma}(0)$ получается выражение

$$\frac{dQ_0^{(+)}}{d\sigma}(0) = \left[2\int_{\varphi_3(x_*)}^{\varphi_2(x_*)} f(u, x_*, 0)du\right]^{1/2} =: I^{(+)}(x_*). \tag{46}$$

Следующие коэффициенты $Q_i^{(+)}(\sigma)$ ряда $Q^{(+)}(\sigma, \varepsilon)$ являются решениями линейных задач

$$\frac{d^2Q_i^{(+)}}{d\sigma^2} = f_u^{(+)}(\sigma)Q_i^{(+)} + q_i^{(+)}(\sigma), \qquad \sigma \geq 0,$$
$$Q_i^{(+)}(0) = -\bar{u}_i^{(+)}(x_*), \;\; Q_i^{(+)}(\infty) = 0,$$

где

$$f_u^{(+)}(\sigma) = \frac{\partial f}{\partial u}(\varphi_3(x_*) + Q_0^{(+)}(\sigma), x_*, 0).$$

Решения этих задач находятся в явном виде, имеют экспоненциальную оценку, как и $Q_0^{(+)}(\sigma)$, а для производных $\frac{dQ_i^{(+)}}{d\sigma}(0)$ получается выражение, аналогичное (35):

$$\frac{dQ_i^{(+)}}{d\sigma}(0) = \Psi^{-1}(0)\int_{\infty}^{0} \Psi(\sigma)q_i^{(+)}(\sigma)d\sigma, \quad \Psi(\sigma) = \frac{dQ_0^{(+)}}{d\sigma}(\sigma). \tag{47}$$

Коэффициенты $\Pi_i^{(+)}(\tilde{\xi})$ ряда $\Pi_i^{(+)}(\tilde{\xi}, \varepsilon)$ определяются последовательно как решения линейных задач

$$\frac{d^2\Pi_i^{(+)}}{d\tilde{\xi}^2} = f_u(\varphi_3(1), 1, 0)\Pi_i^{(+)} + \pi_i^{(+)}(\tilde{\xi}), \qquad \tilde{\xi} \geq 0,$$
$$\frac{d\Pi_i^{(+)}}{d\tilde{\xi}}(0) = -\frac{d\bar{u}_i^{(+)}}{dx}(1), \;\; \Pi_i^{(+)}(\infty) = 0,$$

все $\Pi_i^{(+)}(\tilde{\xi})$ находятся в явном виде и имеют экспоненциальную оценку

$$|\Pi_i^{(+)}(\tilde{\xi})| \leq c\exp(-\kappa\tilde{\xi}), \qquad \tilde{\xi} \geq 0.$$

Обозначим через $U_n^{(+)}(x, \varepsilon)$ частичную сумму построенного разложения (16):

$$U_n^{(+)}(x, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i \left[\bar{u}_i^{(+)}(x) + Q_i^{(+)}(\sigma) + \Pi_{i-1}^{(+)}(\tilde{\xi})\right], \tag{48}$$

где $\Pi_{-1}^{(+)}(\tilde{\xi}) = 0$.

Теорема 2. *Если выполнено условие A1, то для достаточно малых ε и любого $x_* \in (0; 1)$ краевая задача (1), (14) имеет решение $u^{(+)}(x, \varepsilon)$, для которого при $n = 0, 1, 2, \ldots$ справедливо асимптотическое равенство*

$$u^{(+)}(x, \varepsilon) = U_n^{(+)}(x, \varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}), \qquad x \in [x_*, 1].$$

Следствие. *Для производной $\frac{du^{(+)}}{dx}(x, \varepsilon)$ справедливо равенство*

$$\frac{du^{(+)}}{dx}(x, \varepsilon) = \frac{dU_n^{(+)}}{dx}(x, \varepsilon) + O(\varepsilon^n), \qquad x \in [x_*, 1]. \tag{49}$$

Доказательство теоремы 2 и следствия из неё можно провести так же, как для теоремы 1.

2.5. Доказательство существования КСТС в задаче (1), (2)

Докажем, что при условиях А1 – А3 и ещё одном условии (см. ниже условие А4) для достаточно малых ε существует $x_*(\varepsilon) \in (0;1)$, для которого выполнено равенство (17). Запишем это равенство в виде

$$\frac{du^{(-)}}{dx}(x_*, \varepsilon) - \frac{du^{(+)}}{dx}(x_*, \varepsilon) = 0,$$

умножим на ε и подставим вместо $u^{(-)}$ и $u^{(+)}$ разложения (15) и (16), учитывая, что в точке x_* все функции $\Pi_i^{(-)}(\xi)$, $\Pi_i^{(+)}(\tilde{\xi})$, а также точка $Q_1^{(-)}(\sigma)$ и их производные равны нулю. Получим уравнение относительно x_* в виде

$$\varepsilon\left(\frac{d\varphi_1}{dx}(x_*) + \ldots\right) + \left(\frac{dQ_0^{(-)}}{d\sigma}(0) + \sqrt{\varepsilon}\frac{dQ_2^{(-)}}{d\sigma}(0) + \varepsilon^{3/4}\frac{dQ_3^{(-)}}{d\sigma}(0) + \varepsilon\frac{dQ_4^{(-)}}{d\sigma}(0) + \cdots\right) -$$
$$- \varepsilon\left(\frac{d\varphi_3}{dx}(x_*) + \cdots\right) - \left(\frac{dQ_0^{(+)}}{d\sigma}(0) + \varepsilon\frac{dQ_1^{(+)}}{d\sigma}(0) + \cdots\right) = 0. \qquad (50)$$

Покажем сначала, что сумма

$$\frac{dQ_0^{(-)}}{d\sigma}(0) + \sqrt{\varepsilon}\frac{dQ_2^{(-)}}{d\sigma}(0) - \frac{dQ_0^{(+)}}{d\sigma}(0) \qquad (51)$$

является величиной порядка ε. Используя формулы (28), (30), (36) и (46), запишем эту сумму в виде

$$I^{(-)}(x_*) - I^{(+)}(x_*) + \sqrt{\varepsilon}\left(I^{(-)}(x_*)\right)^{-1}\bar{u}_1^{(-)}(x_*)(m_1(x_*) + m_2(x_*)) +$$
$$+ \varepsilon(g_2(x_*) + I_2(x_*)) + O(\varepsilon^{3/2}).$$

Используя выражения (29) и (46) для $I^{(-)}(x_*)$ и $I^{(+)}(x_*)$, а также выражения (31) и (37) для $m_1(x_*)$ и $m_2(x_*)$, нетрудно убедиться в том, что для любого x_* справедливы равенства:

$$I^{(-)}(x_*) - I^{(+)}(x_*) = 0 \text{ в силу условия А2},$$

и также

$$m_1(x_*) + m_2(x_*) = 0.$$

Следовательно, сумма (51) равна

$$\varepsilon(g_2(x_*) + I_2(x_*)) + O(\varepsilon^{3/2}).$$

Будем теперь искать x_* в виде ряда

$$x_* = x_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} x_i. \qquad (52)$$

Подставим ряд (52) в уравнение (50), разложим левую часть уравнения по степеням $\varepsilon^{1/4}$ и будем приравнивать нулю коэффициенты этого разложения. Главный член разложения состоит из слагаемых порядка ε, входящих в сумму

$$\varepsilon\frac{d\varphi_1}{dx}(x_*) + \frac{dQ_0^{(-)}}{d\sigma}(0) + \sqrt{\varepsilon}\frac{dQ_2^{(-)}}{d\sigma}(0) + \varepsilon^{3/4}\frac{dQ_3^{(-)}}{d\sigma}(0) + \varepsilon\frac{dQ_4^{(-)}}{d\sigma}(0) -$$

$$-\varepsilon\frac{d\varphi_3}{dx}(x_*)-\frac{dQ_0^{(+)}}{d\sigma}(0)-\varepsilon\frac{dQ_1^{(+)}}{d\sigma}(0)$$

и взятых при $x_*=x_0$, т.е. он равен $\varepsilon J(x_0)$, где

$$J(x_0)=\frac{d\varphi_1}{dx}(x_0)+g_2(x_0)+I_2(x_0)+I_3(x_0)+I_4(x_0)-\frac{d\varphi_3}{dx}(x_0)-\frac{dQ_1^{(+)}}{d\sigma}(0)$$

(см. (28), (36), (38), (39), (48)).

Введём следующее требование.

Условие A4. Пусть уравнение

$$J(x_0)=0 \tag{53}$$

имеет корень $x_0=\bar{x}_0\in(0;1)$, и пусть

$$J'(\bar{x}_0)\neq 0. \tag{54}$$

Для следующих коэффициентов x_i, $i=1,2,\dots$ ряда (52) последовательно получаются линейные уравнения

$$J'(\bar{x}_0)x_i+k_i=0, \tag{55}$$

где k_i – известные числа, выражающиеся через найденные уже x_j с номерами $j<i$. В силу (54) из уравнения (55) однозначно определяется x_i. Обозначим решение через $\bar{x}_i$.

Вернёмся теперь к вспомогательным краевым задачам (1), (13) и (1), (14) и рассмотрим их, положив

$$x_*=x_\delta:=\bar{x}_0+\varepsilon^{1/4}\bar{x}_1+\dots+\varepsilon^{m-1/4}\bar{x}_{4m-1}+\varepsilon^m(\bar{x}_{4m}+\delta), \tag{56}$$

где $m\geq 2$, а δ – произвольное число, которое может зависеть от ε, но является ограниченным при $\varepsilon\to 0$.

В силу теорем 1 и 2 для достаточно малых ε существуют решения $u^{(-)}(x,\varepsilon,\delta)$ и $u^{(+)}(x,\varepsilon,\delta)$ этих задач, имеющие асимптотические разложения (15) и (16), в которых функции $Q_i^{(-)}$ и $Q_i^{(+)}$ зависят от $\sigma_\delta=(x-x_\delta)/\varepsilon$ и также от ε и x_δ, а для производных $\frac{du^{(-)}}{dx}(x,\varepsilon,\delta)$ и $\frac{du^{(+)}}{dx}(x,\varepsilon,\delta)$ справедливы равенства (45) и (49) для любого n. Используя равенства (45) и (49) для $n=m+2$, составим умноженную на ε разность производных функций $u^{(-)}$ и $u^{(+)}$, взятых в точке x_δ, и разложим полученное выражение по целым степеням $\varepsilon^{1/4}$. В результате придём к равенству

$$\varepsilon\left(\frac{du^{(-)}}{dx}(x_\delta,\varepsilon,\delta)-\frac{du^{(+)}}{dx}(x_\delta,\varepsilon,\delta)\right)=\varepsilon J(\bar{x}_0)+$$

$$+\sum_{i=5}^{4m+4}\varepsilon^{i/4}(J'(\bar{x}_0)\bar{x}_{i-4}+k_{i-4})+\varepsilon^{m+1}J'(\bar{x}_0)\delta+O(\varepsilon^{m+5/4}). \tag{57}$$

Так как $\bar{x}_0$ и $\bar{x}_i$, $i=1,2,\dots$ являются решениями уравнений (53) и (55), то в правой части (57) остаются только два последних слагаемых, причём последнее слагаемое $O(\varepsilon^{m+5/4})$ зависит также от δ, но является величиной указанного порядка малости равномерно относительно δ из фиксированной окрестности точки $\delta=0$. А поскольку

$J'(\bar{x}_0) \neq 0$ (см. (54)), то существует такое $\delta = \bar{\delta}(\varepsilon) = O(\varepsilon^{1/4})$, для которого правая часть равенства (57) равна нулю, т.е.

$$\frac{du^{(-)}}{dx}(x_{\bar{\delta}}, \varepsilon, \bar{\delta}) = \frac{du^{(+)}}{dx}(x_{\bar{\delta}}, \varepsilon, \bar{\delta}).$$

Отсюда следует, что функция

$$u(x,\varepsilon) = \begin{cases} u^{(-)}(x,\varepsilon,\bar{\delta}), & x \in [0, x_{\bar{\delta}}], \\ u^{(+)}(x,\varepsilon,\bar{\delta}), & x \in [x_{\bar{\delta}}, 1] \end{cases}$$

является решением задачи (1), (2) с внутренним переходным слоем в окрестности точки $x_{\bar{\delta}}$. Согласно теоремам 1 и 2 при $m \geq 2$ частичная сумма $U^{(-)}_{m-2}(x,\varepsilon)$ является асимптотическим приближением для $u^{(-)}(x,\varepsilon,\bar{\delta})$ с точностью порядка $O(\varepsilon^{m-1})$, а частичная сумма $U^{(+)}_{m-2}(x,\varepsilon)$ – асимптотическим приближением для $u^{(+)}(x,\varepsilon,\bar{\delta})$ с такой же точностью. Если заменить $x_{\bar{\delta}}$ на $X_m = \sum_{i=0}^{4m-1} \varepsilon^{i/4}\bar{x}_i$ (т.е. отбросить в выражении (56) для x_δ слагаемое $\varepsilon^m(\bar{x}_{4m} + \delta)$), σ_δ заменить на $\sigma_m = (x - X_m)/\varepsilon$, то указанная точность сохранится, т.е.

$$u(x,\varepsilon) = \begin{cases} U^{(-)}_{m-2}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m-1}), & x \in [0, X_m], \\ U^{(+)}_{m-2}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m-1}), & x \in [X_m, 1], \end{cases} \tag{58}$$

где функции $Q_i^{(\pm)}$, входящие в $U^{(\pm)}_{m-2}$ зависят от σ_m. Равенство (58) доказано для любого $m \geq 2$. Обозначив $m-2$ через n, приходим к следующему основному утверждению.

Теорема 3. *Если выполнены условия A1 – A4, то для достаточно малых ε существует решение $u(x,\varepsilon)$ задачи (1), (2), для которого при любом натуральном n справедливо неравенство (c зависит от n)*

$$|u(x,\varepsilon) - U_n(x,\varepsilon)| \leq c\varepsilon^{n+1}, \qquad x \in [0;1], \tag{59}$$

где

$$U_n(x,\varepsilon) = \begin{cases} U^{(-)}_n(x,\varepsilon), & x \in [0, X_{n+2}], \\ U^{(+)}_n(x,\varepsilon), & x \in [X_{n+2}, 1], \end{cases} \tag{60}$$

$$X_{n+2} = \sum_{i=0}^{4n+7} \varepsilon^{i/4}\bar{x}_i,$$

а функции $U^{(-)}_n(x,\varepsilon)$ и $U^{(+)}_n(x,\varepsilon)$ определены формулами (44) и (48), в которых $\sigma = \sigma_{n+2} = (x - X_{n+2})/\varepsilon$.

Следствие. *Решение $u(x,\varepsilon)$ задачи (1), (2) удовлетворяет предельному равенству (6).*

Действительно, если $x \in [0; x_0)$, то для достаточно малых ε выполняется неравенство $x < X_{n+2}$, поэтому из (59) и (60) следует, что

$$u(x,\varepsilon) = U^{(-)}_n(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}).$$

Отсюда, учитывая, что $\sigma_{n+2} = (x - X_{n+2})/\varepsilon \to -\infty$ при $\varepsilon \to 0$, и, значит, $Q_0^{(-)}(\sigma_{n+2}) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u(x,\varepsilon) = \bar{u}_0^{(-)}(x) = \varphi_1(x).$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u(x,\varepsilon) = \varphi_3(x), \quad \text{если} \;\; x \in (x_0, 1].$$

Таким образом, равенство (6) выполнено.

3. Контрастная структура типа всплеска

3.1. Условия

Пусть выполнены следующие условия.

Условие B1. Функция $f(u,x,\varepsilon)$ имеет вид (9), причём функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f_1(u,x,\varepsilon)$ являются достаточно гладкими, и выполнено неравенство (10).

Условие B2. $\bar{f}_1(x) := f_1(\varphi(x), x, 0) > 0$, $x \in [0;1]$.

Условие B3. Уравнение

$$a'(x_0) = 0,$$

где $a(x) = \psi(x) - \varphi(x)$, имеет корень $x_0 = \bar{x}_0$, причём $a''(\bar{x}_0) \neq 0$.

3.2. Вид асимптотики

Обозначим через x_* неизвестную пока точку интервала $(0;1)$, в окрестности которой происходит «всплеск» решения. Саму точку x_* определим как точку, в которой искомое решение $u(x,\varepsilon)$ (КСТВ) имеет максимальное значение, и, следовательно,

$$\frac{du}{dx}(x_*, \varepsilon) = 0. \tag{61}$$

Асимптотику КСТВ построим в виде

$$u(x,\varepsilon) = \bar{u}(x,\varepsilon) + Q(\sigma,\varepsilon) + \Pi^{(-)}(\xi,\varepsilon) + \Pi^{(+)}(\tilde{\xi},\varepsilon), \quad x \in [0;1],$$

где

$$\bar{u}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2} \bar{u}_i(x) \tag{62}$$

– регулярная часть асимптотики,

$$Q(\sigma,\varepsilon) = \begin{cases} Q^{(-)}(\sigma,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} Q_i^{(-)}(\sigma), & 0 \le x \le x_*, \\ \\ Q^{(+)}(\sigma,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} Q_i^{(+)}(\sigma), & x_* \le x \le 1, \end{cases}$$

$Q^{(-)}(\sigma,\varepsilon)$, $\sigma = (x - x_*)/\varepsilon \le 0$ и $Q^{(+)}(\sigma,\varepsilon)$, $\sigma \ge 0$ – ряды, описывающие «всплеск» решения слева и справа от точки x_*,

$$\Pi^{(-)}(\xi,\varepsilon) = \varepsilon^{3/4} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} \Pi_i^{(-)}(\xi), \quad \xi = x/\varepsilon^{3/4}$$

и

$$\Pi^{(+)}(\tilde{\xi},\varepsilon) = \varepsilon^{3/4}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}\Pi_i^{(+)}(\tilde{\xi}),\ \ \tilde{\xi} = (1-x)/\varepsilon^{3/4}$$

– погранслойные ряды.

3.3. Построение асимптотики

Регулярный ряд (62) строится таким же образом, как в п. 2.3. При этом

$$\bar{u}_0(x) = \varphi(x),\ \ \bar{u}_1(x) = [a^{-1}(x)\bar{f}_1(x)]^{1/2} > 0,\ \ x \in [0;1],$$

где $a(x) := \psi(x) - \varphi(x) > 0$ в силу (10), $\bar{f}_1(x) > 0$ в силу условия B2. Следующие коэффициенты $\bar{u}_i(x)$, $i \geq 2$ являются решениями линейных уравнений

$$k(x)\bar{u}_i = F_i(x),$$

где

$$k(x) = 2a(x)\bar{u}_1(x) > 0,\ \ x \in [0;1]. \tag{63}$$

Уравнения для коэффициентов $Q_i^{(-)}(\sigma)$ ряда $Q_i^{(-)}(\sigma,\varepsilon)$ извлекаются с помощью такого же алгоритма, как в п. 2.3, из уравнения, в котором используется ещё одна растянутая переменная $\zeta = (x - x_*)/\varepsilon^{3/4}$:

$$\frac{d^2Q^{(-)}}{d\sigma^2} = Q^{(-)}f := f\left(\bar{u}(x_* + \varepsilon^{3/4}\zeta,\varepsilon) + Q^{(-)}(\sigma,\varepsilon), x_* + \varepsilon^{3/4}\zeta,\varepsilon\right) -$$

$$-f\left(\bar{u}(x_* + \varepsilon^{3/4}\zeta,\varepsilon), x_* + \varepsilon^{3/4}\zeta,\varepsilon\right),\ \ \sigma \leq 0,$$

а граничные условия – из равенств

$$\frac{dQ^{(-)}}{d\sigma}(0,\varepsilon) + \varepsilon\frac{d\bar{u}}{dx}(x_*,\varepsilon) = 0,\ \ Q^{(-)}(-\infty),\varepsilon) = 0. \tag{64}$$

Для $Q_0^{(-)}(\sigma)$ получается задача

$$\frac{d^2Q_0^{(-)}}{d\sigma^2} = \left(a(x_*) - Q_0^{(-)}\right)\left[(Q_0^{(-)})^2 + 2\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(x_*)Q_0^{(-)}\right] =: q_0^{(-)}\left(Q_0^{(-)}, x_*,\varepsilon\right),\ \ \sigma \leq 0, \tag{65}$$

$$\frac{dQ_0^{(-)}}{d\sigma}(0) = 0,\ \ Q_0^{(-)}(-\infty) = 0. \tag{66}$$

У этой задачи имеется тривиальное решение $Q_0^{(-)}(\sigma) = 0$, однако такой «главный» член ряда $Q_0^{(-)}(\sigma,\varepsilon)$ не соответствует искомому решению задачи (1), (2), имеющему «всплеск» в окрестности точки x_*. В качестве $Q_0^{(-)}(\sigma)$ возьмём решение уравнения (65) с граничными условиями

$$Q_0^{(-)}(0) = Q^0 \tag{67}$$

и

$$Q_0^{(-)}(-\infty) = 0,$$

где $Q^0 = Q^0(x_*, \varepsilon)$ – положительный корень уравнения

$$\int_0^{Q^0} q_0^{(-)}(s, x_*, \varepsilon)ds = 0. \tag{68}$$

Это уравнение получается таким образом: стандартным способом от уравнения (65) переходим к уравнению первого порядка

$$\frac{dQ_0^{(-)}}{d\sigma} = \left[2\int_0^{Q_0^{(-)}} q_0^{(-)}(s, x_*, \varepsilon)ds\right]^{1/2}, \quad \sigma \le 0, \tag{69}$$

полагая в котором $\sigma = 0$, учитывая граничное условие (66) при $\sigma = 0$ и обозначая $Q_0^{(-)}(0)$ через Q^0, получаем уравнение (68). Используя вид функции $q_0^{(-)}(s, x_*, \varepsilon)$ (см. (65)), нетрудно усмотреть, что правую часть уравнения (69) можно представить в виде

$$\left[\frac{1}{2}\left(Q^0 - Q_0^{(-)}\right)\left(Q_0^{(-)} + m\sqrt{\varepsilon}\right)\right]^{1/2} Q_0^{(-)},$$

где $m = 2k(x_*)/Q^0$, $k(x)$ определено в (63), а для $Q^0(x_*, \varepsilon)$ из уравнения (68) получается асимптотическое разложение

$$Q^0(x_*, \varepsilon) = \frac{4}{3}a(x_*) + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{i/2} r_i(x_*), \tag{70}$$

коэффициенты $r_i(x_*)$ которого можно последовательно найти, подставив ряд (70) в уравнение (68), в частности, $r_1(x_*) = \frac{1}{3}\bar{u}_1(x_*)$.

Решение задачи (69), (67) находится в явном виде

$$Q_0^{(-)}(\sigma) = \frac{4\sqrt{\varepsilon}Q^0 m E(\sigma)}{Q^0(1 - E(\sigma))^2 + \sqrt{\varepsilon}m(1 + E(\sigma))^2}, \quad \sigma \le 0,$$

где $E(\sigma) = \exp(\varepsilon^{1/4}p\sigma)$, $p := \sqrt{k(x_*)}$.

Задачи для функций $Q_i^{(-)}(\sigma)$, $i \ge 1$ имеют вид

$$\frac{d^2Q_i^{(-)}}{d\sigma^2} = \alpha^{(-)}(\sigma, x_*, \varepsilon)Q_i^{(-)} + q_i^{(-)}(\sigma, x_*, \varepsilon), \quad \sigma \le 0, \tag{71}$$

$$\frac{dQ_i^{(-)}}{d\sigma}(0) = \begin{cases} 0, & i = 1, 2, 3, 5, 7, \ldots, \\ -d\bar{u}_{(i-4)/2}/dx(x_*), & i = 4, 6, 8, \ldots, \end{cases} \quad Q_i^{(-)}(-\infty) = 0, \tag{72}$$

где $\alpha^{(-)}(\sigma, x_*, \varepsilon) = \frac{\partial q_0^{(-)}}{\partial Q_0^{(-)}}(Q_0^{(-)}(\sigma, x_*, \varepsilon)$, а функции $q_i^{(-)}(\sigma, x_*, \varepsilon)$ формируются с помощью такого же алгоритма, как в п. 2.3, и выражаются через $Q_j^{(-)}(\sigma)$ с номерами $j < i$, в частности, $q_1^{(-)}(\sigma, x_*, \varepsilon) = 0$ (отсюда и из (72) при $i = 1$ следует, что $Q_1^{(-)}(\sigma) = 0$, $\sigma \le 0$),

$$q_2^{(-)}(\sigma, x_*, \varepsilon) = -\bar{u}_1(x_*)\left(Q_0^{(-)}(\sigma)\right)^2 +$$

$$+\sqrt{\varepsilon}\left[-\bar{u}_1^2(x_*)Q_0^{(-)}+2a(x_*)\bar{u}_2(x_*)Q_0^{(-)}(\sigma)-Q_0^{(-)}f_1\right], \tag{73}$$

$$q_3^{(-)}(\sigma,x_*,\varepsilon)=a'(x_*)(Q_0^{(-)}(\sigma))^2(\varepsilon^{1/4}\sigma)+2\sqrt{\varepsilon}(au)'(x_*)Q_0^{(-)}(\sigma)(\varepsilon^{1/4}\sigma). \tag{74}$$

Решение задачи (71), (72) находится в явном виде

$$Q_i^{(-)}(\sigma)=\tilde{Q}_i^{(-)}(\sigma)+\gamma_i^{(-)}U_1^{(-)}(\sigma), \tag{75}$$

где

$$\tilde{Q}_i(\sigma)=U_2^{(-)}(\sigma)\int_{-\infty}^{\sigma}U_1^{(-)}(s)q_i^{(-)}(s,x_*,\varepsilon)ds+U_1^{(-)}(\sigma)\int_{\sigma}^{0}U_2^{(-)}(s)q_i^{(-)}(s,x_*,\varepsilon)ds,$$

$$U_1^{(-)}(\sigma)=\frac{dQ_0^{(-)}}{d\sigma}(\sigma),\ \ U_2^{(-)}(\sigma)=U_1^{(-)}(\sigma)\int_{-1}^{\sigma}(U_1^{(-)}(s))^2ds$$

($U_1^{(-)}(\sigma)$ и $U_2^{(-)}(\sigma)$ образуют фундаментальную систему решений однородного уравнения, соответствующего (71)), а число $\gamma_i^{(-)}$ выбирается так, чтобю было выполнено первое условие из (72).

Для функций $Q_i^{(-)}(\sigma)$, $i=0,1,2,\ldots$ нетрудно доказать оценку (с различными c и κ для разных i)

$$\left|Q_i^{(-)}(\sigma)\right|\le cQ_\kappa^{(-)}(\sigma),\ \ \sigma\le 0, \tag{76}$$

где

$$Q_\kappa^{(-)}(\sigma)=\frac{\sqrt{\varepsilon}E_\kappa(\sigma)}{(1-E_\kappa(\sigma))^2+\sqrt{\varepsilon}},\ \ E_\kappa(\sigma)=\exp(\varepsilon^{1/4}\kappa\sigma).$$

Функция $Q_\kappa^{(-)}(\sigma)$ выступает в качестве эталонной функции для коэффициентов ряда $Q^{(-)}(\sigma,\varepsilon)$, а оценка (76) отражает тот факт, что внутренний слой слева от точки x_* состоит из трёх зон так же, как и в случае КСТС (см. п. 2.3).

Из (75) получаем равенство

$$Q_i^{(-)}(0)=-\left(q_0^{(-)}(Q^0,x_*,\varepsilon)\right)^{-1}\int_{-\infty}^{0}U_1^{(-)}(\sigma)q_i^{(-)}(\sigma,x_*,\varepsilon)d\sigma,\ \ i\ge 2. \tag{77}$$

Ряд $Q^{(+)}(\sigma,\varepsilon)$ строится таким же образом, как и ряд $Q^{(-)}(\sigma,\varepsilon)$, в частности, при $\sigma=0$ он удовлетворяет условию, аналогичному (64):

$$\frac{dQ^{(+)}}{d\sigma}(0,\varepsilon)+\varepsilon\frac{d\bar{u}}{dx}(x_*,\varepsilon)=0, \tag{78}$$

коэффициенты ряда имеют оценки типа (76), отражающие трёхзонность внутреннего слоя справа от точки x_*.

Для $Q_0^{(+)}(\sigma)$ и $Q_1^{(+)}(\sigma)$ справедливы равенства

$$Q_0^{(+)}(\sigma)=Q_0^{(+)}(-\sigma),\ \ Q_1^{(+)}(\sigma)=0, \tag{79}$$

а для $Q_i^{(+)}(0)$, $i\ge 2$ имеют место формулы вида (77) с заменой верхнего индекса (-) на (+). Используя выражения для $q_i^{(-)}(\sigma,x_*,\varepsilon)$ при $i=2,3,4$ (в частности (73) и (74)), в формуле (77), а также аналогичную формулу для $Q_i^{(+)}(0)$ при $i = 2, 3, 4$, приходим к равенствам

$$Q_2^{(+)}(0) = Q_2^{(-)}(0), \;\; Q_3^{(+)}(0) = -Q_3^{(-)}(0), \;\; Q_4^{(+)}(0) = Q_4^{(-)}(0). \tag{80}$$

Равенства (79) и (80) понадобятся нам в п. 3.4.

Погранслойные ряды $\Pi^{(-)}(\xi, \varepsilon) = \varepsilon^{3/4} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} \Pi_i(\xi)$, $\xi = x/\varepsilon^{3/4}$ и $\Pi_i^{(+)}(\tilde{\xi}, \varepsilon) = \varepsilon^{3/4} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} \Pi_i^{(+)}(\tilde{\xi})$, $\tilde{\xi} = (1-x)/\varepsilon^{3/4}$ строятся так же, как ряд $\Pi^{(-)}(\xi, \varepsilon)$ в п. 2.3, их коэффициенты находятся в явном виде, например,

$$\Pi_0^{(-)}(\xi) = b_0^{-1} \varphi'(0) \exp(-b_0 \xi), \;\; b_0 = [k(0)]^{1/2}, \;\; \xi \geq 0,$$

$$\Pi_0^{(+)}(\tilde{\xi}) = -b_1^{-1} \varphi'(1) \exp(-b, \tilde{\xi}), \;\; b_1 = [k(1)]^{1/2}, \;\; \tilde{\xi} \geq 0,$$

$k(x)$ определено в (63).

Все функции $\Pi_i^{(-)}(\xi)$ и $\Pi_i^{(+)}(\tilde{\xi})$ имеют экспоненциальные оценки такого же вида, как в п. 2.3.

3.4. Доказательство существования КСТВ в задаче (1), (2)

В силу условий (64) и (78) для рядов $Q^{(-)}(\sigma, \varepsilon)$ и $Q^{(+)}(\sigma, \varepsilon)$ при любом $x_* \in (0; 1)$ выполняется равенство производных в точке $\sigma = 0$:

$$\frac{dQ^{(-)}}{d\sigma}(0, \varepsilon) = \frac{dQ^{(+)}}{d\sigma}(0, \varepsilon).$$

Приравняв сами ряды в этой точке, получим уравнение относительно x_*, которое запишем в виде

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} \left(Q_i^{(-)}(0) - Q_i^{(+)}(0) \right) = 0.$$

В силу равенств (79), (80) и с учётом того, что $Q_1^{(-)}(\sigma) = 0$, это уравнение принимает вид

$$2\varepsilon^{3/4} Q_3^{(-)}(0) + \sum_{i=5}^{\infty} \varepsilon^{i/4} \left(Q_i^{(-)}(0) - Q_i^{(+)}(0) \right) = 0. \tag{81}$$

Будем искать x_* в виде ряда

$$x_* = x_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{i/4} x_i. \tag{82}$$

Подставив это выражение для x_* в левую часть уравнения (81) и разложив её в ряд по степеням $\varepsilon^{1/4}$, стандартным способом получим уравнения для последовательного определения коэффициентов x_i, $i = 0, 1, \ldots$. Используя выражение для $Q_3^{(-)}(0)$ (см. (77) при $i = 3$) и вид (74) функции $q_3^{(-)}(\sigma, x_*, \varepsilon)$, нетрудно усмотреть, что главным членом в разложении левой части уравнения (81) является слагаемое порядка ε, а коэффициент при ε равен

$$I(x_0) := \left[\frac{1}{3} \left(q_0^{(-)}(Q^0, x_*, \varepsilon) \right)^{-1} \int_{-\infty}^{0} \left(Q_0^{(-)}(\sigma) \right)^3 d\sigma \right] \Bigg|_{\substack{x_* = x_0 \\ \varepsilon = 0}} \cdot a'(x_0).$$

Приравнивая $I(x_0)$ нулю и учитывая, что выражение в квадратных скобках отлично от нуля, получаем уравнение

$$a'(x_0) = 0.$$

В силу условия B3 это уравнение имеет корень $x_0 = \bar{x}_0$, причём $a''(\bar{x}_0) \neq 0$.

Уравнения для следующих коэффициентов x_i, $i = 1, 2, \ldots$ ряда (82) имеют вид

$$I'(\bar{x}_0) \cdot x_i + h_i = 0, \tag{83}$$

где $I'(\bar{x}_0) \neq 0$ в силу неравенства $a''(\bar{x}_0) \neq 0$, а h_i выражаются через уже найденные $x_j = \bar{x}_j$ с номерами $j < i$. Из уравнения (83) однозначно определяются x_i:

$$x_i = \bar{x}_i := -(I'(\bar{x}_0))^{-1} h_i.$$

Таким образом, построена (формальная) асимптотика КСТВ в задаче (1), (2).

Доказательство существования КСТВ с построенной асимптотикой проводится таким же способом, как и в п. 2.5. При условиях B1 – B3 рассматриваются две вспомогательные краевые задачи для уравнения (1): первая задача – на отрезке $[0, x_\delta]$ с краевыми условиями

$$\frac{du}{dx}(0, \varepsilon) = 0, \qquad \frac{du}{dx}(x_\delta, \varepsilon) = 0,$$

вторая – на отрезке $[x_\delta, 1]$ с краевыми условиями

$$\frac{du}{dx}(x_\delta, \varepsilon) = 0, \qquad \frac{du}{dx}(1, \varepsilon) = 0,$$

где

$$x_\delta = \sum_{i=0}^{4n+4} \varepsilon^{i/4} \bar{x}_i + \varepsilon^{n+5/4}(\bar{x}_{4n+5} + \delta).$$

Построив асимптотики решений $u_\delta^{(-)}(x, \varepsilon)$ и $u_\delta^{(+)}(x, \varepsilon)$ этих задач, содержащие ряды $Q_i^{(-)}(\sigma_\delta, \varepsilon)$ и $Q_i^{(+)}(\sigma_\delta, \varepsilon)$, $\sigma_\delta = (x - x_\delta)/\varepsilon$, построенные в п. 3.3, и приравняв эти асимптотики в точке x_δ, получим уравнение относительно δ, имеющее решение $\delta = \bar{\delta}(\varepsilon) = O(\varepsilon^{1/4})$.

Составленная из решений двух вспомогательных задач функция

$$u(x, \varepsilon) = \begin{cases} u_{\bar{\delta}}^{(-)}(x, \varepsilon), & x \in [0, \bar{\delta}], \\ u_{\bar{\delta}}^{(+)}(x, \varepsilon), & x \in [\bar{\delta}, 1] \end{cases}$$

является контрастной структурой типа всплеска в задаче (1), (2). Для неё имеет место теорема, аналогичная теореме 3 из п. 2.5.

Предельное равенство (11) доказывается таким же образом, как было доказано предельное равенство (6) в п. 2.5. При этом используется тот факт, что $\lim_{\varepsilon \to 0} Q^0(x_*, \varepsilon) = \frac{4}{3} a(x_0)$ (см. (70)).

В заключение отметим, что трёхзонное поведение функций $Q_i^{(\mp)}(\delta)$ делает внутренний слой в рассмотренной задаче шестизонным.

Список литературы / References

[1] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., *Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений*, Высшая школа, М., 1990; [Vasilieva A. B., Butuzov V. F., *Asymptotic methods in the theory of singular perturbations*, Visshaya shkola, Moskva, 1990, (in Russian).]

[2] Бутузов В. Ф., "Сингулярно возмущённая краевая задача с многозонным внутренним переходным слоем", *Моделирование и анализ информационных систем*, **22**:1 (2015), 5–22; [Butuzov V. F., "Singularly perturbed boundary value problem with multizonal interior transitional layer", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **22**:1 (2015), 5–22, (in Russian).]

[3] Бутузов В. Ф., "Об особенностях пограничного слоя в сингулярно возмущённых задачах с кратным корнем вырожденного уравнения", *Математические заметки*, **94**:1 (2013), 68–80; English transl.: Butuzov V. F., "On the special properties of the boundary layer in singularly perturbed problems with multiple root of the degenerate equation", *Mathematical Notes*, **94**:1 (2013), 60–70.

Butuzov V. F., "On Contrast Structures with a Multizonal Interior Layer", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:3 (2017), 288–308.

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-3-288-308

Abstract. A boundary value problem for a singularly perturbed differential equation of second order is considered in two cases, when one root of the degenerate equation is two-tuple. It is proved that in the first case the problem has a solution with the transition from the two-tuple root of the degenerate equation to one-tuple root in the small neighbourhood of an internal point of the interval, and in the second case the problem has a solution which has the spike in the interior layer. Such solutions are named, correspondingly, a contrast structure of step-type and a contrast structure of spike-type. In each case the asymptotic expansion of the contrast structure is constructed. It distinguishes from the known expansion in the case, when all the roots of the degenerate equation are one-tuple, in particular, the interior layer is multizonal.

Keywords: singularly perturbed equation, interior transitional layer, contrast structures of step type and spike type, asymptotic expansion of solution

On the authors:
Valentin F. Butuzov, orcid.org/0000-0002-8715-5720, phys-math d-r, professor,
Lomonosov Moscow State University, 1/2 Leninskie Gori, Moscow 119991, Russia, e-mail: butuzov@phys.msu.ru

Acknowledgments:
This work was supported by RFBR, project No 15-01-04619.