

УДК 517.9

Исследование стационарных режимов дифференциально-разностного уравнения динамики популяции насекомых

Кащенко С. А.¹

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: kasch@uniyar.ac.ru

получена 20 августа 2012

Ключевые слова: дифференциальное уравнение с запаздыванием, большой параметр, асимптотика, периодическое решение

Исследуются релаксационные колебания в уравнении первого порядка с двумя запаздываниями. На основе специального асимптотического метода большого параметра, разработанного автором, вопрос о динамике решений сводится к анализу решений нелинейных отображений. Для каждого цикла таких отображений построены соответствующие периодические решения исходного уравнения с наследованием свойств устойчивости.

Введение

В работах [1, 2] рассматривался вопрос о моделировании процесса изменения численности насекомых. В качестве математической модели была предложена система двух дифференциально-разностных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{N}_1 &= r_1 \left[1 - a \left(1 - \frac{N_2(t - h_1)}{K_2} \right) - \frac{N_1(t - h_2)}{K_1} \right] N_1, \\ \dot{N}_2 &= r_2 \left[\frac{N_1(t - (1 - h_1 - h_2))}{K_1} - \frac{N_2}{K_2} \right] N_2,\end{aligned}$$

где N_1 — количество имаго, N_2 — личинок, h_1 — время между появлением личинок и имаго, $(1 - h_1)$ — время между появлением имаго и личинок, h_2 — среднее время жизни в году популяции имаго, K_1 и K_2 — средние численности имаго и личинок соответственно, параметр $a < 1$ характеризует глубину связи популяций имаго и личинок, $r_1^0 = r_1(1 - a)$ — мальтузианский коэффициент линейного роста, параметр r_2 характеризует линейную скорость отрождения личинок.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства РФ по постановлению № 220, договор № 11.Г34.31.0053 и при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.В37.21.0457.

При биологически осмысленных предположениях о том, что значение параметра r_2 достаточно велико, решения исходной системы близки к решению уравнения

$$\dot{N} = r_1[1 - a(1 - N(t - (1 - h))) - N(t - h)]N, \quad (1)$$

где $N = N_1/K_1$, $h = h_2$, $N_2/K_2 = N(t - (1 - h_1 - h_2))$.

В [1, 2] высказано мнение, что уравнение (1) играет фундаментальную роль в динамике численности насекомых. Численными методами уравнение (1) изучалось в [2], где приведены также конкретные значения параметров для некоторых наиболее распространенных видов насекомых.

Из биологического смысла коэффициентов (1) вытекает, что параметр a близок к 1. Поэтому естественно рассмотреть вопрос о стационарных режимах уравнения (1) при условии, когда параметр $\varepsilon = 1 - a$ достаточно мал. Настоящая работа, тесно примыкающая к работам автора [3, 4], посвящена этой задаче. Часть результатов анонсирована в [5, 6].

Сразу отметим, что удастся установить существование довольно широкого множества различных стационарных режимов, причем все они биологически осмысленны: имеют ярко выраженный релаксационный характер, продолжительность всплеска численности близка к h , и промежуток времени между определенным числом генераций равен одному году. Структурно эти режимы могут быть достаточно сложными. В частности, показано, что возможна стохастичность в их поведении.

Статья состоит из 4-х параграфов, В §1 приведены основные результаты о режимах с одной генерацией в год, доказательство которых изложено в §2. В §3 рассмотрены режимы с несколькими генерациями в год, а в §4 приведены результаты о зависимости установившихся режимов от параметров h и λ .

1. Основные результаты о режимах с одной генерацией

Выполняя замену $N(t) \rightarrow (1 - a)N(t)$ и полагая $\lambda = r_1(1 - a)$, приводим уравнение (1) к виду

$$\dot{N} = \lambda[1 + aN(t - 1) - N(t - h)]N. \quad (2)$$

Ниже изучаются положительные решения (2). Заметим, что его решения с положительной начальной функцией положительны. При условии $0 < \varepsilon = 1 - a \ll 1$ изучим вопрос о структуре стационарных режимов (2), имеющих одну генерацию (всплеск численности) в год ($= 1 + h$). Важную роль ниже играют соображения биологического характера. В частности, с их помощью удастся описать множество начальных функций, задающих режимы с одной генерацией. Остановимся на этом подробнее. Всплеск численности имаго (бабочек) происходит достаточно резко, и длительность его близка к h . Затем их численность падает и практически равна нулю до следующего начала всплеска, который происходит приблизительно через год ($= 1 + h$). Примерный вид начальных функций таких режимов показан на рис. 1. Отметим, что нулевой момент времени примерно совпадает с началом очередного всплеска.

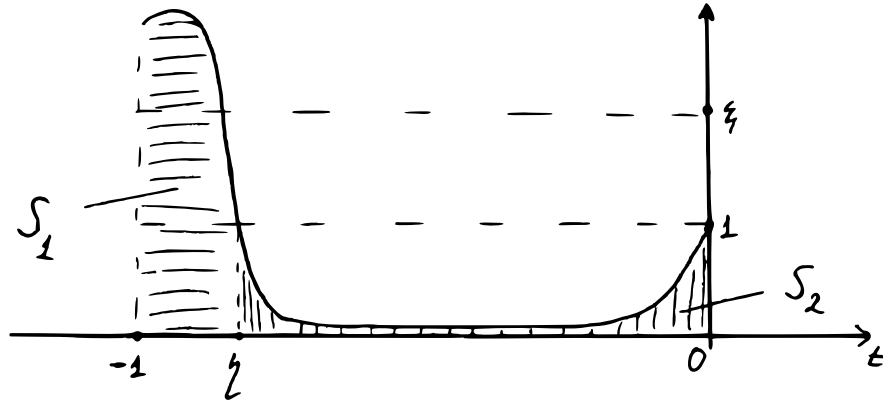


Рис. 1.

Дадим математическое описание рассматриваемых ниже начальных функций. Обозначим через $M_{\xi\eta}$ множество таких функций $\varphi_{\xi\eta}(s) \in C_{[-1,0]}$, зависящих от числовых параметров $\xi > 1$ и $\eta \in \left[-1, -1 + \frac{3 \ln \xi}{\lambda \xi}\right]$, для которых выполнены условия:

1. $\varphi_{\xi\eta}(s) > 0$, $\varphi_{\xi\eta}(0) = \varphi_{\xi\eta}(\eta) = 1$;
2. $\varphi_{\xi\eta} > 1$ при $s < \eta$, $\varphi_{\xi\eta}(s) < 1$ при $0 > s > \eta$;
3. существует такое $\eta(\xi) \in (-1, \eta)$, что $\varphi_{\xi\eta}(s) > \xi$ при $s < \eta(\xi)$ и $\varphi_{\xi\eta}(s) < \xi$ при $0 \geq s > \eta(\xi)$;
4. $S_1 = \int_{-1}^{\eta} \varphi_{\xi\eta}(s) ds = \xi$, $S_2 = \int_{\eta}^0 \varphi_{\xi\eta}(s) ds \leq \frac{3}{\lambda \xi}$.

По смыслу задачи $S_1 \gg 1$, $S_2 \ll 1$. В силу условия 4 это означает, что $\xi \gg 1$. Как будет показано ниже, диапазон изменения ξ определяется параметром ε . Цель дальнейших построений — сконструировать с помощью оператора сдвига по траекториям уравнения (2) некоторое отображение, ставящее в соответствие функции $\varphi_{\xi\eta}(s)$ функцию того же типа. О структуре стационарных режимов будем судить по инвариантам такого отображения.

Обозначим через $N(t, \varphi_{\xi\eta})$ решение (2) с начальной функцией $\varphi_{\xi\eta}(s)$, заданной при $t \leq 0$, а через $t_1(\varphi_{\xi\eta}), t_2(\varphi_{\xi\eta}), \dots$ — последовательные положительные нули (если они существуют) функции $N(t, \varphi_{\xi\eta}) - 1$. Если $t_1(\varphi_{\xi\eta})$ и $t_2(\varphi_{\xi\eta})$ определены, рассмотрим отображение

$$(\xi, \eta, \varphi_{\xi\eta}(s)) \rightarrow (\xi_1, \eta_1, \varphi_{1\xi_1\eta_1}(s)),$$

в котором

$$\xi_1 = F(\varepsilon, \xi, \eta, \varphi_{\xi\eta}(s)) = \int_{t_2(\varphi_{\xi\eta})-1}^{t_2(\varphi_{\xi\eta})} N(t, \varphi_{\xi\eta}) dt, \quad (3)$$

$$\eta_1 = t_1(\varphi_{\xi\eta}) - t_2(\varphi_{\xi\eta}), \quad \varphi_{1\xi_1\eta_1}(s) = N(t_2(\varphi_{\xi\eta}) + s, \varphi_{\xi\eta}). \quad (4)$$

Теорема 1. *Существуют такие (не зависящие от $\varphi_{\xi\eta}(s) \in H_{\xi\eta}$) постоянные ε_0 и α и такая функция $\alpha(\varepsilon) > \alpha$ параметра ε , что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и $\xi \in [\alpha, \alpha(\varepsilon)]$ определены величины $t_i(\varphi_{\xi\eta})$ ($i = 1, 2$) и $\varphi_{1\xi_1\eta_1} \in H_{\xi_1\eta_1}$, причем $\xi_1 \in (\alpha, \alpha(\varepsilon))$.*

Примерный вид функции $N(t, \varphi_{\xi\eta})$ изображен на рис. 2.

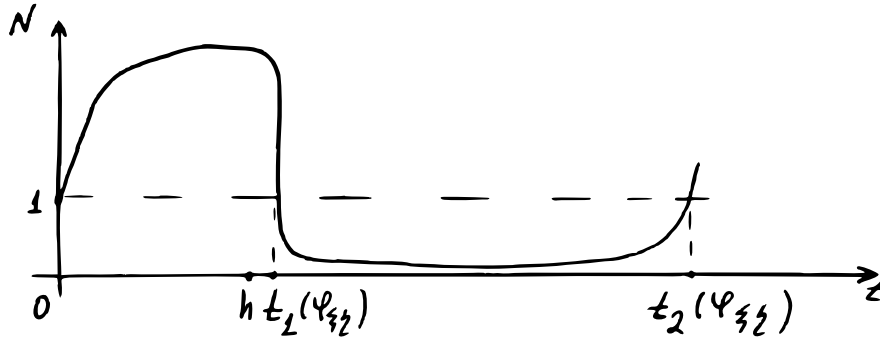


Рис. 2.

Итак, теорема 1 утверждает, что при определенных условиях множество $H_{\xi\eta}$ преобразуется в множества того же типа.

Теорема 2. *При условии $\varepsilon \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow \infty$ для значений $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\xi \in [\alpha, \alpha(\varepsilon)]$ равномерно относительно $\varphi_{\xi\eta}(s) \in H_{\xi\eta}$ выполнено асимптотическое равенство*

$$F(\varepsilon, \xi, \eta, \varphi_{\xi\eta}(s)) = 1 + h + \eta - \varepsilon\gamma \exp \lambda\xi \cdot (1 + o(1)) + o(1),$$

в котором $\gamma = \lambda^{-1}(\exp \lambda h - 1)$.

Введем в рассмотрение отображение

$$\xi_{n+1} = F_0(\varepsilon, \xi_n), \quad (5)$$

где $F_0(\varepsilon, \xi_n) = 1 + h + \xi_n - \varepsilon\gamma \exp \lambda\xi_n$.

На рис. 3 указан примерный вид функции $F_0(\varepsilon, \xi)$.

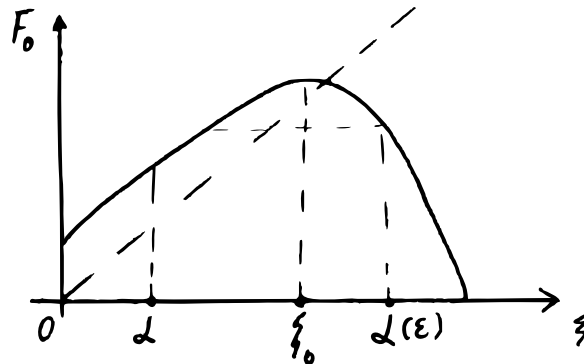


Рис. 3.

Функцию $\alpha(\varepsilon)$ определим как корень уравнения (относительно β) $F_0(\varepsilon, \beta) = \frac{1}{2}\lambda^{-1} \ln \frac{1}{\varepsilon\gamma}$. Ясно, что для каждого $\alpha > 0$ и всех достаточно малых ε (функция $F_0(\varepsilon, \xi)$) переводит отрезок $[\alpha, \alpha(\varepsilon)]$ в себя.

Теорема 3. Пусть $\xi_0(\varepsilon), \xi_1(\varepsilon), \dots$ — l -периодическая траектория отображения (5) и пусть найдется такое $d_0 > 0$, что $\left| \mu = \frac{d}{d\xi} F_0^l(\varepsilon, \xi) \right|_{\xi=\xi_0(\varepsilon)} \geq d_0$. Тогда при всех достаточно малых Σ уравнение (2) имеет периодическое решение $N(t, \varphi_{\tilde{\xi}_0(\varepsilon)\eta_0(\varepsilon)})$ с начальной функцией $\varphi_{\tilde{\xi}_0(\varepsilon)\eta_0(\varepsilon)} \in H_{\tilde{\xi}_0(\varepsilon)\eta_0(\varepsilon)}$, где $\tilde{\xi}_0(\varepsilon) = \xi_0(\varepsilon) + o(1)$, периода $t_{2l}(\varphi_{\tilde{\xi}_0(\varepsilon)\eta_0(\varepsilon)})$. Это решение экспоненциально орбитально устойчиво, если $|\mu| < 1$, и неустойчиво, если $|\mu| > 1$.

Отметим, что при всех (малых) ε отображение (5) имеет неподвижную точку, причем производная (по ξ) функции $F_0(\varepsilon, \xi)$ в этой точке равна $1 - \lambda(1 + h)$.

Величина η , фигурирующая в определении $\varphi_{\xi\eta}(s)$, существенной роли не играет. Её изменение при итерациях определяется величиной ξ .

Проследим за изменением амплитуды «всплесков» решения $M(t, \varphi_{\xi\eta}) = \varepsilon N(t, \varphi_{\xi\eta})$ исходного уравнения (1). Положим

$$A_n = \max_{t_{2n}(\varphi_{\xi\eta}) \leq t \leq t_{2n+1}(\varphi_{\xi\eta})} M(t, \varphi_{\xi\eta}).$$

Теорема 4. В условиях теорем 1 и 2 равномерно по $\varphi_{\xi\eta}(s) \in H_{\xi\eta}$ имеет место равенство

$$A_{n+1} = A_n \exp(\lambda[1 + h - \gamma_0 A_n]) \quad (\gamma_0 = \gamma \exp(-\lambda h) + o(1)). \quad (6)$$

Из теории одномерных отображений [7–9] вытекает, что аттракторы отображения (5) и (6) могут иметь при соответствующих λ и h сложную структуру. Например, возможны стохастические режимы колебаний.

Рассмотренные здесь решения (2) биологически осмысленны. Они имеют выраженный релаксационный характер. Продолжительность всплеска близка к h , а временной промежуток между соседними всплесками примерно равен $1 + h$, т.е. одному году.

2. О доказательстве теорем 1–4

Для решений уравнения (2) справедлива формула

$$N(t) = N(\tau) \exp \left[\lambda(t - \tau) + \lambda a \int_{\tau-1}^{\tau-1} N(s) ds - \int_{\tau-h}^{\tau-h} N(s) ds \right]. \quad (7)$$

Используя ее, изучим асимптотику решений с начальными условиями из $H_{\xi\eta}$. При этом будем предполагать, что $\alpha \leq \xi \leq \alpha(\varepsilon)$, где α достаточно велико, а $\alpha(\varepsilon)$ определено выше. Отметим, что для некоторых $0 < c_1 < c_2$

$$c_1 + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{1}{\varepsilon} \leq \alpha(\varepsilon) \leq c_2 + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{1}{\varepsilon}. \quad (8)$$

Лемма 1. Равномерно относительно $\xi \in [\alpha, \alpha(\varepsilon)]$, $\varphi_{\xi\eta}(s) \in H_{\xi\eta}$, $t \in [\eta + 1, h]$ и при всех достаточно малых ε имеет место асимптотическое (при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow \infty$) равенство

$$N(t, \varphi_{\xi\eta}) = \exp[\lambda(\varepsilon + t)] (1 + O(\alpha^{-1}) + O(\varepsilon, \ln \varepsilon)). \quad (9)$$

Для доказательства леммы достаточно в формуле (7) (при $\tau = 0$) для решения $N(t, \varphi_{\xi\eta})$ учесть свойства функции $\varphi_{\xi\eta}(s)$.

Лемма 2. *При всех достаточно больших α и достаточно малых ε определено выражение $t_1(\varphi_{\xi\eta})$, причем*

$$h < t_1(\varphi_{\xi\eta}) < h + \frac{s \ln \xi}{2\lambda\xi}. \quad (10)$$

Доказательство существования $t_1(\varphi_{\xi\eta})$ получаем, рассматривая выражение (7) при $\tau = h$ на отрезке $[h, h + \delta]$ ($\delta \in (0, h)$ — произвольно фиксировано) и учитывая в нем (9). Ясно, что $t_1(\varphi_{\xi\eta})$ — простой нуль функции $N(t, \varphi_{\xi\eta}) - 1$. Левое из неравенств (10) следует из леммы 1, а для доказательства правого неравенства разделим обе части (2) (при $N \equiv N(t, \varphi_{\xi\eta})$) на $N(t, \varphi_{\xi\eta})$ и проинтегрируем от 0 до $t_1(\varphi_{\xi\eta})$. В результате получим равенство

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1(\varphi_{\xi\eta})-h} N(t, \varphi_{\xi\eta}) dt &= t_1(\varphi_{\xi\eta}) + (1 - \varepsilon) \int_{-1}^{\eta} N(t, \varphi_{\xi\eta}) dt + \\ &+ (1 - \varepsilon) \int_{\eta}^{t_1(\varphi_{\xi\eta})-1} N(t, \varphi_{\xi\eta}) dt - \int_{-h}^0 N(t, \varphi_{\xi\eta}) dt. \end{aligned} \quad (11)$$

Второе слагаемое в правой части (11) равно $(1 - \varepsilon)\xi$, а третье и четвертое есть $O(\xi^{-1})$ равномерно относительно $\varphi_{\xi\eta}(s) \in H_{\xi\eta}$. Поэтому

$$\int_0^{t_1(\varphi_{\xi\eta})-h} N(t, \varphi_{\xi\eta}) dt = t_1(\varphi_{\xi\eta}) + \xi + O(\alpha^{-1}) + O(\varepsilon \ln \varepsilon). \quad (12)$$

В силу условия 3 на функцию $\varphi_{\xi\eta}(s)$, при $-1 \leq s \leq \eta(\xi)$ верно неравенство $\varphi_{\xi\eta}(s) \geq \xi$. Используя его, из (7) (при $\tau = 0$) получаем, что

$$N(t, \varphi_{\xi\eta}) \geq \exp \lambda \xi t \quad (0 \leq t \leq h). \quad (13)$$

Учитывая (13) в левой части (12), приходим к неравенству

$$(\lambda \xi)^{-1} [\exp \lambda \xi (t_1(\varphi_{\xi\eta}) - h) - 1] \leq t_1(\varphi_{\xi\eta}) + \xi + 1.$$

Отсюда легко следует правая оценка в (10).

Положим

$$S(\xi) = \int_0^{t_1(\varphi_{\xi\eta})} N(t, \varphi_{\xi\eta}) dt.$$

Лемма 3. *Равномерно относительно $\varphi_{\xi\eta}(s) \in H_{\xi\eta}$ имеет место асимптотическое равенство*

$$S(\xi) = \gamma \exp \lambda \xi \cdot [1 + O(\varepsilon \ln \varepsilon) + O(\alpha^{-1} \ln \alpha)]. \quad (14)$$

Доказательство (14) следует из лемм 1, 2.

Лемма 4. *Найдутся такие α_0 и ε_0 , что при каждом $\alpha \geq \alpha_0$ и всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\xi \geq \alpha$ определено выражение $t_2(\varphi_{\xi\eta})$ и равномерно относительно $\varphi_{\xi\eta}(s) \in H_{\xi\eta}$*

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \frac{1}{\lambda} \ln \frac{1}{\varepsilon\gamma} > \alpha \rightarrow \infty}} t_2(\varphi_{\xi\eta}) = 1 + h. \quad (15)$$

Для доказательства леммы установим следующее: для произвольно фиксированного $\delta \in (0, h)$ и достаточно малых ε и α^{-1} ($\alpha < \frac{1}{\lambda} \ln 1/\varepsilon\gamma$) верны неравенства

$$N(t, \varphi_{\xi\eta}) < 1 \quad \text{при } t \in (t_1(\varphi_{\xi\eta}), 1 + h - \delta), \quad (16)$$

$$N(1 + h + \delta, \varphi_{\xi\eta}) > 1. \quad (17)$$

Сначала обоснуем (16). Из самого уравнения (2) и из леммы 1 вытекает, что при увеличении t от $t_1(\varphi_{\xi\eta})$, функция $N(t, \varphi_{\xi\eta})$ сначала монотонно убывает. Пусть при некотором $t = t_m$ эта функция достигает впервые своего локального минимума N_m . Из (7) (при $\tau = t_1(\varphi_{\xi\eta})$) и из (9), (10) и (14) выводим, что $t_m \in [2h, 2h + \delta]$ и (равномерно по $\varphi_{\xi\eta}(s) \in H_{\xi\eta}$) выполнено асимптотическое равенство

$$N_m = \exp \left[-\lambda S(\xi)(1 + O(\alpha^{-1})) \right].$$

Используя это равенство и (14) в (7) (при $\tau = t_m$), для $t \in [t_m, 1 + h - \delta]$ получаем оценку

$$N(t, \varphi_{\xi\eta}) \leq \exp \left\{ -\frac{1}{2} \exp \lambda \xi \cdot [\lambda \gamma - (\exp \lambda(h - \delta) - 1)] \right\}. \quad (18)$$

Ясно, что при $\alpha^{-1}, \varepsilon \rightarrow \infty$ правая часть (18) близка к нулю, т.е. выполнено (16).

Оценку (17) получаем из неравенства

$$N(1 + h + \delta, \varphi_{\xi\eta}) \geq \frac{1}{2} \exp [\lambda(1 + h) - \varepsilon \lambda S(\xi) + \lambda \xi],$$

которое вытекает из (7) (при $\varepsilon = 0$) и из уже установленных выше свойств функции $N(t, \varphi_{\xi\eta})$. (Здесь учтено, что $\varepsilon S(\xi) \leq c_0$, где c_0 не зависит от ε и $\xi \in [\alpha, \alpha(\varepsilon)]$.)

Ниже потребуется одна вспомогательная оценка на

$$J = \int_{t_1(\varphi_{\xi\eta})}^{t_2(\varphi_{\xi\eta}) - \delta} N(t, \varphi_{\xi\eta}) dt,$$

где $\delta \in (0, h)$ — произвольно фиксировано.

Лемма 5. *Найдутся такие $\alpha_0 > 0$ и $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\alpha) > 0$, что при каждом $\alpha \geq \alpha_0$ и всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ из условия $\xi \in [\alpha, \alpha(\varepsilon)]$ вытекает оценка*

$$J \leq 2(\lambda \xi)^{-1}.$$

Положим $h_0 = \min(2h, 1)$,

$$J_1 = \int_{t_1(\varphi_{\xi\eta})}^{h_0} N(t, \varphi_{\xi\eta}) dt, \quad J_2 = \int_{h_0}^{t_2(\varphi_{\xi\eta}) - \delta} N(t, \varphi_{\xi\eta}) dt.$$

Выражение J_2 оценивается сверху (при достаточно больших ξ) величиной

$$\exp \left[-(2\lambda)^{-1} (\exp(\lambda(h_0 - h)) - 1) \exp \lambda \xi \right].$$

Это легко следует из (18). Покажем, что $J_1 \leq (1 + \delta)(\lambda \xi)^{-1}$. Отсюда (и из оценки J_2), очевидно, будет следовать доказательство леммы.

На отрезке $[0, h]$ функция $N(t, \varphi_{\xi\eta})$ монотонно возрастает. Поэтому из (10) и (12) получаем, что при $t \in [t_1(\varphi_{\xi\eta}) - h, h]$ $N(t, \varphi_{\xi\eta}) \geq \xi$. Рассмотрим (7) при $\tau = t_1(\varphi_{\xi\eta})$. Используя последнее неравенство и тот факт, что

$$\int_{t_1(\varphi_{\xi\eta}) - 1}^{h_0 - 1} N(t, \varphi_{\xi\eta}) dt = \int_{t_1(\varphi_{\xi\eta}) - 1}^{h_0 - 1} \varphi_{\xi\eta}(s) ds \leq \frac{3}{\lambda \xi},$$

получаем оценку

$$N(t, \varphi_{\xi\eta}) \leq \exp \left[(c - \xi)(t - t_1(\varphi_{\xi\eta})) \right],$$

которая справедлива при $t \in [t_1(\varphi_{\xi\eta}), h_0]$ (здесь постоянная c не зависит от ε , ξ и $\varphi_{\xi\eta}(s)$). Интегрируя полученное для $N(t, \varphi_{\xi\eta})$ неравенство в соответствующих пределах, получаем нужную оценку для J_1 .

Покажем, что на отрезке $[t_1(\varphi_{\xi\eta}) - 1, t_2(\varphi_{\xi\eta})]$ функция $N(t, \varphi_{\xi\eta})$ того же типа, что и $\varphi_{\xi\eta}(s)$. При этом роль параметров ξ и η играют величины (3) и (4).

Лемма 6. *Найдутся такие $\alpha_0 > 0$ и $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\alpha_0)$, что при каждом $\alpha \geq \alpha_0$ и всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ из условий $\xi \in [\alpha, \alpha(\varepsilon)]$, $\eta \in (-1, -1 + \frac{3 \ln \xi}{\lambda \xi})$ следуют включения*

$$\xi_1 \in (\alpha, \alpha(\varepsilon)), \quad \eta_1 \in (-1, -1 + \frac{3 \ln \xi_1}{\lambda \xi_1}) \quad (19)$$

и оценка

$$\int_{t_1(\varphi_{\xi\eta})}^{t_2(\varphi_{\xi\eta})} N(t, \varphi_{\xi\eta}) dt \leq \frac{3}{\lambda \xi_1}. \quad (20)$$

Сразу отметим, что из леммы 6 следует обоснование теоремы 1.

Начнем с доказательства первого включения в (19). Поделим левую и правую части (2) (при $N = N(t, \varphi_{\xi\eta})$) на $N(t, \varphi_{\xi\eta})$ и полученное выражение проинтегрируем от 0 до $t_2(\varphi_{\xi\eta})$. В результате получим равенство

$$t_2(\varphi_{\xi\eta}) + (1 - \varepsilon) \int_{-1}^{t_2(\varphi_{\xi\eta}) - 1} N(t, \varphi_{\xi\eta}) dt = \int_{-h}^{t_2(\varphi_{\xi\eta}) - h} N(t, \varphi_{\xi\eta}) dt. \quad (21)$$

Асимптотика $t_2(\varphi_{\xi\eta})$ изучена в лемме 4, а асимптотика остальных выражений в (21) получается из равенств

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{t_2(\varphi_{\xi\eta})-1} N(t, \varphi_{\xi\eta}) dt &= \int_{-1}^{\eta} N(t, \varphi_{\xi\eta}) dt + \int_{\eta}^0 N(t, \varphi_{\xi\eta}) dt + \\ &+ \int_0^{t_1(\varphi_{\xi\eta})} N(t, \varphi_{\xi\eta}) dt - \int_{t_2(\varphi_{\xi\eta})-1}^{t_1(\varphi_{\xi\eta})} N(t, \varphi_{\xi\eta}) dt, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\int_{-h}^{t_2(\varphi_{\xi\eta})-h} N(t, \varphi_{\xi\eta}) dt = \int_{-h}^0 N(t, \varphi_{\xi\eta}) dt + \int_0^{t_1(\varphi_{\xi\eta})} N(t, \varphi_{\xi\eta}) dt + \int_{t_1(\varphi_{\xi\eta})}^{t_2(\varphi_{\xi\eta})-h} N(t, \varphi_{\xi\eta}) dt. \quad (23)$$

Остановимся подробнее на этих равенствах. При условии $t \in [-1, 0]$ имеем $N(t, \varphi_{\xi\eta})$, поэтому

$$\int_{-1}^{\eta} N(t, \varphi_{\xi\eta}) dt = \xi, \quad \int_{\eta}^0 N(t, \varphi_{\xi\eta}) dt \leq \frac{3}{\lambda\xi}, \quad \int_{-h}^0 N(t, \varphi_{\xi\eta}) dt \leq \frac{3}{\lambda\xi}. \quad (24)$$

Отсюда и из определения $S(\xi)$ и ξ_1 вытекает, что формулу (22) можно переписать в виде

$$\int_{-1}^{t_2(\varphi_{\xi\eta})-1} N(t, \varphi_{\xi\eta}) dt = \xi + S(\xi) - \xi_1 + O(\alpha^{-1}).$$

Учитывая затем лемму 5, получаем равенство

$$\int_{-h}^{t_2(\varphi_{\xi\eta})-h} N(t, \varphi_{\xi\eta}) dt = \xi + S(\xi) + O(\alpha^{-1}).$$

Из формулы (21) теперь следует соотношение

$$\xi_1 = t_2(\varphi_{\xi\eta}) - \varepsilon S(\xi) + \xi + O(\alpha^{-1}) + O(\varepsilon),$$

которое выполняется равномерно по $\varphi_{\xi\eta}(s) \in H_{\xi\eta}$. Используя, наконец, (14) и (15), заключаем, что при $\alpha \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по $\varphi_{\xi\eta}(s) \in H_{\xi\eta}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и $\xi \in [\alpha, \alpha(\varepsilon)]$ имеет место асимптотическое равенство

$$\xi_1 = 1 + h + \xi - \varepsilon\gamma \exp \lambda\xi + o(1). \quad (25)$$

Из (25) вытекает (см. рис. 3), что при каждом $\delta \in (0, h)$ и при всех достаточно малых ε справедливы неравенства

$$\alpha + 1 - \delta \leq \xi_1 \leq \alpha(\varepsilon) - \delta. \quad (26)$$

Тем самым обоснование первого включения (19) завершено.

Перейдем к доказательству второго включения (19). Из (26) получаем, что $\xi_1 > 0$, т.е. $t_2(\varphi_{\xi\eta}) - 1 < t_1(\varphi_{\xi\eta})$. Далее, из (25) вытекает, что $|\xi_1 - \xi| \leq c$, где постоянная $c > 0$ не зависит от α , ε и $\varphi_{\xi\eta}(s) \in H_{\xi\eta}$. Отсюда и из леммы 1 делаем вывод, что $t_2(\varphi_{\xi\eta}) - 1 \geq h - \frac{1}{\xi}$. Это неравенство вместе с (10) и означает, что при достаточно больших ξ выполнено второе включение (19).

Осталось обосновать оценку (20). Покажем, что при каждом фиксированном $\delta \in (0, h)$ и при достаточно больших ξ имеет место оценка

$$\int_{t_2(\varphi_{\xi\eta}) - \delta}^{t_2(\varphi_{\xi\eta})} N(t, \varphi_{\xi\eta}) dt \leq \frac{\delta}{\xi}. \quad (27)$$

Из (27), леммы 5 и уже доказанного будет, очевидно, следовать (20). Из леммы 1, из (10) и первого включения (19) вытекает, что на отрезке $[t_2(\varphi_{\xi\eta}) - \delta - 1, t_2(\varphi_{\xi\eta}) - 1]$ верна оценка $N(t, \varphi_{\xi\eta}) \geq \xi \ln \xi$. Используя ее в (7) при $\tau = t_2(\varphi_{\xi\eta})$, получаем, что

$$N(t, \varphi_{\xi\eta}) \leq \exp \left[- (c + \lambda a \xi \ln \xi)(t_2(\varphi_{\xi\eta}) - t) \right]$$

для $t \in [t_2(\varphi_{\xi\eta}) - \delta, t_2(\varphi_{\xi\eta})]$ ($c > 0$ не зависит от ε , ξ и $\varphi_{\xi\eta}(s)$). Отсюда сразу следует (27).

Обоснование теоремы 2 вытекает из равенства (25). Из леммы 1 и из доказательства леммы 2 приходим к выводу, что при достаточно больших ξ (равномерно по $\varphi_{\xi\eta}(s) \in H_{\xi\eta}$) имеет место асимптотическое при $\varepsilon \rightarrow 0$ равенство

$$A_n = \varepsilon \cdot \max_{t_{2n}(\varphi_{\xi\eta}) \leq t \leq t_{2n+1}(\varphi_{\xi\eta})} N(t, \varphi_{\xi\eta}) = \varepsilon \exp[\lambda(\xi_n + h)](1 + o(1)).$$

Учитывая здесь (25), получаем обоснование теоремы 4.

Доказательство теоремы 3 громоздко, поэтому здесь приведем лишь его краткую схему. Пусть сначала $|\mu| < 1$. Фиксируем произвольно $\delta > 0$ и рассмотрим множество

$$H(\delta) = \bigcup_{\substack{-1 < \eta \leq -1 + \frac{3 \ln \xi}{\lambda \xi} \\ |\xi - \xi_0(\xi)| \leq \delta}} H_{\xi\eta}.$$

Через $\tilde{H}(\delta)$ обозначим множество таких функций $\varphi(s) \in H(\delta)$, которые дополнительно удовлетворяют оценке

$$\varphi(s) \leq 2 \exp [\lambda(\xi_0(\varepsilon) + \delta + h)]. \quad (28)$$

Наконец, через $V(\delta)$ обозначим выпуклую оболочку $\tilde{H}(\delta)$. Пусть $N(t, \varphi)$ — решение (2) с начальным условием $\varphi(s) \in V(\delta)$ (при $t \leq 0$), а $t_j(\varphi)$ ($j = 1, 2, \dots$) — последовательные положительные нули (если они существуют) функции $N(t, \varphi) - 1$. Введем в рассмотрение оператор π , определенный на $V(\delta)$ и действующий по правилу

$$\pi(\varphi(s)) = N(t_{2l}(\varphi) + s, \varphi).$$

Лемма 7. Найдется такое $\delta_0 > 0$, что для каждого $\delta \in (0, \delta_0)$ определено значение $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta)$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ имеет место включение

$$N(t_{2l}(\varphi) + s, \varphi) \in V(\delta) \quad \text{т.е. } \pi V(\delta) \subset V(\delta). \quad (29)$$

Доказательство леммы полностью повторяет предыдущие построения. Неравенство $N(t_{2l}(\varphi) + s, \varphi) \leq 2 \exp[\lambda(\xi_0(\varepsilon) + \delta + h)]$, аналогичное (28), вытекает из леммы 1.

Из (29) и общих утверждений о существовании неподвижных точек отображений получаем, что найдется такая функция $\varphi_0(s) \in V(\delta)$, что $\pi(\varphi_0(s)) = \varphi_0(s)$. Очевидно, решение $N(t, \varphi_0)$ будет периодическим с периодом $t_{2l}(\varphi_0)$.

Для доказательства устойчивости решения $N(t, \varphi_0)$ исследуется линеаризованное на этом решении уравнение. Удастся показать, что все мультипликаторы, кроме двух, стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Один из этих двух мультипликаторов равен 1, а предел второго при $\varepsilon \rightarrow 0$ равен μ .

В случае $|\mu| > 1$ легко доказывается неустойчивость соответствующего периодического решения. Однако обоснование самого факта существования периодического решения сопряжено со значительными трудностями.

3. Режимы с $m > 1$ генерациями в год

Структура решений с несколькими генерациями в год оказывается существенно сложнее, чем в случае одной генерации. Приведем здесь основные результаты о таких решениях. Обоснование их проходит по изложенной в §2 схеме, поэтому его опустим.

Будем предполагать, что $h < \frac{1}{m}$ ($m > 1$ – целое). (Биологический смысл этого условия очевиден.) Обозначим через $P = (x, y_1, \dots, y_{m-1})$ произвольный набор из m положительных чисел, а через $Q = (q_1, \dots, q_{2m-1})$ – произвольный набор таких $2m - 1$ чисел, для которых выполнены условия:

1. $-1 < q_1 < \dots < q_{2m-1} < 0 = q_{2m}$,
2. $q_1 \leq -1 + \frac{3 \ln |\ln \varepsilon|}{|\ln \varepsilon|}$,
3. $h < q_{2i+1} - q_{2i} < h + \frac{3 \ln |\ln \varepsilon|}{|\ln \varepsilon|} \quad (i = 1, \dots, m - 1)$.

Через H_{PQ} обозначим множество таких функций $\varphi_{PQ}(s) \in C_{[-1,0]}$, которые обладают следующими свойствами:

1. $\varphi_{PQ}(s) > 0$, $\varphi_{PQ}(q_i) = 1 \quad (i = 1, \dots, 2m)$,
2. $\int_{-1}^{q_1} \varphi_{PQ}(s) ds = x$, $\int_{q_{2i}}^{q_{2i+1}} \varphi_{PQ}(s) ds = y_i \quad (i = 1, \dots, m - 1)$,
3. $\int_{q_{2i-1}}^{q_{2i}} \varphi_{PQ}(s) ds \leq \frac{1}{|\ln \varepsilon|}$.

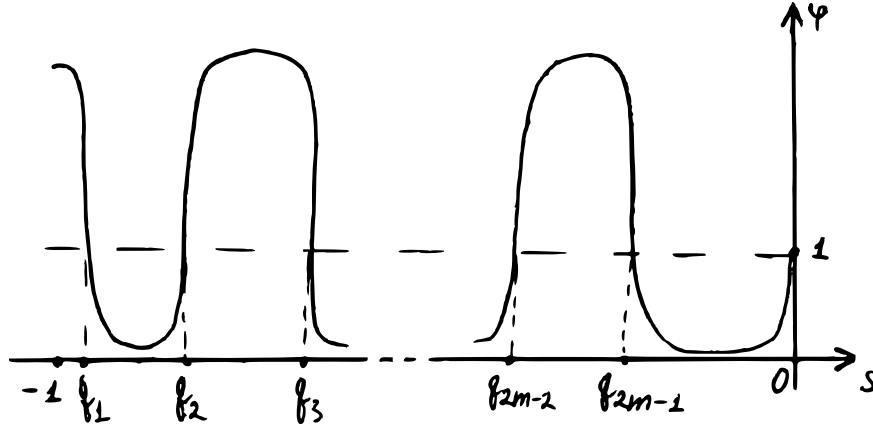


Рис. 4.

Примерный вид функции $\varphi_{PQ}(s)$ изображен на рис. 4.

Введем в рассмотрение отображение π_0 , которое каждому набору чисел P ставит в соответствие набор из m чисел P_1 по правилу

$$P_1 = \pi_0(P) = \pi_{q_{2m-1}} \cdot \pi_{q_{2m-4}} \cdot \dots \cdot \pi_{q_2}(P), \quad (30)$$

где

$$\pi_q(P) = (1 + q + h + x + (1 - \varepsilon)y_1 - S_0(x), y_2, \dots, y_{m-1}, S_0(x)), \quad S_0(x) = \gamma \exp \lambda x.$$

Обозначим через $V(\varepsilon)$ такое инвариантное относительно отображения π_0 множество, координаты всех точек P из которого неограниченно растут (равномерно относительно $P \in V(\varepsilon)$) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Отметим, что сам факт существования $V(\varepsilon)$ доказывается несложно. Можно показать, что первая координата точек $P \in V(\varepsilon)$ заключена в пределах $-c_1 + \frac{1}{\lambda} |\ln \varepsilon| \leq x \leq c_2 + \frac{1}{\lambda} |\ln \varepsilon|$, а все остальные координаты — в пределах от $d_1 \varepsilon^{-1}$ до $d_2 \varepsilon^{-1}$, где положительные постоянные c_1, c_2, d_1, d_2 не зависят от ε .

Основной результат состоит в том, что аттрактор отображения π_0 из $V(\varepsilon)$ гарантирует существование и определяет структуру (при достаточно малых ε) аналогичного аттрактора в пространстве начальных условий решений уравнения (2) с n генерациями в год. Опишем связь отображения π_0 с решениями (2). Обозначим через $N(t, \varphi_{PQ})$ решение (2) с начальным условием (при $t \leq 0$) $\varphi_{PQ}(s)$. Пусть $t_1(PQ)$ и $t_2(PQ)$ — первый и второй положительные нули функции $N(t, \varphi_{PQ}) - 1$ (если они существуют). Положим затем

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \int_{t_2(PQ)-1}^{q_3} \varphi_{PQ}(s) ds, & \bar{y}_i &= y + 1 \quad (i = 1, \dots, m-2), \\ \bar{y}_{m-1} &= \int_0^{t_1(PQ)} N(t, \varphi_{PQ}) dt, & \bar{P} &= (\bar{x}, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{m-1}), \\ \bar{q}_i &= q_{i+2} - t_2(PQ), \quad i = 1, \dots, 2m-2, \\ \bar{q}_{2m-1} &= t_1(PQ) - t_2(PQ), \quad \bar{q}_{2m} = 0, & \bar{Q} &= (\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_{2m-1}). \end{aligned}$$

Введем одно ограничение типа общности положения. Будем предполагать существование такого $d_0 > 0$, что расстояние от множества $\pi_0 V(\varepsilon)$ до границы $V(\varepsilon)$ не меньше d_0 при всех достаточно малых ε .

Теорема 5. *Найдется такое ε_0 (не зависящее от $\varphi_{PQ}(s) \in H_{PQ}$), что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ из условия $P \in P(\varepsilon)$ вытекает включение*

$$N(t_2(PQ) + s, \varphi_{PQ}) \in H_{\bar{P}\bar{Q}},$$

причем

$$\bar{P} \in V(\varepsilon).$$

Отображение $\bar{Q} = \pi_1(P, Q, \varphi_{PQ}, \varepsilon)$ оказывается близким к тождественному и существенной роли не играет. Определяющим является отображение

$$\bar{P} = \pi_2(P, Q, \varphi_{PQ}, \varepsilon).$$

Следующее утверждение раскрывает асимптотический характер выражения $\pi_2(P, Q, \varphi_{PQ}, \varepsilon)$.

Теорема 6. *Пусть $P \in V(\varepsilon)$. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет место асимптотическое (равномерно по $\varphi_{PQ}(s) \in H_{PQ}$) равенство*

$$\bar{P} - \pi_{q_2}(P) = o(1) \quad (31)$$

(т.е. каждый элемент набора чисел правой части (31) имеет порядок $o(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$).

Из теорем 5 и 6 вытекает, что аттракторы отображения (30) описывают (при условиях типа «грубости») аттракторы определенной структуры для уравнения (2).

Отображение (30) существенно многомерно. Следовательно, его стационарные режимы богаче и разнообразнее, чем в случае одной генерации.

Асимптотические характеристики режимов с несколькими генерациями имеют тот же тип, что и в случае одной генерации. На рис. 5, 6 представлены графики решений с одной и несколькими генерациями, полученные в результате численного интегрирования уравнения (2) при $\varepsilon = 0.1$ ($a = 0.9$), $h = 0.2$, $\lambda = 0.85$.

4. О зависимости стационарных режимов от параметров h и λ

Рассмотрим наиболее интересный с биологической точки зрения [1, 2] случай, когда параметр h является малым, т.е.

$$h \ll 1. \quad (32)$$

Изучим вопрос о применимости построений §1 при условии (32). На том же пути, который был описан в параграфах 1 и 2, для правой части формулы (3) получаем асимптотическое (при $h \rightarrow 0$, $\xi \rightarrow \infty$) равенство ($\gamma = h + O(h^2)$)

$$F(\varepsilon, \xi, \eta, \varphi_{\xi\eta}(s)) = 1 + (1 - \varepsilon)\xi - \varepsilon h \exp \lambda \xi \cdot (1 + o(1)) + o(1). \quad (33)$$

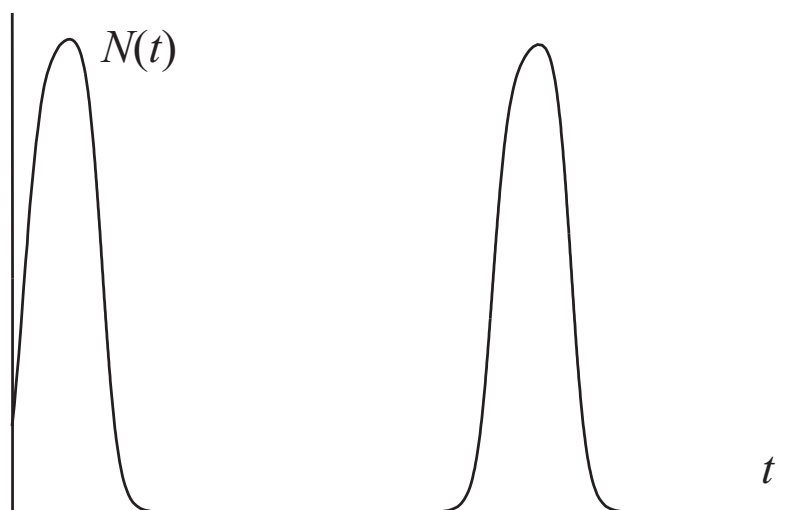


Рис. 5.

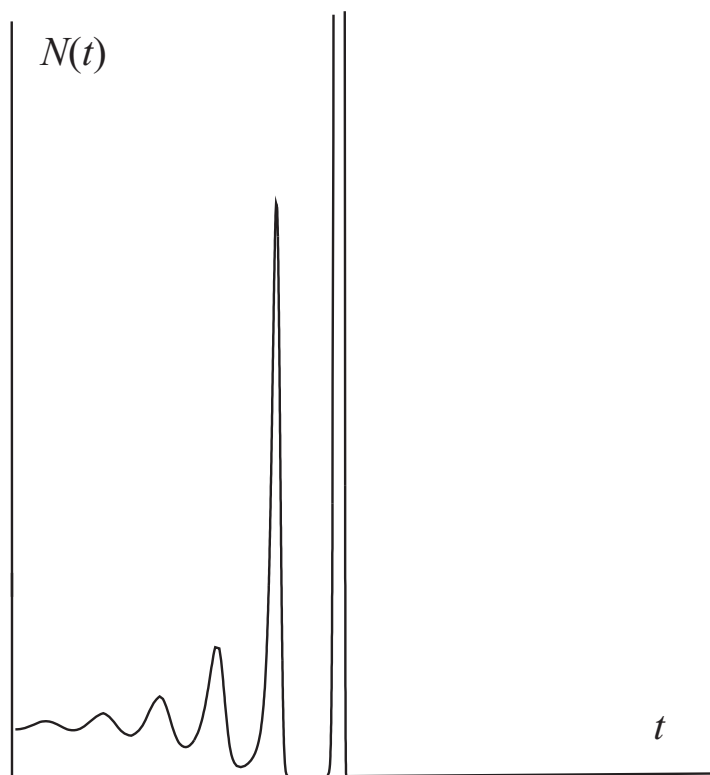


Рис. 6.

Обозначим через $\xi(\varepsilon, h)$ неподвижную точку отображения

$$\xi_{n+1} = 1 + (1 - \varepsilon)\xi_n - \varepsilon h \exp \lambda \xi_n. \quad (34)$$

Очевидно, при $h \rightarrow 0$ и фиксированном ε имеем $\xi(\varepsilon, h) < \varepsilon^{-1}$ и $\xi(\varepsilon, h) \rightarrow \varepsilon^{-1}$. Для справедливости аналогов теорем 1 – 4 необходимо, чтобы аттрактор отображения (34) лежал в области достаточно больших (при $h \rightarrow 0$) значений ξ . При $h \ll 1$ единственным аттрактором (34) является точка $\xi(\varepsilon, h)$, поэтому одного условия (32) для

справедливости теорем 1 – 4 недостаточно: необходимо, чтобы параметр ε стремился к нулю вместе с h .

Следующее важное требование для применимости теорем 1 – 4 состоит в том, чтобы значения $S(\xi)$ (площадь всплеска) были велики при $\varepsilon, h \rightarrow 0$. Для $S(\xi)$ имеет место (при $\varepsilon, h \rightarrow 0$) равенство:

$$S(\xi) = h \exp \lambda \xi \cdot (1 + o(1)).$$

Отсюда и из асимптотики функции $\xi(\varepsilon, h)$ заключаем, что

$$h \exp \lambda \varepsilon^{-1} \rightarrow \infty \quad \text{при } \varepsilon, h \rightarrow 0. \quad (35)$$

Это условие показывает, что параметр h не может «слишком» быстро стремиться к нулю. Условия (32) и (35) достаточны для справедливости теорем 1 – 4.

Отметим, что при уменьшении h колебания становятся более резкими. Интересно, что, должным образом уменьшая этот параметр, можно сделать состояние равновесия отображения (34) его единственным стационарным режимом.

Перейдем к рассмотрению случая

$$\lambda \gg 1.$$

Теорема 7. *Найдется такое λ_0 , что при всех $\lambda \geq \lambda_0$ уравнение (2) имеет экспоненциально орбитально устойчивое периодическое с периодом $T_0(\lambda)$ решение $N_0(t, \lambda)$, причем при $\lambda \rightarrow \infty$*

$$T_0(\lambda) = \lambda^{-1}(1 - \alpha) \exp \lambda h \cdot (1 + o(1)).$$

Доказательство этой теоремы повторяет построения работы [10]. Отметим, что $N_0(t, \lambda)$ имеет ярко выраженный «хатчинсоновский» тип колебаний [10]. На промежутке длины периода функция $N_0(t, \lambda)$ имеет лишь один всплеск, длительность которого близка к h . Для описания динамики изменения численности популяций насекомых с годовым циклом этот случай, очевидно, мало пригоден.

При увеличении параметра a период $T_0(\lambda)$, а значит, и промежуток времени между генерациями, уменьшается. Для применимости утверждения теоремы 7 необходимо, чтобы выполнялось условие $a < 1 - \delta$, где $\delta = \delta(\lambda)$ — некоторая функция параметра λ , имеющая при $\lambda \rightarrow \infty$ асимптотику

$$\delta = \lambda \exp[-\lambda h] \left(1 + h + \frac{\ln \lambda}{\lambda} (1 + o(1))\right).$$

Важно, что при $1 - a \approx \delta$ период $T_0(\lambda)$ близок к $1 + h$. Таким образом, согласованное с λ увеличение параметра a приводит к тому, что режим $N_0(t, \lambda)$ становится достаточно биологичным. Аналогичный эффект имеет место и при соответствующем уменьшении h .

Опишем структуру решений при $\varepsilon \leq \delta(\lambda)$. При $\varepsilon = \delta(\lambda)$ решение $N_0(t, \lambda)$ теряет устойчивость и при дальнейшем уменьшении (по сравнению с $\delta(\lambda)$) параметра ε из этого решения бифурцируют два периодических решения $N_1(t, \lambda)$ и $N_2(t, \lambda)$ периодов $T_1(\lambda)$ и $T_2(\lambda)$ соответственно. При всех ε , достаточно близких к $\delta(\lambda)$, решение

$N_1(t, \lambda)$ устойчиво, а $N_2(t, \lambda)$ — неустойчиво. Эти решения существенно отличаются друг от друга. Функция $T_2(\lambda)$ близка к $1+h$, а функция $T_1(\lambda)$ устроена более сложно. Она сначала сильно возрастает от величины $\approx 2(1+h)$ до некоторой, неограниченной при $\lambda \rightarrow \infty$, величины, а при дальнейшем уменьшении ε опять убывает до значений, близких к $2(1+h)$. При прохождении следующего порогового значения $\varepsilon = \delta_1(\lambda) < \delta_2(\lambda)$ структура $N_1(t, \lambda)$ коренным образом меняется.

Для всех достаточно малых (согласованно с λ) значений $\varepsilon < \delta(\lambda)$ имеют место аналоги теорем 1–4. При этом параметр γ в формуле (5) можно заменить $\lambda^{-1} \exp \lambda h$, вместо ограничения типа $\xi \in [\alpha, \alpha(\varepsilon)]$ оставить лишь условие $\xi \geq 0$.

Интересно отметить, что сложные по структуре колебания совсем иного характера были обнаружены в работе автора [11], посвященной асимптотическому исследованию одного класса (скалярных) уравнений с двумя запаздываниями.

Сделаем еще одно замечание. Основываясь на результатах численного счета [2], а также на результатах работ [12, 13], можно сделать вывод о том, что множество установившихся режимов уравнения (1) достаточно богато. Оно далеко не исчерпывается теми режимами, существование которых установлено в настоящей работе.

Список литературы

1. Колесов Ю.С. Моделирование популяций насекомых // Биофизика. 1983. Т. 28, № 3. С. 513–514.
2. Колесов Ю.С., Кубышкин Е.П. Некоторые свойства решений дифференциально-разностных уравнений, моделирующих динамику изменения численности популяций насекомых // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль, 1983. С. 64–86.
3. Кащенко С.А. Исследование методами большого параметра системы нелинейных дифференциально-разностных уравнений, моделирующих задачу хищник-жертва // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266, № 4. С. 792–795.
4. Кащенко С.А. Биологическое объяснение некоторых законов функционирования простейших экосистем в экстремальных случаях // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль, 1982. С. 85–104.
5. Кащенко С.А. Стационарные режимы уравнения, описывающего колебания численности насекомых // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273, № 2. С. 328–330.
6. Кащенко С.А. Исследование стационарных режимов дифференциально-разностного уравнения динамики популяции насекомых. Деп. ВИНТИ 15.01.85, N 386 – 85. 32 с.
7. Шарковский А.Н. Сосуществование циклов непрерывного отображения прямой в себя // Украинский математический журнал. 1964. Т. 13, № 3. С. 86–94.
8. Шарковский А.Н. О циклах и структуре непрерывного отображения // Украинский математический журнал. 1965. Т. 17, № 3. С. 104–111.

9. Шарковский А.Н. Разностные уравнения и динамика численности популяций // Препринт Института математики АН УССР. 1982. № 82, 18. 22 с.
10. Кащенко С.А. Асимптотика периодического решения обобщенного уравнения Хатчинсона // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль, 1981. С. 64–85.
11. Кащенко С.А. Сложные стационарные режимы одного дифференциально-разностного уравнения, обобщающего уравнение Хатчинсона // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль, 1983. С. 94–101.
12. Глызин С.Д. Двухчастотные колебания фундаментального уравнения динамики популяций насекомых // Нелинейные колебания и экология: Межвуз. сб. Ярославль, 1984. С. 91–116.
13. Глызин С.Д. Учет возрастных групп в уравнении Хатчинсона // Моделирование и анализ информационных систем. 2007. Т.14, № 3. С. 50 – 63.

Stationary States of a Delay Differential Equation of Insect Population's Dynamics

Kaschenko S. A.

Keywords: delay differential equation, large parameter, asymptotic, periodic solution

Relaxation oscillations in a first order differential equation with two delays are considered. On the basis of a special asymptotic big parameter method the problem of studying dynamics of an equation is reduced to the analysis of nonlinear mappings. Each cycle of these mappings corresponds to a periodic solution of the initial equation with the same stability.

Сведения об авторе:

Кащенко Сергей Александрович,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой