

©Быков А. А., Ермакова К. Е., 2017

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-3-309-321

УДК 517.9

Решения уравнений нестационарного фронта реакции с вырожденными точками равновесия

Быков А. А.¹, Ермакова К. Е.

получена 22 мая 2017

Аннотация. Мы рассматриваем нестационарный процесс распространения некоторой субстанции в одномерной среде с диффузией и источниками, плотность которых зависит от концентрации (так для определенности будем называть исследуемую величину). Предполагается, что изменение концентрации $u(x, t)$ в данной точке со временем t определяется разностью потоков слева и справа, а также плотностью источников, которая зависит от x и от u . Такая модель приводит к начально-краевой задаче для квазилинейного уравнения параболического типа, которое называют уравнением реакции–диффузии. В частности, наша модель пригодна для описания нестационарного процесса передачи информации в одномерной системе объектов, которые могут быть описаны величиной, характеризующей степень информированности о некотором событии. Предполагается, что плотность источников обращается в нуль (меняя знак) при трех значениях концентрации, два из которых (крайние) являются устойчивыми, имеется еще промежуточное неустойчивое состояние с нулевой плотностью источников, в котором тоже имеет место перемена знака. Особенность нашей модели состоит в том, что мы предполагаем, что два крайних корня функции плотности источников являются вырожденными (с целым или дробным показателем, большим единицы). Такая модель соответствует ситуации, при которой плотность источников в окрестности стационарного значения концентрации является бесконечно малой величиной более высокого порядка, чем для стандартной модели, в которой эта величина имеет первый порядок малости. Мы намерены показать аналитически и методом компьютерного моделирования, что данная модель приводит к тому, что скорость асимптотического стремления концентрации к равновесным значениям для движущегося фронта становится степенной вместо экспоненциальной, имеющей место для стандартных моделей. Построена формальная асимптотика решения начально-краевой задачи в однородной среде со степенной зависимостью плотности источников от концентрации, построены верхнее и нижнее решения, дано строгое обоснование формальной асимптотики. Построены точные решения уравнения реакции–диффузии для широкого класса функций плотности источников.

Ключевые слова: нелинейные дифференциальные уравнения, асимптотические методы, контрастные структуры, дифференциальные неравенства, горение

Для цитирования: Быков А. А., Ермакова К. Е., "Решения уравнений нестационарного фронта реакции с вырожденными точками равновесия", *Моделирование и анализ информационных систем*, **24**:3 (2017), 309–321.

Об авторах: Быков Алексей Александрович, orcid.org/0000-0002-9399-7115, д-р физ.-мат. наук, профессор, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991 Россия, e-mail: abkov@yandex.ru
Ермакова Кристина Евгениевна, orcid.org/0000-0002-9279-3762, аспирант, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991 Россия, e-mail: kristinaermakova19@rambler.ru

Благодарности:

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 16-01-00690-а.

1. Введение

В работе рассматриваются одномерные нестационарные эволюционные системы, в которых распространение некоторой субстанции описывается уравнением реакции–диффузии

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - f(u, x), \\ u(x, 0) = \psi_0(x), \quad u_x(a, t) = \psi_1(t), \quad u_x(b, t) = \psi_2(t), \end{cases} \quad (1)$$

величину u будем называть для определенности концентрацией. Мы в данной работе рассматриваем уравнение (1) в однородной среде, для которой плотность источников в окрестности корней пропорциональна некоторой степени концентрации:

$$f(u) = f_0(u)(u - \varphi_1)^{\theta_1}(\varphi_2 - u)(\varphi_3 - u)^{\theta_3}, \quad (2)$$

где использовано обозначение

$$u^{\theta} = \begin{cases} u^{\theta} & \text{при } u \geq 0, \\ -(-u)^{\theta} & \text{при } u \leq 0, \end{cases} \quad (3)$$

так что имеются два особенных значения концентрации, каждая из которых характеризуется своими значениями константы $\theta_1 > 1$ и $\theta_3 > 1$. Такие корни функции плотности источников будем называть вырожденными точками равновесия, поскольку при таких значениях концентрации плотность источников равна нулю, значение плотности источников стремится к нулю как степенная функция с показателем, который больше 1 и не обязательно целочислен. Значения φ_1 и φ_3 есть пороговые значения. Два множителя функции $f(u)$ описывают плотность источников в окрестностях точек устойчивого равновесия, средний множитель описывает плотность источников в окрестности корня φ_2 , причем $\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3$. В работах [1], [2], [3] аналогичная задача рассматривалась для случая целочисленного показателя $\theta = 2$. Наш метод отличается от использованного в этих работах и позволяет включать любые вещественные значения. Похожий метод был использован в [4] для доказательства существования решения типа бегущей волны для нелинейного уравнения Соболевского типа.

Имеется немало работ, посвященных контрастным структурам, которые являются решениями сингулярно возмущенных задач, возникающих при изучении или описании химической кинетики [5], астрофизики [6], [7], [8], биофизики или геофизической плазмы. Мы рассматриваем важный на практике случай, когда температура в реагирующей среде описывается уравнением реакции–диффузии с малым параметром при старших производных. Наличие малого параметра отражает характерные особенности практически важных задач, в которых, во-первых, реакция происходит в неоднородной среде, но ширина фронта реакции много меньше диаметра области, а во-вторых, скорость перемещения фронта достаточно мала, так что можно считать, что пространственный профиль фронта медленно меняется со временем. Введение параметра позволяет также использовать понятие вырожденного уравнения, которое получается формально при значении параметра, равном нулю. Мы используем метод построения асимптотического ряда для решения этого уравнения, описанный в работе [9]. Решение представляется суммой регулярной функции $\bar{u}$ и функции внутреннего переходного слоя (ВПС) Q .

В настоящей работе нами построена формальная асимптотика нулевого порядка решения начально-краевой задачи для уравнения реакции–диффузии в однородной среде со степенной зависимостью плотности источников от концентрации, построены верхнее и нижнее решения, дано строгое обоснование формальной асимптотики. Построены точные решения уравнения реакции–диффузии для класса функций плотности источников, пропорциональной некоторой степени температуры.

2. Постановка задачи

Рассмотрим сингулярно возмущенную начально-краевую задачу для уравнения реакции–диффузии в однородной среде:

$$\begin{cases} \varepsilon u_t = \varepsilon^2 \kappa u_{xx} - f(u, \varepsilon), & x \in (a, b), \quad t \in (0, T), \\ u_x(a, t, \varepsilon) = 0, \quad u_x(b, t, \varepsilon) = 0, & t \in (0, T], \\ u(x, 0, \varepsilon) = \psi_0(x, \varepsilon), & x \in [a, b], \end{cases} \quad (4)$$

где ε – малый параметр, $\varepsilon > 0$. Выполним переход к растянутым переменным:

$$u(x, t) = v(\xi), \quad \frac{x - x^*(t)}{\varepsilon} = \xi, \quad \frac{t}{\varepsilon} = \tau, \quad \frac{dx^*}{dt} = W, \quad (5)$$

где $x^*(t)$ – точка, характеризующая положение внутреннего переходного слоя при заданном фиксированном t , – определяется условием $u(x^*, t, \varepsilon) = 0$. Рассмотрим вместе с задачей (4) задачу нахождения решения, имеющего вид бегущей квазиволны с некоторой скоростью W . Тогда (4) преобразуется к виду

$$\begin{cases} -W v_\xi = \kappa v_{\xi\xi} - f(v), \\ v(\xi) \rightarrow \varphi_1 \text{ при } \xi \rightarrow -\infty, \quad v(\xi) \rightarrow \varphi_3 \text{ при } \xi \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (6)$$

граничные условия заменены условиями примыкания к значениям устойчивого равновесия реакции. Выполним теперь операцию понижения порядка: $v_\xi = p$, $v_{\xi\xi} = pp_v$,

$$-Wp = \kappa pp_v - f(v). \quad (7)$$

Получить точное явное решение уравнения (7) при сколько-нибудь широком классе физически оправданных функций $f(v)$ не удастся. Это уравнение решается явно, например, при выборе f в виде кубической функции с симметрично расположенными корнями, но для вырожденных корней найти решение и даже доказать существование, вообще говоря, не удастся. Поэтому мы в данной работе пойдем другим путем. Зададим достаточно гладкую функцию $p(v)$ и значение W , из уравнения (7) найдем функцию плотности источников $f(v)$:

$$f(v) = Wp(v) + \kappa p(v)p_v. \quad (8)$$

Для того, чтобы построить класс правых частей, с одной стороны, достаточно широкий, чтобы в нем можно было найти функцию, достаточно близкую к физически оправданной модели, и, с другой стороны, такой, что данное уравнение может быть решено аналитически, мы рассматриваем класс физически оправданных функций вида

$$f(v) = f_0(v) \cdot f_1(v - \varphi_1) \cdot (v - \varphi_2) \cdot f_3(\varphi_3 - v), \quad (9)$$

где

$$f_1(v) = \sum_k C_{1,k} v^{*\theta_{1,k}}, \quad f_3(v) = \sum_k C_{3,k} v^{*\theta_{3,k}}, \quad (10)$$

$f_0(v)$ – гладкая функция, $f_0 > 0$. При этом кратность корня (целочисленная, дробная, иррациональная) определяется наименьшим значением $\min(\theta_{1,k}) > 1$ (и соответственно $\min(\theta_{3,k}) > 1$). Формальную асимптотику, верхнее и нижнее решения мы построим для этого общего случая, а конкретный пример приведем такой, чтобы получить явное выражение для функции переходного слоя нулевого порядка. Для этого нам потребуется задать явное выражение $p(v)$. В окрестности вырожденных корней $v = \varphi_1$ и $v = \varphi_3$ мы зададим эту функцию в явном виде, так чтобы обеспечить выполнение (9) и (10). Рассмотрим сначала окрестность значения $v = \varphi_1$. Пусть

$$p(v) = -W\omega + \frac{C}{W}\omega^{**\theta_1}, \quad \varphi_1 - \delta v < v < \varphi_1 + \delta v, \quad (11)$$

где $\delta v > 0$, δv достаточно мало, чтобы окрестности значений φ_1 и φ_3 не перекрывались. $\omega = v - \varphi_1$ и по определению $\omega^{**\theta} = |\omega|^\theta$, так что $d\omega^{**\theta}/d\omega = \theta\omega^{*\theta}$, это последнее выражение определено формулой (3). Легко убедиться в том, что выражение (8) тогда дает функцию плотности источников, удовлетворяющую всем ранее сформулированным требованиям, и к тому же в области $\varphi_1 - \delta v < v < \varphi_1 + \delta v$ функцию $f(v)$ можно представить в виде (9), (10). Все дальнейшие выкладки будем проводить для $W < 0$, что означает перемещение фронта в левую сторону (это не принципиально, случай $W > 0$ рассматривается аналогично). Для этого случая в силу равенства $dv/d\xi = p$ можно найти неявное решение $\xi(v)$ уравнения (7) с учетом (11):

$$\int_0^v \frac{d\hat{v}}{p(\hat{v})} = \xi - \xi_2, \quad (12)$$

причем из (12) следует, что $v \rightarrow \varphi_1 + 0$ при $\xi \rightarrow -\infty$, $v(\xi_2) = 0$, $v \rightarrow \varphi_3 - 0$ при $\xi \rightarrow +\infty$, так как интеграл (12) расходится в точках $\varphi_{1,3}$. Теперь рассмотрим окрестность значения $v = \varphi_3$. Из (8) следует, что при задании $f(v)$ в виде (7) выполнены условия $f(v) > 0$ при $\varphi_1 < v < \varphi_2$ и $f(v) < 0$ при $\varphi_2 < v < \varphi_3$. Покажем, что найдется такое $\delta\varphi > 0$, что функция $f(v)$, найденная из (8), удовлетворяет также условиям

$$\begin{cases} f(u) > 0 & \text{при } \varphi_3 < u < \varphi_3 + \delta\varphi_3, \\ f(u) < 0 & \text{при } \varphi_3 - \delta\varphi_3 < u < \varphi_3. \end{cases} \quad (13)$$

В самом деле, в некоторой окрестности φ_3 верно равенство $p(v) = C_3(v)(\varphi_3 - v)^{**\theta_3}$, где $C_3(v) > 0$. Переобозначим $v - \varphi_3 = w$, тогда $f(w) = C_3 w^{*\theta_3} (-W + \kappa C_3 \theta_3 w^{**(\theta_3-1)})$. Так как всегда фронт КС задается возрастающей функцией и $W < 0$, то при $|w| < (-W/\kappa C_3 \theta_3)^{1/(\theta_3-1)}$ верно (13). Мы задали $p(v)$ в окрестностях значений φ_1 и φ_3 . Теперь определим $p(v)$ на промежутке $\varphi_1 + \delta v < v < \varphi_3 - \delta v$ как любую гладкую функцию, такую, что $p(v) > 0$, $p(v)$ возрастает на $\varphi_1 + \delta v < v < v^*$, убывает на $v^* < v < \varphi_3 - \delta v$, причем v^* – некоторое число, $\varphi_1 + \delta v < v^* < \varphi_3 - \delta v$. Пусть $p(v) > 0$, $dp/dv < 0$ на $-\infty < v < \varphi_1 - \delta v$, $p(v) \rightarrow +\infty$ при $v \rightarrow -\infty$, $p(v) > 0$, $dp/dv > 0$ на $\varphi_3 + \delta v < v < +\infty$, $p(v) \rightarrow +\infty$ при $v \rightarrow +\infty$. Тогда выполнены все требуемые условия, функция f имеет вид (9), верно (10), где $f_0 > 0$, на интервале (φ_1, φ_3) имеется еще ровно один корень φ_2 кратности 1. Вместе с тем, условия на

$p(v)$ достаточно слабые для того, чтобы можно было строить разнообразные модели $f(v)$ с указанными ранее свойствами.

Обобщение данной методики на случай неоднородной среды также возможно.

3. Численное моделирование

Для наглядного представления рассматриваемой модели рассмотрим задачу (4) для плотности источников (2) при показателе кратности корня $\theta_{1,3} = 3$. На рис. 1 показан пример функции $f(u)$, обладающей нужными нам свойствами, полученной из (2).

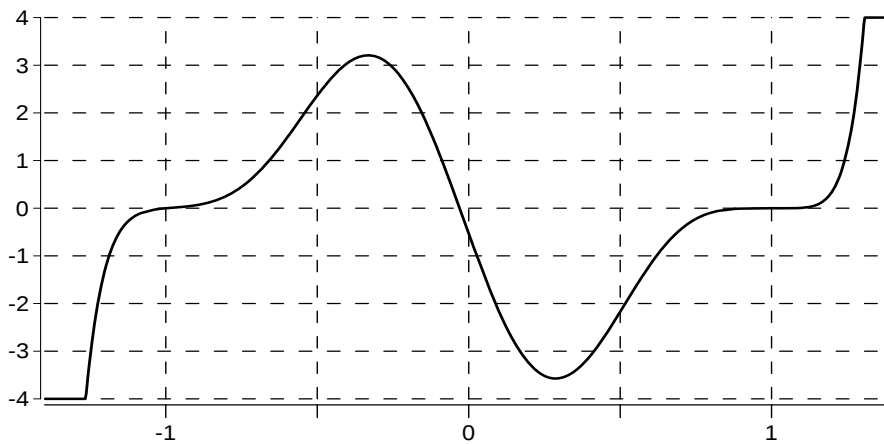


Рис. 1. Функция плотности источников $f(u)$ с вырожденными корнями для $\theta_1 = 3$, $\theta_3 = 3$

Fig. 1. The source density function $f(u)$ with the degenerate roots for $\theta_1 = 3$, $\theta_3 = 3$

Семейство графиков $u(x, t_m)$ профиля ВПС в однородной среде для последовательности значений $t_m = m\tau$ при $\theta_1 = \theta_3 = 3$ показано на рис. 2, движение фронта справа налево. Результаты получены применением итерационного метода решения симметрической разностной схемы для задачи (4) на равномерной сетке. Мы не будем вдаваться в детальное пояснение процесса численного решения, укажем только, что все последующие выводы сделаны при гарантированной точности результатов, которая оценена как аналитическими оценками скорости сходимости, так и практической проверкой сходимости путем сравнения результатов, полученных на семействе сгущающихся сеток. Рис. 2 при тщательном изучении показывает, что передняя и задняя части ВПС (движущегося справа налево) стремятся к своим предельным значениям соответственно φ_1 и φ_3 по различным законам.

На рис. 3 показан график функции $u(x, t^*)$ для передней части ВПС для фиксированного значения t^* в полулогарифмическом масштабе, по вертикальной оси отложено значение $F(x) = \ln(u(x, t^*) - \varphi_1)$, по горизонтальной оси x . График показывает, что зависимость $F(x)$ линейная и позволяет найти показательную функцию

$$u(x, t^*) = \varphi_1 + C_1 e^{q_1(x-x_1)}(1 + \zeta_1(x)), \quad (14)$$

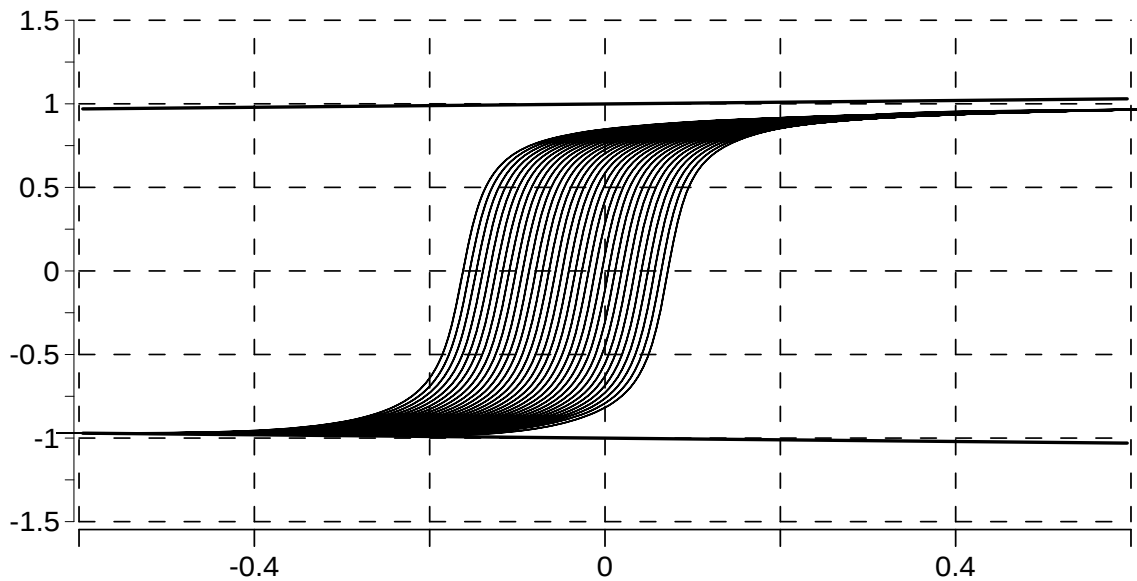


Рис. 2. Последовательность графиков $u(x, t_m)$, профиля ВПС в однородной среде для последовательности значений $t_m = m\tau$ при $\theta_1 = \theta_3 = 3$

Fig. 2. The sequence of the Internal Transitional Layer $u(x, t_m)$ plots in the homogeneous media for the time sequence $t_m = m\tau$ in case of $\theta_1 = \theta_3 = 3$

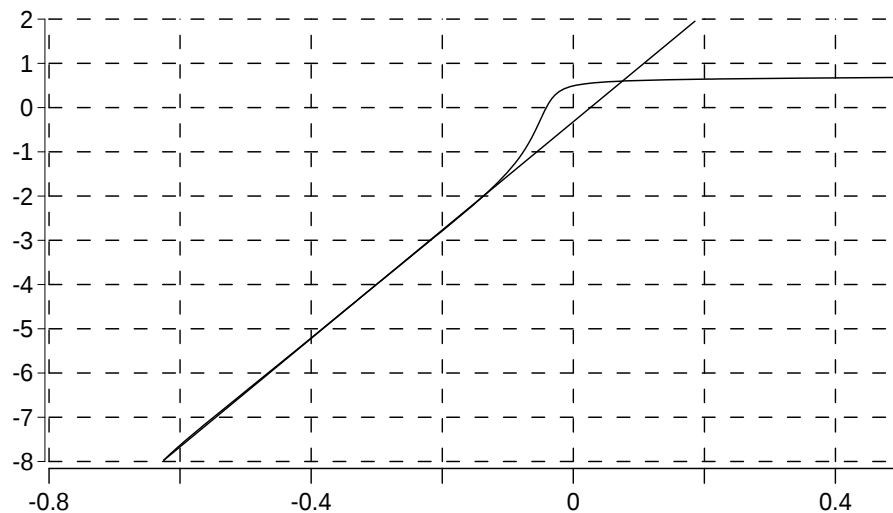


Рис. 3. График $F(x) = \ln(u(x, t^*) - \varphi_1(x))$, полученный в результате компьютерного моделирования и линейная функция, коэффициенты которой найдены методом наименьших квадратов

Fig. 3. The plot of $F(x) = \ln(u(x, t^*) - \varphi_1(x))$ function calculated as a result of the computer modelling, and the linear function with the coefficients calculated with the Least Squares method

причем $q_1 > 0$, $u \rightarrow \varphi_1 + 0$, $\zeta_1 \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$. Значения констант в выражении (14) мы нашли методом наименьших квадратов (МНК) и найдем далее аналитически. Таким образом, мы ожидаем получить экспоненциальный профиль передней части ВПС.

На рис. 4 показан аналогичный график функции $u(x, t^*)$ для задней части фронта ВПС, но теперь в полном логарифмическом масштабе, по вертикальной оси отложено значение $G(x) = \ln(\varphi_3 - u(x, t^*))$, по горизонтальной оси – значение $s = \ln(x - x_3)$. Зависимость $G(s)$ также линейная и позволяет найти степенную функцию

$$u(x, t^*) = \varphi_3(x) - C_3(x - x_3)^{-\nu_3}(1 + \zeta_3(x)), \quad (15)$$

причем теперь $u \rightarrow \varphi_3 - 0$, $\zeta_3 \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$.

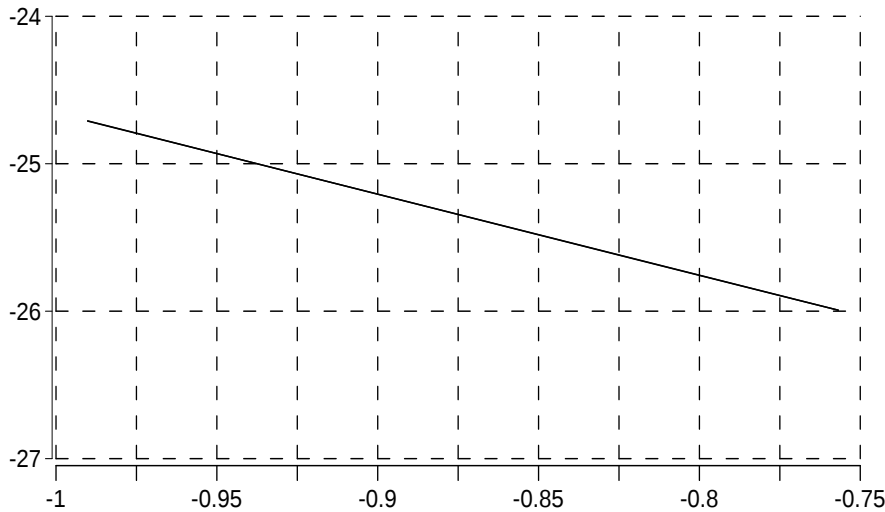


Рис. 4. График зависимости $G = \ln(\varphi_3(x) - u(x, t^*))$ от $s = \ln(x - x_3)$, полученный в результате компьютерного моделирования, и линейная функция, коэффициенты которой найдены методом наименьших квадратов

Fig. 4. The plot of $G = \ln(\varphi_3(x) - u(x, t^*))$ function via $s = \ln(x - x_3)$ argument, both calculated by the computer modelling, and the linear function with the coefficients calculated with the Least Squares method

Значения констант $C_3 > 0$, x_3 , $\nu_3 > 0$ для рис. 4 мы нашли также с помощью МНК и опять найдем далее аналитически. Таким образом, мы ожидаем получить степенной профиль задней части ВПС. Разумеется, результаты численного моделирования не доказывают корректности вывода об экспоненциальном и степенном характере передней и задней части ВПС, это утверждение мы теперь строго обоснуем методом дифференциальных неравенств.

4. Исследование фронта контрастной структуры

4.1. Исследование передней части фронта

Результаты компьютерного моделирования показывают, что поведение передней и задней частей фронта различаются. Начнем с передней части фронта. Мы используем метод разложения решения уравнения (4) в асимптотический ряд по степеням малого параметра ε для строгого обоснования отмеченных в численном моделировании особенностей поведения фронта КС. Рассмотрим сначала профиль ВПС в окрестности передней части фронта, примыкающей к уровню φ_1 в однородной среде. Пусть фронт дрейфует справа налево со скоростью $W < 0$, причем функция $u(x, t)$ при всех t есть возрастающая функция x . Пусть $u = \varphi_1 + w$, $w > 0$, и в некоторой окрестности значения $u = \varphi_1$ верно равенство

$$f(u) = C_1(u - \varphi_1)^{\star\theta_1}(1 + C'_1(u)), \quad (16)$$

$C'_1 \rightarrow 0$ при $u \rightarrow \varphi_1$. Мы не требуем равенства $f(u) = C_1(u - \varphi_1)^{\star\theta_1}$, это позволяет получить более общие результаты. Тогда для w получим задачу $-w_t + \kappa w_{xx} - f(\varphi_1 + w) = 0$, решение которой будем искать в виде бегущей квазиволны: $w(x, t) = w(x - Wt)$. Выполним процедуру понижения порядка: $w' = p > 0$, получим уравнение $\kappa p p_w = -Wp + Cw^{\star\theta_1}$. Используя метод дифференциальных неравенств, легко показать, что решение краевой задачи

$$\begin{cases} \kappa p p_w = -Wp + Cw^{\star\theta_1}, \\ \lim_{w \rightarrow +0} p(w) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

имеет вид $p = -\frac{W}{\kappa}w + wp_1(w)$, где $p_1(w)$ – гладкая функция, и $\lim_{w \rightarrow 0} p_1(w) = 0$. Поэтому для любого решения задачи

$$\begin{cases} Ww' + \kappa w'' - Cw^{\star\theta_1} = 0, \\ w \rightarrow +0 \text{ при } x \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (18)$$

(с одним граничным условием) существует

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} w(x) \cdot e^{(W/\kappa)x} = e^{(W/\kappa)x_1}$$

(это равенство является также определением x_1) и для любого $\delta > 0$ найдутся такие значения x'_1 и x''_1 , $x'_1 < x_1 < x''_1$, что решение задачи (17) при всех $w : |w| < \delta$ удовлетворяет неравенству

$$e^{-(W/\kappa)(x-x'_1)} < w < e^{-(W/\kappa)(x-x''_1)}, \quad (19)$$

причем $x'_1 \rightarrow x_1$ и $x''_1 \rightarrow x_1$ при $\delta \rightarrow +0$, напомним, что $W < 0$. Таким образом, передний фронт квазиволны имеет экспоненциальный характер.

4.2. Исследование задней части фронта

Рассмотрим теперь ВПС в окрестности задней части фронта, примыкающей к уровню φ_3 в однородной среде. Пусть в некоторой окрестности значения $u = \varphi_3$ верно

$$f(u) = C_3(u - \varphi_3)^{\star\theta_3}(1 + C'_3(u)), \quad (20)$$

$C'_3 \rightarrow 0$ при $u \rightarrow \varphi_3$. Выполнив замену $u = \varphi_3 - \tilde{w}$, $\tilde{p} = \tilde{w}'$, получим теперь краевую задачу

$$\begin{cases} \kappa \tilde{p} \tilde{w} = W \tilde{p} + C \tilde{w}^{\theta_3}, \\ \tilde{p}(+0) = +0, \end{cases} \quad (21)$$

решение которой (в отличие от задачи (17)) имеет вид $\tilde{p} = -\frac{C}{W} \tilde{w}^{\theta_3} + w \tilde{p}_1(\tilde{w})$, где $\tilde{p}_1(w)$ – гладкая функция и $\lim_{\tilde{w} \rightarrow 0} \tilde{p}_1 = 0$. Поэтому для любого решения задачи

$$\begin{cases} W \tilde{w}' + \kappa \tilde{w}'' - C \tilde{w}^{\theta_3} = 0, \\ \tilde{w} \rightarrow +0 \text{ при } x \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (22)$$

и для любого $\delta > 0$ найдутся x'_3 и x''_3 такие, что для всех x таких, что $|\tilde{w}(x)| < \delta$ верно

$$\tilde{w}_0(x - x'_3) < \tilde{w}(x) < \tilde{w}_0(x - x''_3), \quad (23)$$

где

$$\tilde{w}_0(s) = \left(\frac{-W}{C(\theta_3 - 1)} \right)^{1/(\theta_3 - 1)} s^{-1/(\theta_3 - 1)}, \quad (24)$$

$$u(x, t) = \varphi_3 - \tilde{w}(x - Wt), \quad (25)$$

напомним, что $W < 0$. Таким образом, задний фронт имеет степенной характер с показателем $1/(\theta_3 - 1)$. Заметим также, что из (24) следует $\tilde{w}_0(s) \rightarrow +0$ при $s \rightarrow +\infty$. Мы показали, что уравнение (4) имеет решение, которое в окрестности вырожденных корней ведет себя как бегущая квазиволна и стремится к равновесным значениям определенным образом. Найденные аналитические выражения для переднего и заднего фронта ВПС точно совпадают с результатами численного эксперимента, представленными соответственно на рис. 3 и рис. 4. Однако это еще не доказывает, что решение начально–краевой задачи с заданным начальным профилем имеет вид КС. Теперь мы докажем это, используя метод дифференциальных неравенств.

5. Построение формальной асимптотики

Построим формальную асимптотику решения задачи (4) в виде суммы регулярной функции $\bar{u}(x, x^*(t))$ и функции внутреннего переходного слоя (ВПС) $Q(\xi, x^*)$.

Построение в соответствии с методикой, разработанной в [9], начинается с обоснования существования такого значения W , при котором задача (6) имеет решение типа КС, примыкающее к равновесным значениям φ_1 и φ_3 при соответственно $\xi \rightarrow -\infty$ и $\xi \rightarrow +\infty$. В [9] это обоснование вытекает из свойств задачи (6), в том числе из предположения о том, что корни уравнения $f(v) = 0$ простые, поэтому мы в данной работе использовать это предположение не будем. Вместо этого мы предположим, что функция плотности источников f задана выражением (8), причем функция $p(v)$ задана выражением (11), а $v(x)$ задана неявно выражением (12). Тогда для $f(v)$ верно (9), и существует точное решение уравнения (7), которое имеет вид

$$u(x, t) = v_0\left(\frac{x - x_0^*(t)}{\varepsilon}, x_0^*(t)\right), \quad x_0^*(t) = x_{00}^* + W_0 t. \quad (26)$$

В приближении нулевого порядка регулярная функция разрывна, ее точка разрыва движется со скоростью дрейфа ВПС нулевого порядка W_0 :

$$\bar{u}_0(x, t) = \begin{cases} \varphi_3(x) & \text{при } x > x_0^*(t), \\ \varphi_1(x) & \text{при } x < x_0^*(t), \end{cases} \quad (27)$$

а полное приближение нулевого порядка является гладкой функцией и имеет вид

$$u_0(x, t) = \begin{cases} \varphi_3(x) + Q_0^{(+)}(\xi, t) & \text{при } x > x_0^*(t), \\ \varphi_1(x) + Q_0^{(-)}(\xi, t) & \text{при } x < x_0^*(t). \end{cases} \quad (28)$$

Здесь $\xi = \frac{x - x_0^*(t)}{\varepsilon}$ – растянутая переменная, в которой функция плотности источников задана выражением (8), причем функция $p(v)$ задана выражением (11), а $u(x, t)$ задана неявно выражением (12). Тогда для $f(v)$ верно (9), и существует точное решение уравнения (7), которое имеет вид (26), заданная величина x_{00}^* задает начальное положение фронта КС. Однако для физических приложений важно исследовать вопрос о том, является ли это решение устойчивым по отношению к небольшому изменению начальных условий. Для ответа на этот вопрос мы используем методику, разработанную в [9] и основанную на построении верхнего и нижнего решений эволюционного уравнения (4). Построим верхнее решение $\beta(x, t, \varepsilon)$ и нижнее решение $\alpha(x, t, \varepsilon)$. Введем оператор

$$L[u] = -\varepsilon u_t + \varepsilon^2 \kappa u_{xx} - f(u, \varepsilon), \quad (29)$$

действующий на дважды непрерывно дифференцируемые в области $\Pi = (a, b) \times (0, T)$, непрерывные в области $\bar{\Pi} = [a, b] \times [0, T]$ функции, удовлетворяющие граничным условиям задачи (4), и построим такие β , α , чтобы выполнялись условия

$$L[\alpha] > 0, \quad L[\beta] < 0, \quad \alpha < \beta \quad (30)$$

в Π . Будем искать α и β следующим образом:

$$\alpha(x, t) = v_0(\xi_\alpha, x^*(t)) - \varepsilon^\mu r, \quad \xi_\alpha = \frac{x - x_\alpha^*(t)}{\varepsilon}, \quad (31)$$

$$\beta(x, t) = v_0(\xi_\beta, x^*(t)) + \varepsilon^\mu r, \quad \xi_\beta = \frac{x - x_\beta^*(t)}{\varepsilon}, \quad (32)$$

где $x_\alpha^*(t) = x_0^*(t) + \varepsilon^\gamma q t$, $x_\beta^*(t) = x_0^*(t) - \varepsilon^\gamma q t$, $x_0^*(t) = x_{00}^* + W_0 t$ (это в однородной среде, в неоднородной координату точки перехода находим из интегрального уравнения $x_0^*(t) = x_{00}^* + \int_0^t W_0(x^*(\tau)) d\tau$). Покажем, что условия (30) выполняются. Проведем доказательство для верхнего решения, для нижнего решения доказательство аналогично. Подействуем оператором L на функцию β :

$$L[\beta] = W v_{\xi_\beta} - \varepsilon^\gamma q v_{\xi_\beta} + \kappa v_{\xi_\beta \xi_\beta} - f(v(\xi_\beta) + \varepsilon^\mu r). \quad (33)$$

Проанализируем получившееся выражение и докажем, что найдутся такие значения каждого из параметров μ, r, q, γ , при которых $L[\beta]$ будет строго меньше нуля.

Теорема 1. Для любых $\theta_1 > 1$, $\theta_3 > 1$ $\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \varepsilon < \varepsilon_0 \exists r > 0, \exists q > 0, \exists \mu > 0, \exists \gamma > 0 : L[\beta] < 0, L[\alpha] > 0$ и $\alpha < \beta$ в П.

Доказательство. Все параметры в выражении (33) мы считаем положительными: $q > 0, r > 0, \gamma > 0, \mu > 0$. Рассмотрим поведение $f_v(v)$. Разобьем область определения функции $f(v)$ на три области: $G_1 = \{\varphi_1 - \delta\varphi_1 \leq v \leq \varphi_1 + \delta\varphi_1\}$, $G_2 = \{\varphi_1 + \delta\varphi_1 \leq v \leq \varphi_3 - \delta\varphi_3\}$, $G_3 = \{\varphi_3 - \delta\varphi_3 \leq v \leq \varphi_3 + \delta\varphi_3\}$, используя условия (9), (10), неравенства (16), (20), и последовательно покажем, что $L[\beta] < 0$ на каждом из участков.

Из (33) найдем

$$L[\beta] = [Wv_\xi + \kappa v_{\xi\xi} - f(v(\xi))] - \varepsilon^\gamma q v_\xi + [f(v(\xi)) - f(v(\xi) + \varepsilon^\mu r)]. \quad (34)$$

Первые три слагаемых в силу (4) в сумме равны нулю. Обозначим $\varepsilon^\mu r = 2 \Delta v(\xi)$, тогда

$$L[\beta] = -\varepsilon^\gamma q v_\xi - [f(v(\xi) + 2 \Delta v(\xi)) - f(v(\xi))]. \quad (35)$$

Необходимо доказать, что $L[\beta] < 0$. Начнем с области G_1 . Очевидно, в области G_1 верно неравенство $-\varepsilon^\gamma q v_\xi \leq -\varepsilon^\gamma q D_1 \leq 0$, где $D_1 = \partial v / \partial \xi \geq 0$, производная берется в некоторой точке области G_1 . Найдем минимальное значение второго слагаемого (35) при заданном фиксированном значении $\Delta v(\xi)$ и всех возможных значениях $v \in G_1$. Из (20) следует, что наименьшее значение $f(v + 2 \Delta v) - f(v)$ достигается при $v = -\Delta v$, причем

$$\min(f(v + 2 \Delta v) - f(v)) \geq f(\varphi_1 + \Delta v) - f(\varphi_1 - \Delta v) \geq 2C_1 \varepsilon^{\mu\theta_1} r^{\theta_1}. \quad (36)$$

Тогда в области G_1 получим:

$$L[\beta] \leq -\varepsilon^\gamma q D_1 - 2C_1 \varepsilon^{\mu\theta_1} r^{\theta_1} < 0. \quad (37)$$

Аналогично можно построить оценку и в G_3 :

$$L[\beta] \leq -\varepsilon^\gamma q D_3 - 2C_3 \varepsilon^{2\mu\theta_3} r^{\theta_3} < 0, \quad (38)$$

где D_3 и C_3 – положительные константы.

Рассмотрим $L[\beta]$ в области G_2 . Представим выражение (35) внутри этой области в виде:

$$L[\beta] = -\varepsilon^\gamma q v_\xi - [f(v(\xi) + 2 \Delta v(\xi)) - f(v(\xi))] = -\varepsilon^\gamma q v_\xi - f_v(v^*) \varepsilon^\mu r, \quad (39)$$

где v^* – некоторое значение v из промежутка $v(\xi) < v^* < v(\xi) + 2 \Delta v(\xi)$. Заметим, что v_ξ вычисляется для некоторого значения ξ , принадлежащего области G_2 , поэтому найдется такое число $D_2 > 0$, что $v_\xi > D_2$ в области G_2 . При обосновании этого утверждения мы использовали монотонность функции $v(\xi)$ и условие отделенности области G_2 от корней $\varphi_{1,3}$ функции f . Запишем оценку первого слагаемого: $-\varepsilon^\gamma q v_\xi \leq -\varepsilon^\gamma q D_2$ и оценку второго: $|f_v(v^*) \varepsilon^\mu r| \leq M \varepsilon^\mu r$, где $M = \max(f_v) > 0$ вычисляется по всей области G_2 , $M > 0$. Из условий задачи следует, что это некоторое положительное число. Тогда мы можем получить требуемую оценку

$$L[\beta] \leq -\varepsilon^\gamma q D_2 + M \varepsilon^\mu r < 0, \quad (40)$$

полагая $\mu = \gamma$ и получаем ограничение на параметр сдвига q :

$$q > \frac{rM}{D}. \quad (41)$$

Мы построили верхнее решение β в виде (32) и показали, что при выполнении оценки (41) верно неравенство $L[\beta] < 0$, выражающее знакоопределенность оператора L на верхнем решении. По аналогии можно построить нижнее решение α в виде (31) и доказать, что для него выполняется условие $L[\alpha] > 0$. Упорядоченность верхнего и нижнего решений, т.е. третье условие (30), очевидна из построения α и β (31), (32). Существование упорядоченной пары верхнего и нижнего решений доказано. Таким образом, выполнены все условия теоремы, которая является модификацией соответствующей теоремы из [10]:

Теорема 2. Для задачи (4) существуют упорядоченные нижнее и верхнее решения $\alpha(x, t, \varepsilon)$ и $\beta(x, t, \varepsilon)$ соответственно. Если начальное условие заключено между ними, т.е. $\alpha(x, 0, \varepsilon) < u^0(x, \varepsilon) < \beta(x, 0, \varepsilon)$, то задача (4) имеет единственное классическое решение $u(x, t, \varepsilon)$, причем

$$\alpha(x, t, \varepsilon) \leq u(x, t, \varepsilon) \leq \beta(x, t, \varepsilon)$$

для всех $x \in [a, b]$ и $t \in [0, T)$.

6. Заключение

Мы показали, что задняя часть фронта внутреннего переходного слоя для уравнения реакции–диффузии со степенной зависимостью плотности источников от концентрации имеет степенной характер. Это приводит к тому, что затухание переходного процесса со временем имеет степенной характер вместо экспоненциального. Таким образом, след от прохождения переходного слоя остается заметным в течение значительно большего промежутка времени, чем для стандартной модели корня первой степени. Это может иметь практическое значение для анализа информационных систем, так как позволяет обнаружить завершившийся переходный процесс по его следам, которые проявляются в некотором (малом) отклонении концентрации от равновесного значения на протяжении длительного времени.

Список литературы / References

- [1] Бутузов В. Ф., “О периодических решениях сингулярно возмущенных параболических задач в случае кратных корней вырожденного уравнения”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **51**:1 (2011), 44–55; English transl.: Butuzov V. F., “On Periodic Solutions to Singularly Perturbed Parabolic Problems in the Case of Multiple Roots of the Degenerate Equation”, *Comp. Math. Math. Phys.*, **51**:1 (2011), 40–50.
- [2] Butuzov V. F. et al, “On a singularly perturbed initial value problem in the case of a double root of the degenerate equation”, *Nonlinear Anal. Theory, Meth. and Appl.*, **83** (2013), 1–11.
- [3] Бутузов В. Ф., “Об особенностях пограничного слоя в сингулярно возмущенных задачах с кратным корнем вырожденного уравнения”, *Мат. заметки*, **94**:1 (2013), 68–80; English transl.: Butuzov V. F., “On the Special Properties of the Boundary Layer in Singularly Perturbed Problems with Multiple Root of the Degenerate Equation”, *Math. Notes*, **94**:1 (2013), 60–70.

- [4] Альшин А. Б., Корпусов М. О., Юшков Е. В., “Бегущая волна как решение нелинейного уравнения в полупроводниках с сильной пространственной дисперсией”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **48**:5 (2008), 808–812; English transl.: Alshin A. B., et al., “The traveling wave as a solution of a nonlinear equation in semiconductors with strong spatial dispersion”, *Comp. Math. Math. Phys.*, **48**:5 (2008), 764–768.
- [5] Butuzov V. F., Nefedov N. N., Schneider K. R., “Singularly perturbed problems in case of exchange of stabilities”, *J. Math. Sci.*, **121**:1 (2004), 1973–2079.
- [6] Vasil’eva A., Nikitin A., Petrov A., “Stability of contrasting solutions of nonlinear hydromagnetic dynamo equations and magnetic fields reversals in galaxies”, *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, **78**:1–4 (1994), 261–279.
- [7] Bykov A. et al., “Anomalous Persistence of bisymmetric Magnetic Structures in Spiral Galaxies”, *MNRAS*, **292**:1 (1997), 1–10.
- [8] Moss D., Petrov A., Sokoloff D. et al., “The motion of magnetic fronts in spiral galaxies”, *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, **92**:1–2 (2000), 129–149.
- [9] Божевольнов Ю. В., Неведов Н. Н., “Движение фронта в параболической задаче реакция — диффузия”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **50**:2 (2010), 276–285; English transl.: Bozhevol’nov Yu. V., Nefedov N. N., “Front motion in the parabolic reaction-diffusion problem”, *Comp. Math. Math. Phys.*, **50**:2 (2010), 264–273.
- [10] Pao C. V., *Nonlinear parabolic and elliptic equations*, Plenum, New York, 1992.

Bykov A. A., Ermakova K. E., “Nonstationary Equations for the Reaction Layer with the Degenerate Equilibrium Points”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:3 (2017), 309–321.

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-3-309-321

Abstract. We consider a nonstationary process of spreading some substance in a one-dimensional spatially inhomogeneous system of cells. It is assumed that a change in the concentration of $u_n(t)$ in a cell with the number n with time t is determined by the difference in concentration in this cell and in its two neighbors on the left and on the right, as well as the source density, which depends on n and depends on $u_n(t)$. Such a model leads to the initial-boundary value problem for the differential-difference equation (differentiation with respect to t variable, the difference expression with respect to n). With a sufficiently small difference in concentration in each pair of neighboring cells we can replace the difference expression by the second partial derivative with respect to the spatial coordinate, and describe the propagation by the reaction-diffusion equation. This equation belongs to the class of quasilinear parabolic equations. It is assumed that the density of the sources vanishes (with changing the sign) at three values of the concentration, two of which, lower and upper, are stable. There is also an intermediate unstable state with zero source density, in which the sign reversal also takes place. The peculiarity of our model is that we assume, that two extreme roots of the source density function are degenerate (with an integer or fractional exponent). We intend to show analytically and by the computer simulation, that this model leads to the fact, that the rate of asymptotic aspiration of concentration to equilibrium values for a moving front becomes power-law instead of exponential, which takes place for standard models. In the paper, we have constructed a formal asymptotics solution of the initial-boundary value problem for the reaction-diffusion equation in a homogeneous medium with a power-law dependence of the source density on the temperature, an upper and lower solutions are constructed, a rigorous justification of the formal asymptotics is given. Precise solutions of the diffusion reaction equation are constructed for a wide class of source density functions.

Keywords: nonlinear differential equations, asymptotic methods, contrast structures, differential inequalities, combustion

On the authors: Aleksei A. Bykov, orcid.org/0000-0002-9399-7115, professor, Lomonosov Moscow State University, 1, bld. 2 Leninskiye Gory, Moscow 119991, Russia, e-mail: abkov@yandex.ru; Kristina E. Ermakova, graduate student, orcid.org/0000-0002-9279-3762, Lomonosov Moscow State University, e-mail: kristinaermakova19@rambler.ru

Acknowledgments:

This work was supported by RFBR, project 16-01-00690-a.