©Левашова Н. Т., Николаева О. А., 2016

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-3-339-352

УДК 517.929.8

Асимптотическое исследование решения уравнения теплопроводности вблизи границы раздела двух сред

Левашова H. T.¹, Николаева O. A.

получена 15 декабря 2016

Аннотация. Физические явления, возникающие вблизи границы раздела сред с различными характеристиками, требуют учета некоторых особенностей при их моделировании. Необходимо учитывать тот факт, что на границе раздела параметры окружающей среды претерпевают изменения. Например, экспериментально полученные графики распределения температуры среды вблизи границы раздела вода-воздух имеют излом на границе, поэтому при моделировании производная функции распределения температуры должна быть разрывной. Функция, обладающая такой особенностью, может являться решением задачи для уравнения теплопроводности с разрывным коэффициентом температуропроводности и разрывной функцией, описывающей источники тепла. Поскольку коэффициент температуропроводности в переходном слое вода-воздух является малым, в уравнении перед пространственной производной возникает малый параметр, что делает уравнение сингулярно возмущенным. Решение краевой задачи для такого уравнения может иметь вид контрастной структуры, то есть функции, в области определения которой содержится подобласть, где функция обладает большим градиентом. Такая подобласть называется внутренним переходным слоем. Из экспериментальных наблюдений известно, что в случае перепада температур между водой и воздухом (летний день) вблизи границы раздела возникает подобный переходный слой с резким изменением температуры. Существование решения задачи с внутренним переходным слоем нуждается в обосновании, которое можно провести при помощи асимптотического анализа. В настоящей работе было проведено подобное аналитическое исследование, и это позволило доказать существование решения, а также построить его асимптотическое приближение.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, асимптотические методы, малый параметр, разрывный коэффициент теплопроводности, разрывные источники

Для цитирования: Левашова Н. Т., Николаева О. А., "Асимптотическое исследование решения уравнения теплопроводности вблизи границы раздела двух сред", *Моделирование и анализ информационных систем*, **24**:3 (2017), 339–352.

Об авторах:

Левашова Наталия Тимуровна, orcid.org/0000-0002-1916-166X, канд. физ.-мат. наук, доцент, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991, Россия, e-mail: natasha@npanalytica.ru

Николаева Ольга Александровна, orcid.org/0000-0002-4638-1959, аспирант, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991, Россия, e-mail: o.a.nikolaewa@gmail.com

Благодарности:

 1 Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ, проект №16-01-00437.

Введение

Физические явления, возникающие вблизи границы раздела сред с различными характеристиками, требуют учета некоторых особенностей при их моделировании. Необходимо учитывать тот факт, что на границе раздела параметры окружающей среды претерпевают изменения. Например, экспериментально полученные графики распределения температуры среды вблизи границы раздела вода-воздух имеют излом на границе, поэтому при моделировании производная функции распреления температуры должа быть разрывной [1]. Функция, обладающая такой особенностью, может являться решением задачи для уравнения теплопроводности с разрывным коэффициентом температуропроводности и разрывной функцией, описывающей источники тепла. Задачу можно считать одномерной, рассматривая изменение температуры только вдоль оси, направленной перпендикулярно границе раздела сред, и стационарной, если рассматривать не очень продолжительные промежутки времени (в пределах часа). Коэффициент температуропроводности в переходном слое вода-воздух является малым [2], поэтому в уравнении перед пространственной производной возникает малый параметр, что делает уравнение сингулярно возмущенным. Решение краевой задачи для такого уравнения может иметь вид контрастной структуры, то есть функции, в области определения которой содержится подобласть, где функция обладает большим градиентом [3–6]. Такая подобласть называется внутренним переходным слоем. Из экспериментальных наблюдений известно, что в случае перепада температур между водой и воздухом (летний день) на границе раздела сред температура претерпевает резкое изменение. Тем самым для моделирования температуры на границе можно использовать краевую задачу для сингулярно возмущенного уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентом температуропроводности и функцией, описывающей источники. Существование решения с внутренним переходным слоем такой задачи нуждается в обосновании, которое можно провести при помощи асимптотического анализа [7,8]. В настоящей работе было проведено подобное аналитическое исследование, и это позволило доказать существование решения, а также построить его асимптотическое приближение.

1. Постановка задачи

Рассмотрим следующую краевую задачу

$$\varepsilon^2 \frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) = f(u, x, \varepsilon), \quad x \in (-1; 1), \quad \frac{du}{dx} (-1) = \frac{du}{dx} (1) = 0, \tag{1}$$

где $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$ – малый параметр. Будем считать, что выполняются следующие условия:

Условие 1. Пусть функция k(x) определена и строго положительна при $x \in [-1;1]$, а функция $f(u,x,\varepsilon)$ определена на множестве $u \in I_u \times [-1;1] \times (0;\varepsilon_0]$, где $I_u -$ допустимый интервал изменения u.

Пусть существует внутренняя точка x_0 отрезка [-1;1], достаточно удаленная от его краев, в которой функция k(x) может претерпевать разрыв первого

рода:

$$k(x) = \begin{cases} k^{(-)}(x), & -1 \le x \le x_0, \\ k^{(+)}(x), & x_0 \le x \le 1, \end{cases}$$

причем функции $k^{(\mp)}(x)$ являются достаточно гладкими на отрезках $[-1;x_0]$ и $[x_0;1]$ соответственно.

Пусть функция $f(u, x, \varepsilon)$ претерпевает разрыв первого рода вдоль отрезка прямой $\{u \in I_u, x = x_0, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]\}$:

$$f(u,x,\varepsilon) = \begin{cases} f^{(-)}(u,x,\varepsilon), & u \in I_u, \ -1 \le x \le x_0, \ \varepsilon \in (0,\varepsilon_0]; \\ f^{(+)}(u,x,\varepsilon), & u \in I_u, \ x_0 \le x \le 1, \ \varepsilon \in (0,\varepsilon_0], \end{cases}$$

$$f^{(-)}(u,x_0,\varepsilon) \neq f^{(+)}(u,x_0,\varepsilon),$$

причем функции $f^{(\mp)}(u, x, \varepsilon)$ являются достаточно гладкими на множествах $I_u \times [-1; x_0] \times (0; \varepsilon_0]$ и $I_u \times [x_0; 1] \times (0; \varepsilon_0]$ соответственно.

Определение 1. Будем называть решением задачи (1) функцию $u(x,\varepsilon) \in C([-1;1]) \cap C^2((-1;1) \setminus x_0)$, удовлетворяющую уравнению (1) при $x \in (-1;x_0) \cup (x_0;1)$, граничным условиям задачи (1), а также условию сопряжения

$$k^{(-)}(x_0)\frac{du}{dx}(x_0-0) = k^{(+)}(x_0)\frac{du}{dx}(x_0+0).$$

Условие 2. Пусть уравнение $f^{(-)}(u,x,0) = 0$ имеет на отрезке $[-1;x_0]$ изолированное решение $u = \varphi^{(-)}(x)$, а уравнение $f^{(+)}(u,x,0) = 0$ имеет на отрезке $[x_0;1]$ изолированное решение $u = \varphi^{(+)}(x)$, причем выполняется неравенство

$$\varphi^{(-)}(x_0) < \varphi^{(+)}(x_0).$$

Пусть при $-1 \le x \le x_0$ выполняется неравенство $f_u(\varphi^{(-)}, x, 0) > 0$, а при $x_0 \le x \le 1$ выполняется неравенство $f_u(\varphi^{(+)}, x, 0) > 0$.

Далее будем исследовать такое решение задачи (1), которое слева от точки x_0 близко к функции $\varphi^{(-)}(x)$, справа от точки x_0 близко к функции $\varphi^{(+)}(x)$ и резко изменяется от значений $\varphi^{(-)}(x)$ до значений $\varphi^{(+)}(x)$ в окрестности точки x_0 .

1.1. Присоединенные уравнения

Для детального описания поведения решения в окрестности точки x_0 введем растянутую переменную

$$\xi = \frac{x - x_0}{\varepsilon}.\tag{2}$$

Определим присоединенные уравнения для задачи (1) следующим образом:

$$k^{(-)}(x_0)\frac{d^2\tilde{u}}{d\xi^2} = f^{(-)}(\tilde{u}, x_0, 0), \ \xi < 0; \quad k^{(+)}(x_0)\frac{d^2\tilde{u}}{d\xi^2} = f^{(+)}(\tilde{u}, x_0, 0), \ \xi > 0.$$
 (3)

Каждое из присоединенных уравнений сведем к эквивалентной присоединенной системе:

$$\frac{d\tilde{u}}{d\xi} = \Phi; \quad \frac{d\Phi}{d\xi} = \left(k^{(\mp)}(x_0)\right)^{-1} f^{(\mp)}(\tilde{u}, x_0, 0). \tag{4}$$

При выполнении условия 2 каждая из точек $(\varphi^{(\mp)},0)$ является точкой покоя типа седла соответствующей присоединенной системы на фазовой плоскости (\tilde{u},Φ) . Разделим второе уравнение каждой из систем на первое и домножим обе части полученных равенств на Φ . В результате получим уравнения, определяющие фазовые траектории $\Phi(\tilde{u})$:

$$\Phi \frac{d\Phi}{d\tilde{u}} = (k^{(\mp)}(x_0))^{-1} f^{(\mp)}(\tilde{u}, x_0, 0).$$

Условие 3. Пусть при $\varphi^{(-)}(x_0) выполняется неравенство$

$$\int_{\varphi^{(-)}(x_0)}^{p} f^{(-)}(u, x_0, 0) du > 0,$$

 $a \ npu \ \varphi^{(-)}(x_0) \le p < \varphi^{(+)}(x_0) \ выполняется неравенство$

$$\int_{\varphi^{(+)}(x_0)}^{p} f^{(+)}(u, x_0, 0) du > 0.$$

При выполнении условия 3 на фазовой плоскости (\tilde{u}, Φ) существуют сепаратриса $\Phi^{(-)}(\tilde{u})$, выходящая из седла $(\varphi^{(-)}, 0)$ при $\xi \to -\infty$, и сепаратриса $\Phi^{(+)}(\tilde{u})$, входящая в седло $(\varphi^{(+)}, 0)$ при $\xi \to +\infty$, которые определяются равенствами

$$\Phi^{(\mp)}(\tilde{u}) = \sqrt{2(k^{(\mp)}(x_0))^{-1} \int_{\varphi^{(\mp)}(x_0)}^{\tilde{u}} f^{(\mp)}(u, x_0, 0) du}.$$
 (5)

Введем функцию

$$\begin{split} H(\tilde{u}) &:= k^{(-)}(x_0) \Phi^{(-)}(\tilde{u}) - k^{(+)}(x_0) \Phi^{(+)}(\tilde{u}) = \\ &= \sqrt{2k^{(-)}(x_0) \int\limits_{\varphi^{(-)}(x_0)}^{\tilde{u}} f^{(-)}(u, x_0, 0) du} - \sqrt{2k^{(+)}(x_0) \int\limits_{\varphi^{(+)}(x_0)}^{\tilde{u}} f^{(+)}(u, x_0, 0) du}. \end{split}$$

Условие 4. Пусть существует величина $p_0 \in \left(\varphi^{(-)}(x_0); \varphi^{(+)}(x_0)\right)$ – решение уравнения

$$k^{(-)}(x_0)\Phi^{(-)}(\tilde{u}) - k^{(+)}(x_0)\Phi^{(+)}(\tilde{u}) = 0.$$

Потребуем ещё выполнения следующего условия:

Условие 5.

$$\frac{dH}{d\tilde{u}}(p_0) = \frac{k^{(-)}(x_0)f^{(-)}(p_0, x_0, 0) - k^{(+)}(x_0)f^{(+)}(p_0, x_0, 0)}{k^{(-)}(x_0)\Phi^{(-)}} \neq 0.$$

2. Асимптотическое представление решения

Асимптотическое приближение решения задачи (1) будем строить отдельно слева и справа от точки x_0 :

$$U(x,\varepsilon) = \begin{cases} U^{(-)}(x,\varepsilon), & x \in [-1;x_0], \\ U^{(+)}(x,\varepsilon), & x \in [x_0;1]. \end{cases}$$

Функции $U^{(-)}(x,\varepsilon)$ и $U^{(+)}(x,\varepsilon)$ будем сшивать в точке x_0 , считая, что выполнены равенства

$$U^{(-)}(x_0,\varepsilon) = U^{(+)}(x_0,\varepsilon) = p(\varepsilon),$$

где величина $p(\varepsilon)$ пока неизвестна. Выпишем отдельно задачи для функций $U^{(-)}(x,\varepsilon)$ и $U^{(+)}(x,\varepsilon)$:

$$\varepsilon^{2} \frac{d}{dx} \left(k^{(-)}(x) \frac{dU^{(-)}}{dx} \right) = f\left(U^{(-)}, x, \varepsilon \right), \quad x \in (-1; x_{0}),$$

$$\frac{dU^{(-)}}{dx} (-1, \varepsilon) = 0, \quad U^{(-)}(x_{0}, \varepsilon) = p(\varepsilon), \quad (6)$$

$$\varepsilon^{2} \frac{d}{dx} \left(k^{(+)}(x) \frac{dU^{(+)}}{dx} \right) = f\left(U^{(+)}, x, \varepsilon \right), \quad x \in (x_{0}; 1),$$

$$\frac{dU^{(+)}}{dx} (1, \varepsilon) = 0, \quad U^{(+)}(x_{0}, \varepsilon) = p(\varepsilon). \quad (7)$$

Каждую из функций $U^{(\mp)}(x,\varepsilon)$ будем искать в виде суммы трех слагаемых:

$$U^{(\mp)}(x,\varepsilon) = \bar{u}^{(\mp)}(x,\varepsilon) + Q^{(\mp)}(\xi,\varepsilon) + R^{(\mp)}(\eta^{(\mp)},\varepsilon), \qquad (8)$$

здесь $\bar{u}^{(\mp)}(x,\varepsilon)$ – регулярная часть разложения, функции $Q^{(\mp)}(\xi,\varepsilon)$ описывают поведение решения в окрестности точки x_0 , переменная ξ определяется выражением (2), а функции $R^{(\mp)}\left(\eta^{(\mp)},\varepsilon\right)$ описывают поведение решения в окрестностях граничных точек отрезка [-1;1], $\eta^{(\mp)}=\frac{x\pm 1}{\varepsilon}$ – растянутые переменные вблизи каждой из точек $x=\mp 1$.

Каждую из функций (8), а также величину $p(\varepsilon)$ будем искать в виде разложения по степеням малого параметра ε :

$$\bar{u}^{(\mp)}(x,\varepsilon) = \bar{u}_0^{(\mp)}(x) + \varepsilon \bar{u}_1^{(\mp)}(x) + \dots; \tag{9}$$

$$Q^{(\mp)}(\xi,\varepsilon) = Q_0^{(\mp)}(\xi) + \varepsilon Q_1^{(\mp)}(\xi) + \dots;$$
 (10)

$$R^{(\mp)}\left(\eta^{(\mp)},\varepsilon\right) = R_0^{(\mp)}(\eta^{(\mp)}) + \varepsilon R_1^{(\mp)}\left(\eta^{(\mp)}\right) + \dots; \tag{11}$$

$$p(\varepsilon) = p_0 + \varepsilon p_1 + \dots \tag{12}$$

Неизвестные коэффициенты p_i будем определять из условия сшивания производных функций $U^{(-)}(x,\varepsilon)$ и $U^{(+)}(x,\varepsilon)$, которое следует из определения 1 с учетом разложений (9) – (12):

$$k^{(-)}(x_0) \left(\frac{d\bar{u}_0^{(-)}}{dx}(x_0) + \varepsilon \frac{d\bar{u}_1^{(-)}}{dx}(x_0) + \dots + \frac{1}{\varepsilon} \frac{dQ_0^{(-)}}{d\xi}(0) + \frac{dQ_1^{(-)}}{d\xi}(0) + \dots \right) =$$

$$= k^{(+)}(x_0) \left(\frac{d\bar{u}_0^{(+)}}{dx}(x_0) + \varepsilon \frac{d\bar{u}_1^{(+)}}{dx}(x_0) + \dots + \frac{1}{\varepsilon} \frac{dQ_0^{(+)}}{d\xi}(0) + \frac{dQ_1^{(+)}}{d\xi}(0) + \dots \right) . \quad (13)$$

Здесь учтено, что переходный слой находится на достаточном удалении от границ отрезка, а параметр ε достаточно мал, чтобы вклад в условия сшивания в точке x_0 пограничных функций был меньше любой степени ε .

2.1. Регулярная часть асимптотического представления

Уравнения для функций регулярной части получаются согласно стандартному алгоритму [9] из равенств

$$\varepsilon^2 \frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{d}{dx} \left(\bar{u}_0^{(\mp)} + \varepsilon \bar{u}_1^{(\mp)} + \dots \right) \right) = f^{(\mp)} \left(\bar{u}_0^{(\mp)} + \varepsilon \bar{u}_1^{(\mp)} + \dots, x, \varepsilon \right), \tag{14}$$

если разложить функции в правых частях по формуле Тейлора по степеням ε , а затем приравнять в обеих частях каждого равенства коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра.

Приравнивая нулю единственное слагаемое при ε^0 в каждом из равенств (14), получим уравнения

$$f^{(\mp)}(\bar{u}_0^{(\mp)}, x, 0) = 0. \tag{15}$$

Опираясь на условие 2, положим

$$\bar{u}_0^{(\mp)} = \varphi^{(\mp)}(x). \tag{16}$$

Далее для краткости будем использовать обозначение

$$\bar{f}^{(\mp)}(x) := f^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(x), x, 0)$$

и аналогичные обозначения для производных функции $f: \bar{f}_u^{(\mp)}(x), \ \bar{f}_x^{(\mp)}(x), \ \bar{f}_\varepsilon^{(\mp)}(x)$. На каждом следующем этапе из равенств (14) будем получать уравнения вида

$$\bar{f}_{u}^{(\mp)}(x)\bar{u}_{i}^{(\mp)}(x) = \bar{h}_{i}^{(\mp)}(x),$$

где $\bar{h}_i^{(\mp)}(x)$ — функции, известные на каждом шаге $i=1,2,\dots$ В частности, $\bar{h}_1^{(\mp)}(x)=-\bar{f}_\varepsilon^{(\mp)}(x).$

2.2. Функции переходного слоя

Уравнения для функций переходного слоя получаются, если приравнять коэффициенты при одинаковых степенях ε в правой и левой частях каждого из равенств

$$k^{(\mp)}(x_0 + \varepsilon \xi) \frac{d^2}{d\xi^2} \left(Q_0^{(\mp)} + \varepsilon Q_1^{(\mp)} + \dots \right) + \varepsilon \frac{dk^{(\mp)}}{dx} (x_0 + \varepsilon \xi) \frac{d}{d\xi} \left(Q_0^{(\mp)} + \varepsilon Q_1^{(\mp)} + \dots \right) =$$

$$= f^{(\mp)} \left(\bar{u}_0^{(\mp)}(x_0 + \varepsilon \xi) + \varepsilon \bar{u}_1^{(\mp)}(x_0 + \varepsilon \xi) + \dots Q_0^{(\mp)} + \varepsilon Q_1^{(\mp)} + \dots, x_0 + \varepsilon \xi, \varepsilon \right) -$$

$$- f^{(\mp)} \left(\bar{u}_0^{(\mp)}(x_0 + \varepsilon \xi) + \varepsilon \bar{u}_1^{(\mp)}(x_0 + \varepsilon \xi) + \dots, x_0 + \varepsilon \xi, \varepsilon \right). \quad (17)$$

Граничные условия для функций $Q_i^{(\mp)}(\xi),\ i=0,1,...$ при $\xi=0$ будем получать, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра в условии непрерывного сшивания функций $U^{(-)}(x,\varepsilon)$ и $U^{(+)}(x,\varepsilon)$ с учетом разложений (9), (10) и (12) :

$$\bar{u}_{0}^{(-)}(x_{0}) + \varepsilon \bar{u}_{1}^{(-)}(x_{0}) + \dots + Q_{0}^{(-)}(0) + \varepsilon Q_{1}^{(-)}(0) + \dots =
= \bar{u}_{0}^{(+)}(x_{0}) + \varepsilon \bar{u}_{1}^{(+)}(x_{0}) + \dots + Q_{0}^{(+)}(0) + \varepsilon Q_{1}^{(+)}(0) + \dots =
= p_{0} + \varepsilon p_{1} + \dots (18)$$

Кроме того, потребуем убывания функций переходного слоя на бесконечности:

$$Q_i^{(\mp)}(\mp\infty) = 0, \quad i = 0, 1, \dots$$
 (19)

2.2.1. Функции переходного слоя нулевого порядка

Из равенств (17), (18) и (19) в нулевом порядке с учетом равенств (15) и (16) получим следующие задачи для функций переходного слоя нулевого приближения:

$$k^{(\mp)}(x_0)\frac{d^2Q_0^{(\mp)}}{d\xi^2} = f^{(\mp)}\left(\varphi^{(\mp)}(x_0) + Q_0^{(\mp)}, x_0, 0\right);$$

$$Q_0^{(-)}(0) + \varphi^{(-)}(x_0) = Q_0^{(+)}(0) + \varphi^{(+)}(x_0) = p_0; \quad Q_0^{(\mp)}(\mp\infty) = 0. \quad (20)$$

Задачу для функции $Q_0^{(-)}(\xi)$ будем решать на полупрямой $\xi \leq 0$, а для функции $Q_0^{(+)}(\xi)$ — на полупрямой $\xi \geq 0$.

Введем обозначения

$$\tilde{u}(\xi) = \begin{cases} \varphi^{(-)}(x_0) + Q_0^{(-)}(\xi), & \xi \le 0; \\ \varphi^{(+)}(x_0) + Q_0^{(+)}(\xi), & \xi \ge 0. \end{cases} \begin{cases} \Phi^{(-)}(\xi) = \frac{d\tilde{u}}{d\xi}, & \xi \le 0; \\ \Phi^{(+)}(\xi) = \frac{d\tilde{u}}{d\xi}, & \xi \ge 0. \end{cases}$$
(21)

Перепишем задачи (20) с учетом введенных обозначений:

$$k^{(\mp)}(x_0)\frac{d^2\tilde{u}}{d\xi^2} = f^{(\mp)}(\tilde{u}, x_0, 0); \quad \tilde{u}(0) = p_0; \quad \tilde{u}(\mp\infty) = \varphi^{(\mp)}(x_0).$$

Уравнения, из которых определяется функция $\tilde{u}(\xi)$ на каждой из полупрямых $\xi \leq 0$ и $\xi \geq 0$ совпадают с присоединенными уравнениями (3). Согласно выводам пункта 1.1. существуют функции $\Phi^{(\mp)}(\xi) = \Phi^{(\mp)}(\tilde{u}(\xi))$ вида (5), а значит, существуют и решения задач

$$\frac{d\tilde{u}}{d\xi} = \sqrt{2(k^{(-)}(x_0))^{-1} \int_{\varphi^{(-)}(x_0)}^{\tilde{u}} f^{(-)}(u, x_0, 0) du, \ \xi \le 0, \quad \tilde{u}(0) = p_0}$$

И

$$\frac{d\tilde{u}}{d\xi} = \sqrt{2(k^{(+)}(x_0))^{-1} \int_{\varphi^{(+)}(x_0)}^{\tilde{u}} f^{(+)}(u, x_0, 0) du}, \ \xi \ge 0, \quad \tilde{u}(0) = p_0.$$

С использованием обозначений (21) условия сшивания производных (13) в порядке ε^{-1} принимают вид:

$$k^{(-)}(x_0)\Phi^{(-)}(0) = k^{(+)}(x_0)\Phi^{(+)}(0),$$

поэтому, если выбрать величину p_0 согласно условию 4, то $\tilde{u}(\xi)$ окажется непрерывной функцией, а условия сопряжения (13) выполненными в порядке ε^{-1} .

Можно доказать справедливость оценок

$$\left|\tilde{u}^{(\mp)}(\xi) - \varphi^{(\mp)}(x_0)\right| \le C e^{-\varkappa|\xi|},$$

где C и \varkappa – не зависящие от ε положительные константы, откуда с учетом равенств (21), связывающих функции $Q_0^{(\mp)}(\xi)$ и $\tilde{u}^{(\mp)}(\xi)$, получаем следующие оценки для функций $Q_0^{(\mp)}(\xi)$:

$$\left| Q_0^{(\mp)}(\xi) \right| \le C e^{-\varkappa |\xi|}. \tag{22}$$

2.2.2. Функции переходного слоя первого порядка

Для краткости введем обозначение

$$\tilde{f}^{(\mp)}(\xi) := f^{(\mp)} \left(\tilde{u}^{(\mp)}(\xi), x_0, 0 \right).$$
 (23)

Аналогичный смысл будут иметь обозначения $\tilde{f}_u^{(\mp)}(\xi), \ \tilde{f}_x^{(\mp)}(\xi), \ \tilde{f}_\varepsilon^{(\mp)}(\xi).$ Из равенств (17), (18) и (19) в порядке ε^1 получим следующие задачи для функций $Q_1^{(-)}(\xi)$ на полупрямой $\xi \leq 0$ и $Q_1^{(+)}(\xi)$ на полупрямой $\xi \geq 0$:

$$k^{(\mp)}(x_0)\frac{d^2Q_1^{(\mp)}}{d\xi^2} - \tilde{f}_u^{(\mp)}(\xi)Q_1^{(\mp)} = Q_1^{(\mp)}f(\xi);$$
$$Q_1^{(-)}(0) + \bar{u}_1^{(-)}(x_0) = Q_1^{(+)}(0) + \bar{u}_1^{(+)}(x_0) = p_1; \quad Q_1^{(\mp)}(\mp\infty) = 0,$$

где

$$Q_1^{(\mp)} f(\xi) = \left(\bar{u}_1^{(\mp)}(x_0) + \xi \frac{d\varphi^{(\mp)}}{dx}(x_0) \right) \left(\tilde{f}_u^{(\mp)}(\xi) - \bar{f}_u^{(\mp)}(x_0) \right) + \xi \left(\tilde{f}_x^{(\mp)}(\xi) - \bar{f}_x^{(\mp)}(x_0) \right) + \left(\tilde{f}_\varepsilon^{(\mp)}(\xi) - \bar{f}_z^{(\mp)}(x_0) \right) - \frac{dk^{(\mp)}}{dx}(x_0) \left(\xi \frac{d^2 Q_0^{(\mp)}}{d\xi^2} + \frac{dQ_0^{(\mp)}}{d\xi} \right).$$

Функции $Q_1^{(\mp)}f(\xi)$ имеют экспоненциальные оценки вида (22). Решения этих задач можно выписать в явном виде:

$$Q_1^{(\mp)}(\xi) = \left(p_1 - \bar{u}_1^{(\mp)}(x_0)\right) \frac{\Phi^{(\mp)}(\xi)}{\Phi^{(\mp)}(0)} + \frac{\Phi^{(\mp)}(\xi)}{k^{(\mp)}(x_0)} \int_0^{\xi} \frac{d\xi'}{\left(\Phi^{(\mp)}(\xi')\right)^2} \int_{\pm\infty}^{\xi'} \Phi^{(\mp)}(\sigma) Q_1^{(\mp)} f(\sigma) d\sigma.$$

Поскольку $Q_1^{(\mp)}f(\xi)$ имеют оценки типа (22), то и $Q_1^{(\mp)}(\xi)$ имеют аналогичные оценки. Вычислим производные функций $Q_1^{(\mp)}(\xi)$ при $\xi=0$:

$$\frac{dQ_1^{(\mp)}}{d\xi}(0) = \left(p_1 - \bar{u}_1^{(\mp)}(x_0)\right) \frac{\tilde{f}^{(\mp)}(0)}{k^{(\mp)}(x_0)\Phi^{(\mp)}(0)} + \frac{1}{\Phi^{(\mp)}(0)k^{(\mp)}(x_0)} \int_{\pm\infty}^{0} \Phi^{(\mp)}(\xi)Q_1^{(\mp)}f(\xi)d\xi.$$
(24)

Здесь мы использовали равенства для производных $\frac{d\Phi^{(\mp)}}{d\xi}$ из системы (4) и учли обозначение (23).

Запишем условие сшивания производных, которое следует из равенства (13) в порядке ε^0 :

$$k^{(-)}(x_0) \left(\frac{d\varphi^{(-)}}{dx}(x_0) + \frac{dQ_1^{(-)}}{d\xi}(0) \right) = k^{(+)}(x_0) \left(\frac{d\varphi^{(+)}}{dx}(x_0) + \frac{dQ_1^{(+)}}{d\xi}(0) \right).$$

Подставляя сюда выражение для производных функций $Q_1^{(\mp)}(\xi)$ и учитывая выражение для производной $dH/d\tilde{u}$ из условия 5, а также равенство из условия 4, получим уравнение для коэффициента p_1 разложения (12):

$$\frac{dH}{d\tilde{u}}(p_0) \cdot p_1 = G_1,$$

где

$$G_{1} = k^{(+)}(x_{0}) \frac{d\varphi^{(+)}}{dx}(x_{0}) - k^{(-)}(x_{0}) \frac{d\varphi^{(-)}}{dx}(x_{0}) + \bar{u}_{1}^{(-)}(x_{0}) \frac{\tilde{f}^{(-)}(0)}{\Phi^{(-)}(0)} - \bar{u}_{1}^{(+)}(x_{0}) \frac{\tilde{f}^{(+)}(0)}{\Phi^{(+)}(0)} + \frac{1}{\Phi^{(+)}(0)} \int_{+\infty}^{0} \Phi^{(+)}(\xi) Q_{1}^{(+)} f(\xi) d\xi - \frac{1}{\Phi^{(-)}(0)} \int_{-\infty}^{0} \Phi^{(-)}(\xi) Q_{1}^{(-)} f(\xi) d\xi.$$

Это уравнение разрешимо в силу неравенства из условия 5.

2.2.3. Функции переходного слоя старших порядков

Функции переходного слоя порядков i = 2, 3... определяются из задач

$$k^{(\mp)}(x_0)\frac{d^2Q_i^{(\mp)}}{d\xi^2} - \tilde{f}_u^{(\mp)}(\xi)Q_i^{(\mp)} = Q_i^{(\mp)}f(\xi);$$

$$Q_i^{(-)}(0) + \bar{u}_i^{(-)}(x_0) = Q_i^{(+)}(0) + \bar{u}_i^{(+)}(x_0) = p_i; \quad Q_i^{(\mp)}(\mp\infty) = 0,$$

где правые части уравнений – функции $Q_i^{(\mp)}f(\xi)$ – известны.

Задачи для функций с верхним индексом «(-)» решаются на полупрямой $\xi \leq 0$, а для функций с верхним индексом «(+)» – на полупрямой $\xi \geq 0$.

Решения этих задач можно выписать в явном виде:

$$Q_i^{(\mp)}(\xi) = \left(p_i - \bar{u}_i^{(\mp)}(x_0)\right) \frac{\Phi^{(\mp)}(\xi)}{\Phi^{(\mp)}(0)} + \frac{\Phi^{(\mp)}(\xi)}{k^{(\mp)}(x_0)} \int_0^{\xi} \frac{d\xi'}{\left(\Phi^{(\mp)}(\xi')\right)^2} \int_{\pm\infty}^{\xi'} \Phi^{(\mp)}(\sigma) Q_i^{(\mp)} f(\sigma) d\sigma.$$

Для функций $Q_i^{(\mp)}(\xi)$ имеют место экспоненциальные оценки вида (22). Коэффициенты p_i разложения (12) определяются из уравнений:

$$\frac{dH}{d\tilde{u}}(p_0) \cdot p_i = G_i,$$

где G_i – известные величины. Эти уравнения разрешимы в силу условия 5.

2.3. Пограничные функции

Функции $R^{(\mp)}\left(\eta^{(\mp)},\varepsilon\right)$ пограничного слоя в окрестностях точек x=-1 и x=1 соответственно строятся стандартным образом [9,10] в виде разложения (11) по степеням ε . Эти разложения не содержат членов нулевого порядка, что характерно для задачи Неймана. Функции $R_i^{(\mp)}\left(\eta^{(\mp)}\right),\ i=1,2,\ldots$ экспоненциально убывают, при $\eta^{(\mp)}\to \mp\infty$.

3. Основной результат

Теорема 1. При выполнении условий 1-5 краевая задача (1) имеет решение $u(x,\varepsilon)$ в смысле определения 1, для которого справедливо следующее асимптотическое представление:

$$u(x,\varepsilon) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i} \left(\bar{u}_{i}^{(-)}(x) + Q_{i}^{(-)}(\xi) + R_{i}^{(-)} \left(\eta^{(-)} \right) \right) + O\left(\varepsilon^{n+1}\right), & -1 \le x \le x_{0}, \\ \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i} \left(\bar{u}_{i}^{(+)}(x) + Q_{i}^{(+)}(\xi) + R_{i}^{(+)} \left(\eta^{(+)} \right) \right) + O\left(\varepsilon^{n+1}\right), & x_{0} \le x \le 1. \end{cases}$$

Доказательство.

Определим функции $\bar{u}_i^{(\mp)}(x)$ и $Q_i^{(\mp)}(\xi)$, а также коэффициенты p_i в разложениях (9)-(12) при всех i=0,1,...,n+1.

Составим суммы

$$U_n^{(\mp)}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \left(\bar{u}_i^{(\mp)}(x) + Q_i^{(\mp)}(\xi) + R_i^{(\mp)} \left(\eta^{(\mp)} \right) \right).$$

Согласно [9] существуют решения задач (6) и (7), для которых эти суммы являются асимптотическими представлениями, то есть верны равенства

$$U^{(\mp)}(x,\varepsilon) = U_n^{(\mp)}(x,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{n+1}\right). \tag{25}$$

Определим функцию

$$u(x,\varepsilon) = \begin{cases} U^{(-)}(x,\varepsilon) & -1 \le x \le x_0, \\ U^{(+)}(x,\varepsilon) & x_0 \le x \le 1. \end{cases}$$

Функция $u(x,\varepsilon)$ является непрерывной в силу условий при $x=x_0$ задач (6) и (7). Покажем, что можно подобрать значение $p(\varepsilon)$ таким образом, что условие сопряжения из определения 1 окажется выполненным, и тем самым функция $u(x,\varepsilon)$ будет решением задачи (1) по определению.

Представим величину $p(\varepsilon)$ в виде следующей суммы:

$$p(\varepsilon) = p_0 + \varepsilon p_1 + \dots + \varepsilon^{n+1} (p_{n+1} + \delta). \tag{26}$$

где δ – некоторая константа.

Проведем модификацию асимптотических представлений (25) функций $U^{(\mp)}(x,\varepsilon)$ в порядке ε^{n+1} :

$$U^{(\mp)}(x,\varepsilon) = U_n^{(\mp)}(x,\varepsilon) + \varepsilon^{n+1} \left(\bar{u}_{n+1}^{(\mp)}(x) + \tilde{Q}_{n+1}^{(\mp)}(\xi) \right) + O(\varepsilon^{n+2}),$$

где положим

$$\tilde{Q}_{n+1}^{(\mp)}(\xi) = \left(p_{n+1} + \delta - \bar{u}_{n+1}^{(\mp)}(x_0)\right) \frac{\Phi^{(\mp)}(\xi)}{\Phi^{(\mp)}(0)} + \frac{\Phi^{(\mp)}(\xi)}{k^{(\mp)}(x_0)} \int_{0}^{\xi} \frac{d\xi'}{\left(\Phi^{(\mp)}(\xi')\right)^2} \int_{\pm\infty}^{\xi'} \Phi^{(\mp)}(\sigma) Q_{n+1}^{(\mp)} f(\sigma) d\sigma.$$
(27)

Функции $Q_{n+1}^{(\mp)}f(\xi)$ являются известными (см. пункт 2.2.3.). Для производных функций $U^{(\mp)}(x,\varepsilon)$ получим следующие равенства:

$$\frac{dU^{(\mp)}}{dx}(x,\varepsilon) = \frac{dU_n^{(\mp)}}{dx}(x,\varepsilon) + \varepsilon^n \frac{d\tilde{Q}_{n+1}^{(\mp)}}{d\xi}(\xi) + O(\varepsilon^{n+1}). \tag{28}$$

Покажем, что при определенном выборе величины δ в разложении (26) будет выполняться условие

$$k^{(-)}(x_0)\frac{dU^{(-)}}{dx}(x_0) = k^{(+)}(x_0)\frac{dU^{(+)}}{dx}(x_0).$$
(29)

Пусть

$$I(\delta,\varepsilon) = k^{(-)}(x_0) \frac{dU^{(-)}}{dx}(x_0) - k^{(+)}(x_0) \frac{dU^{(+)}}{dx}(x_0).$$

Подставляя в эту разность выражения (28) для производных функций $U^{(\mp)}(x,\varepsilon)$, учитывая выполнение условия (13), а также явные выражения для производных функций $\tilde{Q}_{n+1}^{(\mp)}(\xi)$, которые можно получить из выражения (27) по аналогии с (24), получим следующее равенство:

$$I(\delta, \varepsilon) = \varepsilon^n \frac{dH}{d\tilde{u}}(p_0)\delta + O(\varepsilon^n).$$

В силу условия 5 выражение $\frac{dH}{d\tilde{u}}(p_0)$ отлично от нуля, поэтому найдется величина δ – решение уравнения $I(\delta,\varepsilon)=0$; тем самым будет выполнено равенство (29) Таким образом, функция $u(x,\varepsilon)$ по определению будет решением задачи (1).

4. Пример

В качестве примера рассмотрим модельную задачу о распределении температуры в приповерхностном слое вода-воздух:

$$\varepsilon^2 \frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) = f(u, x), \quad x \in (-1; 1), \quad \frac{du}{dx} (-1) = \frac{du}{dx} (1) = 0. \tag{30}$$

За границу раздела сред примем точку $x_0=0$, считая, что водная среда расположена при $x< x_0$, а воздух – при $x> x_0$. Функция $\varepsilon^2 k(x)$ играет роль коэффициента температуропроводности. Из экспериментальных данных известно, что эта функция претерпевает разрыв первого рода на границе раздела сред [1], поэтому положим

$$k(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1; 0], \\ 2, & x \in [0; 1]. \end{cases}$$
 (31)

Функция в правой части уравнения (30) играет роль стока тепла в воде и источника тепла в воздухе, ее можно представить в виде

$$f(u,x) = \begin{cases} u - U_w, & x \in [-1;0], \\ u - U_a, & x \in [0;1], \end{cases}$$
 (32)

где U_w и U_a — температура в воде и в воздухе соответственно. Эти величины будем считать постоянными.

Нетрудно проверить, что для поставленной задачи выполняются условия 1-3. Выпишем для рассматриваемого примера задачи (6) и (7) относительно функций $U^{(-)}$ и $U^{(+)}$:

$$\varepsilon^{2} \frac{d^{2} U^{(-)}}{dx^{2}} = U^{(-)} - U_{w}, \quad x \in (-1; 0), \quad U^{(-)}(0) = p, \quad \frac{dU^{(-)}}{dx}(-1) = 0;$$

$$2\varepsilon^{2} \frac{d^{2} U^{(+)}}{dx^{2}} = U^{(+)} - U_{a}, \quad x \in (0; 1), \quad U^{(+)}(0) = p, \quad \frac{dU^{(+)}}{dx}(1) = 0.$$

Каждую из этих задач можно решить точно:

$$U^{(-)} = U_w + (p - U_w) \exp\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad x \in [-1; 0];$$

$$U^{(+)} = U_a + (p - U_a) \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{2\varepsilon}}\right), \quad x \in [0; 1].$$

Подставив эти выражения для функций $U^{(\mp)}$ в условие сопряжения из определения 1, получим уравнение, из которого найдем величину p:

$$p = \frac{U_w + \sqrt{2}U_a}{1 + \sqrt{2}}.$$

Согласно определению 1 точным решением задачи (30) является функция

$$u(x,\varepsilon) = \begin{cases} U_w + \left(\frac{\sqrt{2}(U_a - U_w)}{1 + \sqrt{2}}\right) \exp\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), & x \in [-1;0], \\ U_a + \left(\frac{U_w - U_a}{1 + \sqrt{2}}\right) \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{2}\varepsilon}\right), & x \in [0;1]. \end{cases}$$
(33)

На рисунке представлен график решения задачи (30) при $U_w=295,\ U_a=300,\ \varepsilon=0,1.$

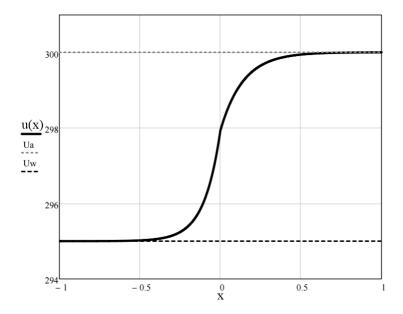


Рис. 1. График точного аналитического решения задачи (30) Fig. 1. The plot of the exact analytical solution of the problem (30)

Список литературы / References

- [1] Левашова Н. Т., Николаева О. А., Пашкин А. Д., "Моделирование распределения температуры на границе раздела вода-воздух с использованием теории контрастных структур", Сер. З. Физика. Астрономия, 2015, 12–16; English transl.: Levashova N. T., Nikolaeva O. A., Pashkin A. D., "Simulation of the temperature distribution at the water—air interface using the theory of contrast structures", Moscow University Physics Bulletin, 70:5 (2015), 341–345.
- [2] Иванов А.А., Введение в океанографию, Мир, М., 1978, 574 с.; [Ivanov A.A., Vvedenie v okeanografiju, Mir, Moskva, 1978, 574 pp., (in Russian).]
- [3] Васильева А.Б., "Контрастные структуры типа ступеньки для сингулярно возмущенного квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка", Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 35:4 (1995), 520–531; English transl.: Vasil'eva A.B., "Steplike contrasting structures for a singularly perturbed quasilinear second-order differential equation", Comput. Math. Math. Phys., 35:4 (1995), 411–419.
- [4] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н., "Сингулярно возмущенные задачи с пограничными и внутренними слоями", Дифференциальные уравнения и топология. І, Сборник статей. К 100-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина, Тр. МИАН, 268, 2010, 268–283; English transl.: Vasil'eva A. B., Butuzov V. F. Nefedov N. N., "Singularly perturbed problems with boundary and internal layers", Proc. Steklov Inst. Math., 268 (2010), 258–273.
- [5] Бутузов В. Ф., Левашова Н. Т., Мельникова А. А., "Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе уравнений с различными степенями малого параметра", Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 52:11 (2012), 1983–2003; English transl.: Butuzov V. F., Levashova N. T. Mel'nikova A. A., "Steplike contrast structure in a singularly perturbed system of equations with different powers of small parameter", Comput. Math. Math. Phys., 52:11 (2012), 1526–1546.
- [6] Левашова Н. Т., Нефедов Н. Н., Ягремцев А. В., "Контрастные структуры в уравнениях реакция—диффузия—адвекция в случае сбалансированной адвекции", Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 53:3 (2013), 365–376; English transl.: Levashova N. T., Nefedov N. N., Yagremtsev A. V., "Contrast structures in the reaction-diffusion-advection

- equations in the case of balanced advection", Comput. Math. Math. Phys., 53:3 (2013), 273–283.
- [7] Нефедов Н. Н., Ни М. К., "Внутренние слои в одномерном уравнении реакция—диффузия с разрывным реактивным членом", Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 55:12 (2015), 2042–2048; Nefedov N. N., Ni M., "Internal layers in the one-dimensional reaction—diffusion equation with a discontinuous reactive term", Comput. Math. Math. Phys., 55:12 (2015), 2001–2007.
- [8] Левашова Н. Т., Нефедов Н. Н., Орлов А. О., "Стационарное уравнение реакциидиффузии с разрывным реактивным членом", Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **57**:5 (2017), 854–866; English transl.: Levashova N. T., Nefedov N. N., Orlov A. O., "Time-independent reaction-diffusion equation with a discontinuous reactive term", Comput. Math. Math. Phys., **57**:5 (2017), 854–866.
- [9] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф, Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений, Высш. школа, М., 1990, 208 с.; [Vasil'eva A.B., Butuzov V.F, Asimptoticheskie metody v teorii singuljarnyh vozmushhenij, Vysshaja shkola, Moskva, 1990, 208 pp., (in Russian).]
- [10] Давыдова М. А., Левашова Н. Т., Захарова С. А., "Асимптотический анализ в задаче моделирования процесса переноса газовой примеси в приповерхностном слое атмосферы", *Модел. и анализ информ. систем*, **23**:3 (2016), 283–290; [Davydova M. A., Levashova N. T., Zakharova S. A., "The Asymptotical Analysis for the Problem of Modeling the Gas Admixture in the Surface Layer of the Atmosphere", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:3 (2016), 283–290, (in Russian)].

Levashova N. T., Nikolaeva O. A., "The Heat Equation Solution Near the Interface Between Two Media", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:3 (2017), 339–352.

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-3-339-352

Abstract. Physical phenomena that arise near the boundaries of media with different characteristics, for example, changes in temperature at the water-air interface, require the creation of models for their adequate description. Therefore, when setting model problems one should take into account the fact that the environment parameters undergo changes at the interface. In particular, experimentally obtained temperature curves at the water-air interface have a kink, that is, the derivative of the temperature distribution function suffers a discontinuity at the interface. A function with this feature can be a solution to the problem for the heat equation with a discontinuous thermal diffusivity and discontinuous function describing heat sources. The coefficient of thermal diffusivity in the water-air transition layer is small, so a small parameter appears in the equation prior to the spatial derivative, which makes the equation singularly perturbed. The solution of the boundary value problem for such an equation can have the form of a contrast structure, that is, a function whose domain contains a subdomain, where the function has a large gradient. This region is called an internal transition layer. The existence of a solution with the internal transition layer of such a problem requires justification that can be carried out with the use of an asymptotic analysis. In the present paper, such an analytic investigation was carried out, and this made it possible to prove the existence of a solution and also to construct its asymptotic approximation.

Keywords: heat conduction equation, asymptotic methods, small parameter, discontinuous heat conductivity coefficient, discontinuous sources

On the authors:

Natalia T. Levashova, orcid.org/0000-0002-1916-166X, PhD, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, 1, bld. 2 Leninskiye Gory, Moscow 119991, Russia, e-mail: natasha@npanalytica.ru

Olga A. Nikolaeva, orcid.org/0000-0002-4638-1959, graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, 1, bld. 2 Leninskiye Gory, Moscow 119991, Russia, e-mail: o.a.nikolaewa@gmail.com

Acknowledgments:

¹This work was supported by RFBR, project No 16-01-00437.