Моделирование и анализ информационных систем. Т. 24, № 3 (2017), с. 353–358
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 24, No 3 (2017), pp. 353–358

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-3-353-358

УДК 517.9

Замечание об области притяжения стационарного решения одного сингулярно возмущённого параболического уравнения

Терентьев М. А.[1]

получена 15 декабря 2016

Аннотация. В работе рассмотрена начально-краевая задача для одного сингулярно возмущённого параболического уравнения с не зависящей от малого параметра начальной функцией в случае, когда вырожденное стационарное уравнение имеет гладкие, возможно, пересекающиеся корни. Ранее было доказано существование устойчивого стационарного решения этой задачи и исследована его область притяжения — вследствие смены устойчивости стационарное решение асимптотически приближается к некоторому негладкому (но непрерывному) составному корню вырожденного уравнения при уменьшении параметра возмущения, а его области притяжения принадлежат все начальные функции, находящиеся строго по одну сторону от другого негладкого (но непрерывного) составного корня вырожденного уравнения. В работе показано, что если начальная функция выходит за границу указанного семейства начальных функций вблизи некоторой точки, то исходная задача не имеет решения внутри области определения переменных задачи, т.е. эта граница в действительности является границей области притяжения. Доказательство этого факта основано на идеях метода нелинейной ёмкости.

Ключевые слова: малый параметр, сингулярные возмущения, параболическое уравнение, стационарное решение, область притяжения, пересекающиеся корни, смена устойчивости, несуществование, разрушение, нелинейная ёмкость

Для цитирования: Терентьев М. А., "Замечание об области притяжения стационарного решения одного сингулярно возмущённого параболического уравнения", *Моделирование и анализ информационных систем*, **24**:3 (2017), 353–358.

Об авторах:
Терентьев Михаил Анатольевич, orcid.org/0000-0003-0006-4314, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.,
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
119991, Россия, ГСП–1, г. Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2, e-mail: m.terentyev@physics.msu.ru

Благодарности:
[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №15-01-04619.

Введение

В работе [1] рассматривалась следующая начально-краевая задача для сингулярно возмущённого параболического уравнения:

$$-u_t + \varepsilon^2 u_{xx} = f(u, x), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u_x(0, t, \varepsilon) = u_x(1, t, \varepsilon) = 0, \quad t > 0, \tag{2}$$

$$u(x,0,\varepsilon) = u_0(x), \quad 0 < x < 1, \tag{3}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, а функция $f(u,x)$ удовлетворяет следующему условию.

Условие 1. *Существуют функции* $\underline{u}(x)$ *и* $\overline{u}(x)$ *из класса* $C^2[0,1]$ *такие, что в области* $D = \{(u,x) : \underline{u}(x) \le u \le \overline{u}(x), 0 \le x \le 1\}$ *функция* $f(u,x)$ *имеет вид*

$$f(u,x) = h(u,x)[u - \varphi_1(x)][u - \varphi_2(x)], \tag{4}$$

где h, φ_1, φ_2 *— дважды непрерывно дифференцируемые функции,* $h(u,x) > 0$ *в* D *и существует* $x_0 \in (0,1)$ *такое, что*

$$\begin{gathered} \underline{u}(x) < \varphi_2(x) < \varphi_1(x) < \overline{u}(x), \quad 0 \le x < x_0, \\ \underline{u}(x_0) < \varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0) < \overline{u}(x_0), \\ \underline{u}(x) < \varphi_1(x) < \varphi_2(x) < \overline{u}(x), \quad x_0 < x \le 1. \end{gathered} \tag{5}$$

Соотношения (5) показывают, что корни $u = \varphi_1(x)$ и $u = \varphi_2(x)$ вырожденного уравнения $f(u,x) = 0$ пересекаются в точке x_0. В отношении пересечения корней введено

Условие 2. $\varphi_1'(x_0) < \varphi_2'(x_0)$.

Из корней $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ вырожденного уравнения можно образовать два составных непрерывных, но негладких в точке x_0 корня:

$$\check{u}(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & 0 \le x \le x_0, \\ \varphi_2(x), & x_0 \le x \le 1, \end{cases} \qquad \hat{u}(x) = \begin{cases} \varphi_2(x), & 0 \le x \le x_0, \\ \varphi_1(x), & x_0 \le x \le 1. \end{cases}$$

Из условия 1 следует, что

$$\begin{gathered} \check{u}(x) > \hat{u}(x), \quad x \ne x_0, \quad \check{u}(x_0) = \hat{u}(x_0), \\ f_u(\check{u}(x),x) > 0, \quad f_u(\hat{u}(x),x) < 0, \quad x \ne x_0, \\ f_u(\check{u}(x_0),x_0) = f_u(\hat{u}(x_0),x_0) = 0. \end{gathered}$$

Эти неравенства позволяют назвать корень $\check{u}(x)$ *устойчивым*, а корень и $\hat{u}(x)$ — *неустойчивым*.

Из результатов работы [2] следует, что уравнение (1) с краевыми условиями (2) имеет при достаточно малых ε стационарное решение $u_s(x,\varepsilon)$ такое, что $u_s(x_0,\varepsilon) \ge \check{u}(x_0)$ и $u_s(x,\varepsilon) \to \check{u}(x)$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно по $x \in [0,1]$, т.е. пределом стационарного решения $u_s(x,\varepsilon)$ является негладкий в точке x_0 корень вырожденного уравнения.

Из результатов работы [3] следует, что помимо стационарного решения $u_s(x,\varepsilon)$ уравнение (1) с краевыми условиями (2) имеет при достаточно малых ε ещё одно стационарное решение $\tilde{u}_s(x,\varepsilon)$ такое, что $\tilde{u}_s(x_0,\varepsilon) < \check{u}(x_0)$ и $\tilde{u}_s(x,\varepsilon) \to \check{u}(x)$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно по $x \in [0,1]$, т.е. пределом стационарного решения $\tilde{u}_s(x,\varepsilon)$ является тот же самый негладкий в точке x_0 корень вырожденного уравнения. Тем самым стационарное решение не единственно в асимптотически малой окрестности устойчивого корня вырожденного уравнения.

В работе [1] установлена асимптотическая устойчивость (по Ляпунову) стационарного решения $u_s(x,\varepsilon)$ при достаточно малых ε. Ниже будет показано, что стационарное решение $\tilde{u}_s(x,\varepsilon)$ является неустойчивым в специальном смысле.

Следующий рассмотренный в [1] вопрос касается области притяжения устойчивого стационарного решения $u_s(x,\varepsilon)$, т.е. множества начальных функций $u_0(x)$ таких, что решение $u(x,t,\varepsilon)$ уравнения (1) с краевыми условиями (2) и начальным условием (3) удовлетворяет предельному равенству

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t,\varepsilon) = u_s(x,\varepsilon). \tag{6}$$

Предполагается, что график функции $u = u_0(x)$ расположен в области определения D функции $f(u,x)$, а сама $u_0(x)$ является гладкой.

Условие 3. $\hat{u}(x) < u_0(x) < \overline{u}(x)$ *при* $0 \le x \le 1$.

В работе [1] доказана

Теорема 1. *Если выполнены условия 1 – 3, то для достаточно малых ε решение $u(x,t,\varepsilon)$ задачи (1) – (3) существует и удовлетворяет предельному равенству (6).*[1]

Таким образом, все начальные функции, удовлетворяющие условию 3, принадлежат области притяжения устойчивого стационарного решения $u_s(x,\varepsilon)$. Возникает естественный вопрос о принадлежности области притяжения функций, графики которых выходят за определённые условием 3 границы.

Границы области притяжения

Верхняя граница области притяжения стационарного решения $u_s(x,\varepsilon)$ уравнения (1) связана с областью определения D функции $f(u,x)$ и задаётся функцией $\overline{u}(x)$. Главный вопрос — является ли функция $\hat{u}(x)$ нижней границей области притяжения. Предположим, что вместо условия 3 выполнено противоположное ему

Условие 4. $\underline{u}(x_*) < u_0(x_*) < \hat{u}(x_*)$ *в некоторой точке* $x_* \in [0,1]$.

Ограничимся рассмотрением случая, когда h не зависит от u. Тогда справедлива

Теорема 2. *Если выполнены условия 1, 2 и 4, то для достаточно малых ε не существует решения $u(x,t,\varepsilon)$ задачи (1) – (3), график которого при всяком $t > 0$ лежит в области D из условия 1.*

Тем самым предельное равенство (6) в условиях теоремы 2 выполняться не может — отсюда следует, что $\hat{u}(x)$ является нижней границей области притяжения.

Доказательство теоремы о несуществовании решения основано на идеях метода нелинейной ёмкости, развитого в [4] для исследования отсутствия и разрушения глобальных решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных.

Не ограничивая общности, можно считать, что точка x_* отлична от 0, x_0 и 1, иначе по теореме о сохранении знака непрерывной функции найдётся другая точка, достаточно близкая к одному из этих значений, в которой условие 4 выполняется.

[1] В работе [1] эта теорема имеет номер 3.

Допустим теперь, что задача (1)-(3) имеет классическое решение $u(x,t,\varepsilon)$ такое, что $\underline{u}(x) \le u(x,t,\varepsilon) \le \overline{u}(x)$ при всех $t > 0$. Обозначим $a(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ и $b(x) = \varphi_1(x)\varphi_2(x)$. Тогда уравнение (1) преобразуется в тождество

$$-u_t + \varepsilon^2 u_{xx} = h(x)[u^2 - a(x)u + b(x)], \tag{7}$$

где $h(x) \ge c > 0$ при $0 \le x \le 1$ для некоторой константы c.

Положим $\chi(\xi) = \frac{315}{256}(1-\xi^2)^4$ при $|\xi| \le 1$ — это гладкая функция, причём $\chi(\xi) > 0$ при $|\xi| < 1$, $\chi(\pm 1) = \chi'(\pm 1) = 0$ и $\int_{-1}^{1} \chi \, d\xi = 1$. Положим ещё $\theta(\tau) = 1$ при $0 \le \tau \le \frac{1}{2}$ и $\theta(\tau) = (1 - (2\tau - 1)^2)^2$ при $\frac{1}{2} < \tau \le 1$ — это непрерывно дифференцируемая функция, причём $\theta(\tau) > 0$ при $0 \le \tau < 1$ и $\theta(1) = 0$.

Далее умножим обе части тождества (7) на функцию

$$\psi(x,t) = \delta^{-1}\chi\left(\frac{x - x_*}{\delta}\right)\theta\left(\frac{t}{T}\right)e^{-kh(x_*)t},$$

где δ, T и k — некоторые не зависящие от ε положительные параметры, которые мы подберём ниже, и проинтегрируем по $(x,t) \in [x_* - \delta, x_* + \delta] \times [0,T]$, взяв δ достаточно малым и перебросив производные с u на ψ интегрированием по частям:

$$\int\limits_{x_*-\delta}^{x_*+\delta} u_0 \psi|_{t=0} \, dx + \int\limits_0^T \int\limits_{x_*-\delta}^{x_*+\delta} u \left[\psi_t + \varepsilon^2 \psi_{xx} + ha\psi\right] dxdt = \int\limits_0^T \int\limits_{x_*-\delta}^{x_*+\delta} \left[u^2 + b\right] h\psi \, dxdt. \tag{8}$$

Оценим двойной интеграл в левой части (8) при помощи неравенства Юнга с параметром $\gamma > 0$:

$$\alpha\beta \le \frac{\gamma}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2\gamma}\beta^2,$$

положив $\alpha = u$, $\beta = \psi_t + \varepsilon^2\psi_{xx} + ha\psi$ и $\gamma = 2h\psi$. Имеем

$$\int\limits_0^T \int\limits_{x_*-\delta}^{x_*+\delta} u \left[\psi_t + \varepsilon^2 \psi_{xx} + ha\psi\right] dxdt \le \int\limits_0^T \int\limits_{x_*-\delta}^{x_*+\delta} u^2 h\psi \, dxdt + \int\limits_0^T \int\limits_{x_*-\delta}^{x_*+\delta} \frac{\left[\psi_t + \varepsilon^2 \psi_{xx} + ha\psi\right]^2}{4h\psi} dxdt,$$

откуда с учётом (8) получаем

$$\int\limits_{x_*-\delta}^{x_*+\delta} u_0 \psi|_{t=0} \, dx \ge \int\limits_0^T \int\limits_{x_*-\delta}^{x_*+\delta} hb\psi \, dxdt - \int\limits_0^T \int\limits_{x_*-\delta}^{x_*+\delta} \frac{\left[\psi_t + \varepsilon^2 \psi_{xx} + ha\psi\right]^2}{4h\psi} dxdt. \tag{9}$$

В силу вида функций χ и θ вычитаемый интеграл в правой части неравенства (9) конечен, а само неравенство имеет следующую асимптотику:

$$u_0(x_*) \ge \frac{4b(x_*) - [-k + a(x_*)]^2}{4k} + O(\delta) + O(e^{-kcT/2}) + O(\varepsilon^2\delta^{-2}).$$

Отношение в правой части полученного неравенства достигает максимального значения при $k = \sqrt{a^2(x_*) - 4b(x_*)}$, откуда после упрощения получаем

$$u_0(x_*) \ge \hat{u}(x_*) + O(\delta) + O(e^{-kcT/2}) + O(\varepsilon^2\delta^{-2}). \tag{10}$$

Из условия 4 следует, что $u_0(x_*) < \hat{u}(x_*) - c_*$, где $c_* = \frac{1}{2}(\hat{u}(x_*) - u_0(x_*)) > 0$. В то же время, наше допущение влечёт неравенство (10), из которого следует неравенство $u_0(x_*) \geq \hat{u}(x_*) - c_*$ при достаточно малом δ, достаточно большом T и всех достаточно малых ε. Полученное противоречие говорит о том, что задача (1) – (3) не имеет решения с указанным в теореме свойством. ■

Замечание 1. *Теорема 2 и её доказательство остаются в силе, если областью определения функции $f(u, x)$ является $D = \mathbb{R} \times [0, 1]$. В этом случае утверждение теоремы означает, что решение задачи (1) – (3) разрушается за некоторое конечное время (при этом локальное существование решения гарантируется регулярностью исходных данных задачи).*

Замечание 2. *В доказательстве теоремы 2 уравнение (1) исследуется по существу лишь в δ-окрестности точки x_*, т.е. полученный результат является локальным по x и не зависит от граничных условий (2).*

Замечание 3. *Из теорем 1 и 2 следует: или $u_0(x)$ принадлежит области притяжения устойчивого стационара $u_s(x, \varepsilon)$ и тогда для решения задачи (1) – (3) имеет место предельное равенство (6), или $u_0(x)$ выходит за нижнюю границу области притяжения и тогда график решения не может находиться при всяком $t > 0$ в области определения D функции $f(u, x)$. Это означает, что стационарное решение $\tilde{u}_s(x, \varepsilon)$ является неустойчивым по отношению к не зависящим от ε возмущениям, представленным начальной функцией $u_0(x)$.*

Заключение

Выше установлено, что найденные в [1] границы области притяжения стационарного решения уравнения (1) с краевыми условиями (2), вообще говоря, не могут быть расширены в классе не зависящих от ε начальных функций $u_0(x)$. Этот результат остаётся справедливым и в случае непересекающихся корней вырожденного уравнения. Однако остаётся открытым вопрос о том, как будет вести себя решение начально-краевой задачи в случае $u_0(x_1) = \hat{u}(x_1)$ для какой-нибудь точки $x_1 \in [0, 1]$, а также в случае зависящей от ε начальной функции (так, например, $u_0(x, \varepsilon) = \tilde{u}_s(x, \varepsilon)$ выходит за нижнюю границу области притяжения стационара $u_s(x, \varepsilon)$ в точке x_0, однако решение начально-краевой задачи $u(x, t, \varepsilon) = \tilde{u}_s(x, \varepsilon)$ ввиду стационарности не выходит из области D).

Список литературы / References

[1] Бутузов В. Ф., “Об устойчивости и области притяжения негладкого в пределе стационарного решения сингулярно возмущенного параболического уравнения”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **46**:3 (2006), 433–444; English transl.: Butuzov V. F., “On the stability and domain of attraction of asymptotically nonsmooth stationary solutions to a singularly perturbed parabolic equation”, *Comp. Math. Math. Phys.*, **46**:3 (2006), 413–424.

[2] Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н., “Сингулярно возмущенная краевая задача для уравнения второго порядка в случае смены устойчивости”, *Матем. заметки*, **63**:3 (1998), 354–362; [Butuzov V. F., Nefedov N. N., “A singularly perturbed boundary value problem for a second-order equation in the case of variation of stability”, *Math. Notes*, **63**:3 (1998), 311–318].

[3] Karali G., Sourdis C., "Radial and bifurcating non-radial solutions for a singular perturbation problem in the case of exchange of stabilities", *Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis*, **29**:2 (2012), 131–170.

[4] Митидиери Э., Похожаев С. И., "Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных", Тр. МИАН, **234**, Наука, М., 2001, 3–383; English transl.: Mitidieri E., Pokhozhaev S. I., "A priori estimates and blow-up of solutions to nonlinear partial differential equations and inequalities", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **234** (2001), 1–362.

Terentyev M. A., "A Note on the Domain of Attraction for the Stationary Solution to a Singularly Perturbed Parabolic Equation", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:3 (2017), 353–358.

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-3-353-358

Abstract. We consider a boundary-value problem for a singularly perturbed parabolic equation with an initial function independent of a perturbation parameter in the case where a degenerate stationary equation has smooth possibly intersecting roots. Before, the existence of a stable stationary solution to this problem was proved and the domain of attraction of this solution was investigated — due to exchange of stabilities, the stationary solution approaches the non-smooth (but continuous) composite root of the degenerate equation as the perturbation parameter gets smaller, and its domain of attraction contains all initial functions situated strictly on one side of the other non-smooth (but continuous) composite root of the degenerate equation. We show that if the initial function is out of the boundary of this family of initial functions near some point, the problem cannot have a solution inside the domain of the problem, i.e. this boundary is the true boundary of the attraction domain. The proof uses ideas of the nonlinear capacity method.

Keywords: small parameter, singular perturbation, parabolic equation, stationary solution, domain of attraction, intersecting roots, exchange of stabilities, nonexistence, blow-up, nonlinear capacity

On the authors:
Mikhail A. Terentyev, orcid.org/0000-0003-0006-4314, PhD, senior researcher
Lomonosov Moscow State University,
1, bld. 2 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation, e-mail: m.terentyev@physics.msu.ru

Acknowledgments:
[1]This work was supported by RFBR, project No. 15-01-04619.