Моделирование и анализ информационных систем. Т. 24, № 3 (2017), с. 359–364
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 24, No 3 (2017), pp. 359–364

©Ахременко Г. А., 2016

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-3-359-364

УДК 517.9

Исследование динамики класса одномерных кусочно-линейных отображений с одним разрывом

Ахременко Г. А.

получена 18 сентября 2016

Аннотация. В работе изучается динамика одного класса одномерных кусочно-линейных отображений с одним разрывом. Численными методами отыскиваются устойчивые состояния равновесия, а также иные аттракторы. В ходе исследования были разобраны два базовых случая, к которым сводятся все остальные. В пространстве параметров выделены области, отвечающие тем или иным фазовым перестройкам. В частности, было установлено, что для данного класса функций, при условии непрерывности на рассматриваемое отображение, не существует ни одного набора параметров такого, что при заданных ограничениях на функцию существовало хотя бы два аттрактора. В случае наличия разрыва имеется бесконечно много областей, в которых сосуществуют два притягивающих цикла, причем если в области существует два притягивающих цикла, то их периоды отличаются ровно на единицу, и не существует областей, где присутствовало бы три или более аттрактора. Кроме того, было выявлено, что при движении в пространстве параметров вдоль некоторой прямой наблюдаются устойчивые циклы всевозможных периодов, со следующей важной особенностью: каждая область содержит ровно один или ровно два притягивающих цикла, и область, содержащая k притягивающих циклов, соседствует с областями, содержащими $3-k$ притягивающих циклов, причем наборы значений периодов любых двух соседствующих областей имеют ненулевое пересечение.

Ключевые слова: отображение, кусочно-линейная функция, аттрактор

Для цитирования: Ахременко Г. А., "Исследование динамики класса одномерных кусочно-линейных отображений с одним разрывом", *Моделирование и анализ информационных систем*, **24**:3 (2017), 359–364.

Об авторах: Ахременко Григорий Андреевич, orcid.org/0000-0003-0319-9732, студент,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: 79806574742@ya.ru

В работе [1] (см. также [2]) построена общая теория непрерывных одномерных отображений. Установлен универсальный порядок (который называют подряком Шарковского) бифуркаций при изменении параметров отображений. Для приложений важным классом являются кусочно-линейные системы. Как оказалось, они имеют свои бифуркационные особенности.

В настоящей работе рассматривается вопрос о динамике простейших унимодальных кусочно-линейных разрывных отбражений $f : [0,1] \to [0,1]$:

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} f_1(x) = k_1 x + b_1, & x \in [0, b] \\ f_2(x) = k_2 x + b_2, & x \in (b, 1] \end{cases}, \tag{1}$$

где $k_1 < 0, k_2 > 0$, а коэффициенты b_1, b_2 выбираются таким образом, что $f_\varepsilon(x)$ содержит следующие две точки $(0, a), (1, c)$, разрыв происходит в $x = b$ и

$$\left| \lim_{x \mapsto b-0} f_1(x) - \lim_{x \mapsto b+0} f_2(x) \right| = \varepsilon \geqslant 0.$$

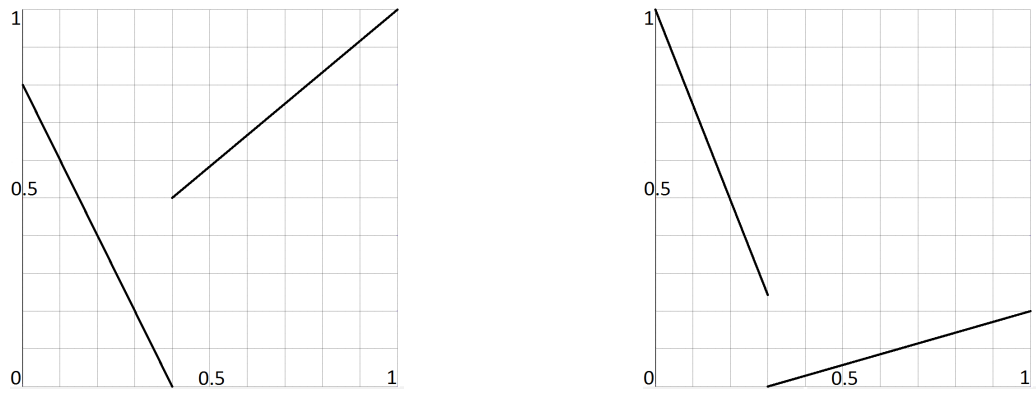
Параметр ε, определяет величину разрыва. Так как всегда можно провести нормировку параметров, можем считать, что существуют всего два случая (см. рис. 1):

1. Функция $f_\varepsilon(x)$ определяется следующим образом:

$$f_\varepsilon(0) = a,\ f_\varepsilon(1) = 1,\ \lim_{x \mapsto b-0} f_1(x) = 0,\ \lim_{x \mapsto b+0} f_2(x) = \varepsilon. \tag{2}$$

2. Функция $f_\varepsilon(x)$ такова, что:

$$f_\varepsilon(0) = 1,\ f_\varepsilon(1) = c,\ \lim_{x \mapsto b-0} f_1(x) = \varepsilon,\ \lim_{x \mapsto b+0} f_2(x) = 0. \tag{3}$$



a) пример функции в первом случае (example of function in the first case)

b) пример фунции во втором случае (example of function in the second case)

Рис. 1. Основные варианты графиков функции (1)

Fig. 1. Main function graphs (1) options

Рассмотрим линейное одномерное отображение:

$$x_{n+1} = f_\varepsilon(x_n), n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

которое задается начальным условием x_0. Численными методами исследуется динамика отображения (4). Выделены в пространстве параметров области, соответствующие различным динамическим режимам. Стоит отметить, что анализ непрерывных (при $\varepsilon = 0$) кусочно-линейных отображений приведен в работах [3] и [4]. Основной результат состоит в том, что были сформулированы некоторые условия на параметры функции, при которых наблюдаются устойчивые циклы всех натуральных периодов, разделенные областями хаотичности G:

$$2 \Rightarrow G \Rightarrow 3 \Rightarrow G \Rightarrow \cdots \Rightarrow G \Rightarrow k \Rightarrow G \Rightarrow k+1 \Rightarrow G \Rightarrow \ldots$$

В работе [5] была исследована динамика $f_\varepsilon(x)$, но с ограничениями $k_1 > 0$, $k_2 < 0$. Далее рассмотрим каждый из случаев по отдельности.

1. Случай первый (формула (2))

В этом пункте рассмотрим ситуацию, когда функция $f_\varepsilon(x)$ определяется формулами (2) (см. рис. 1а). Численными методами были проиллюстрированы следующие результаты:

1. Если $a = b$, то существует континуальное количество нейтральных циклов периода 2 для начальных условий $x_0 \in [0, b]$.

2. Если $a > b$, то существует единственное устойчивое состояние равновесия на интервале $(0, b)$.

3. Если $a < b$, то на отрезке $[0, b]$ нет устойчивых режимов.

4. Если $b = \varepsilon$, то любая точка на интервале $x_0 \in (b, 1]$ – нейтральное состояние равновесия.

5. Если $b > \varepsilon$, то на интервале $x_0 \in (b, 1]$ нет устойчивых аттракторов.

6. Если $b < \varepsilon$, то состояние равновесия $x = 1$ устойчиво и для любого начального условия $x_0 > b$ отображение "приходит" в него.

На рис. 2 изображено разбиение плоскости параметров отображения (4) при $\varepsilon = 0.4$ на области с одинаковым качественным поведением.

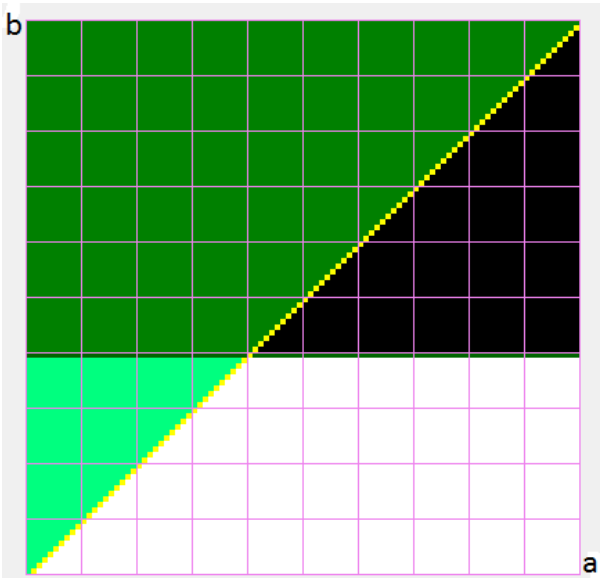


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма отображения (4) при $\varepsilon = 0.4$

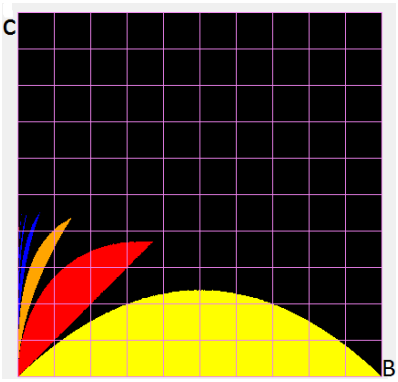
Fig. 2. The bifurcation chart display (4) in case of $\varepsilon = 0.4$

2. Случай второй (формула (3))

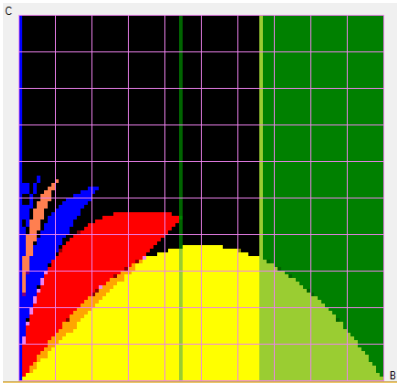
В этом пункте рассмотрим ситуацию, когда функция $f_\varepsilon(x)$ определяется формулами (3) (см. рис. 1b). В отличие от результатов, полученных в работе [4], где в зонах устойчивых циклов был обнаружен единственный аттрактор, у данного отображения существует бесконечно много областей устойчивости одновременно двух циклов, причем периоды этих циклов отличаются на 1. Как и в работе [5], в данном случае имеется следующая особенность динамики отображения (4): не существует областей, в которых сосуществуют три и более притягивающих цикла. Таким образом, наличие разрыва приводит к появлению следующей закономерности следования периодов:

$$2 \Rightarrow 2,3 \Rightarrow 3 \Rightarrow 3,4 \Rightarrow 4 \Rightarrow \cdots \Rightarrow n \Rightarrow n, n+1 \Rightarrow n+1 \Rightarrow \ldots.$$

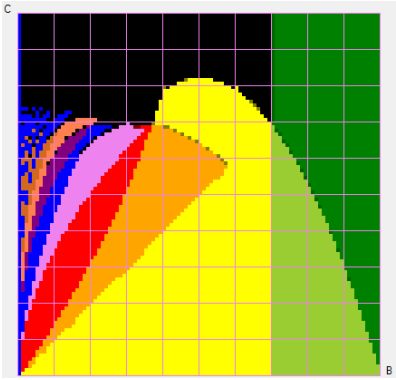
Некоторые примеры бифуркационных диаграмм представлены на рис. 3.



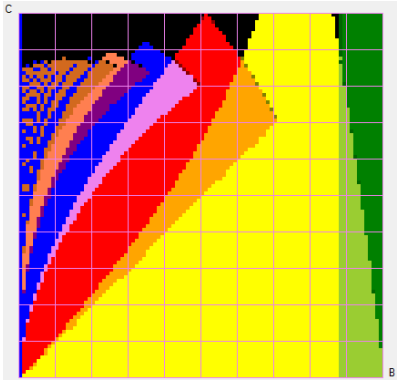
a) $\varepsilon = 0$



b) $\varepsilon = 0.34$



c) $\varepsilon = 0.7$



c) $\varepsilon = 0.88$

Рис. 3. Бифуркационные диаграммы отображения (4)

Fig. 3. Bifurcation charts of display (4)

Отметим, что исследование этого случая производилось только численными методами, однако по аналогии с работой [5] многие результаты этого пункта могут быть доказаны аналитически.

Некоторые выводы

Была исследована динамика одномерного линейного отображения простейшего класса кусочно-линейных функций с одним разрывом. В пространстве параметров выделены области, в которых экспериментально были обнаружены аттракторы различных типов. Были сформулированы условия существования и устойчивости соответствующих режимов. Проведен сравнительный анализ с другими работами в этой области. Учитывая, что рассматриваемый класс функций близок к функциям, рассмотренным в [5], результаты данного исследования дают в ряде случаев аналогичные выводы.

Описание использованных алгоритмов

Был разработан комплекс программ для изучения данного отображения, а именно две программы, описанные ниже.

Приложение 1. Требовалось определить, какому режиму будет соответствовать каждая четверка параметров, задающая какую-то функцию из вышеописанного класса. Перебирались всевозможные наборы параметров (b, c, x_0, ε) и (a, b, x_0, ε) для 1 и 2 случая соответственно. Запускалось отображение (4) и численно отыскивался его период. Первые 100 итераций отображения производились без какого-либо анализа получаемых данных, они необходимы, чтоб уйти от неустойчивых режимов и выйти на аттрактор. Далее считалось, что если $|x_i - x_{i+1}| < \delta$, то отображение вошло в режим «состояние равновесия», иначе сохраняем текущее x_k в структуре данных «map» (структура, предстваляющая собой бинарное дерево, с возможностью поиска по ключу и сохранением момента добавления элемента). Если на очередном шаге мы пытаемся добавить в map элемент, который уже там есть, значит, отображение вошло в режим «цикл». Период цикла можно определить по текущему моменту времени и моменту, когда данный элемент был впервые занесен в структуру данных. Шаг по параметрам a, b, c, x_0, ε составлял 10^{-2}, значение δ принято как 10^{-9}. Количество итераций, после которого, если не нашли цикла, считалось, что режим «хаотический», принято равным 10^4. На выходе программа возвращала текстовый документ, содержащий битовые маски для троек параметров $(a, b, \varepsilon), (b, c, \varepsilon)$ соответственно для каждого случая, i-й бит равен 1 в случае наличия режима цикл-i, иначе равен 0. Нулевой бит соответствовал режиму «хаос».

Приложение 2. Требовалось строить фазовую плоскость (x_n, x_{n+1}) для конкретных значений (a, b, c, ε). Данная программа получала на вход набор параметров, соответствующий конкретной функции данного класса, при нажатии мышкой по начальному условию x_0 выпускала траекторию отображения. В качестве функции перерисовки использовалась стандартная функция языка C# – timer. Также была разработана возможность очистки экрана после какого-то промежутка времени по нажатию на соответствующую клавишу.

Список литературы / References

[1] Шарковский А.Н., “Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя”, *Украинский математический журнал*, **16**:1 (1964), 61–71; [Sharkovskiy A.N., “Sosushchestvovanie tsiklov nepreryvnogo preobrazovaniya pryamoy v sebya.”, *Ukrainskiy matematicheskiy zhurnal*, **16**:1 (1964), 61–71, (in Russian).]

[2] Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю., *Разностные уравнения и их приложения.*, Наукова думка, Киев, 1981; [Sharkovskiy A.N., Maystrenko Yu.L., Romanenko E.Yu., *Raznostnye uravneniya i ikh prilozheniya*, Naukova dumka, Kiev, 1981, (in Russian).]

[3] Maistrenko Yu.L., Maistrenko V.L., Chua L.O., “Cycles of Chaotic Intervals in a Time-Delayed Chua’s Circuit”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **3**:6 (1993), 1557–1572.

[4] Ахременко Г.А., “Исследование динамики одномерного линейного отображения класса непрерывных кусочно-линейных функций”, *Современные проблемы математики и информатики*, **16** (2016), 4–9; [Akhremenko G.A., “Issledovanie dinamiki odnomernogo lineynogo otobrazheniya klassa nepreryvnykh kusochno-lineynykh funktsiy”, *Sovremennye problemy matematiki i informatiki*, **16** (2016), 4–9, (in Russian).]

[5] Кащенко Д.С., “Динамика простейших кусочно-линейных разрывных отображений.”, *Моделирование и анализ информационных систем.*, **19**:3 (2012), 73–81; [Kaschenko D. S., “Dynamics of the Simplest Piecewise Linear Discontinuous Mappings”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **19**:3 (2012), 73–81, (in Russian).]

Akhremenko G.A., "Study of the Dynamics of a Class of One-dimensional Piecewise Linear Displays with One Gap", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:3 (2017), 359–364.

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-3-359-364

Abstract. In the paper, the dynamics of a class of one-dimensional piecewise linear displays with one gap is studied. Stable conditions of equilibrium as well as other attractors are found by numerical methods. During the investigation two basic cases to which all remaining ones come down are considered. In the space of parameters, the areas responding to these or those phase reorganizations are selected. In particular, it was ascertained that for this class of functions, under condition of a continuity on the considered display, there is no set of parameters of it that in case of the given restrictions on the function there were at least two attractors. In case of the existence of a gap is there are infinitely many areas in which two attracting cycles coexist, and if in the area there are two attracting cycles, their periods differ exactly by a unit, and there are no areas where there would be three or more attractors. Besides, it was revealed that in case of three-dimensional motion of parameters along a straight line steady cycles of the various periods with the following important feature are watched: each area supports exactly one or exactly two attracting cycles, and the area containing k attracting cycles adjoin to the areas containing $3 - k$ attracting cycles, and sets of values of the periods of any two adjoining areas have a nonzero intersection.

Keywords: mapping, piecewise linear function, attractor

On the authors:
Grigorii Akhremenko, orcid.org/0000-0003-0319-9732, student,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: 79806574742@ya.ru