Модел. и анализ информ. систем. Т. **19**, № **5** (2012) 35–39
©*Глызин Д. С., Кащенко С. А.,* 2012

УДК 517.51+514.17

Динамика комплексного пространственно-распределенного уравнения Хатчинсона

Глызин Д. С., Кащенко С. А.[1]

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: glyzin@gmail.com, kasch@uniyar.ac.ru

получена 22 сентября 2012

Ключевые слова: асимптотические методы, распределенное уравнение Хатчинсона, метод шагов

Исследуется комплексный вариант уравнения Хатчинсона с запаздыванием в одномерной и двумерной пространственных областях. В то время как характерные режимы действительного распределенного уравнения Хатчинсона достаточно подробно изучены с помощью асимптотических и численных методов в работах М. Бестехорна, Е.В. Григорьевой, С.А. Кащенко, динамика комплексного уравнения требует отдельного исследования. В работе получены новые результаты о численно наблюдаемых пространственно-неоднородных решениях задачи с условиями непроницаемости и периодическими краевыми условиями.

1. Постановка задачи. Действительное уравнение Хатчинсона с диффузионным членом в одномерной и двумерной пространственных областях демонстрирует достаточно сложную динамику, см. [1], [2] и [3]. Как показано в [1], нормальной формой этого уравнения вблизи первой бифуркации служит комплексное кубическое уравнение Гинзбурга–Ландау.

Мы рассматриваем задачу

$$\frac{\partial U}{\partial t} = d\Delta U + [a - b|U(t-1)|^2]U, \quad U = U_1(t,x) + iU_2(t,x), \tag{1}$$

где $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$, $d = d_1 + id_2$, с периодическими краевыми условиями

$$U(t, x+1) \equiv U(t,x) \tag{2}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства РФ по постановлению № 220, договор № 11.G34.31.0053 и при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.B37.21.0457.

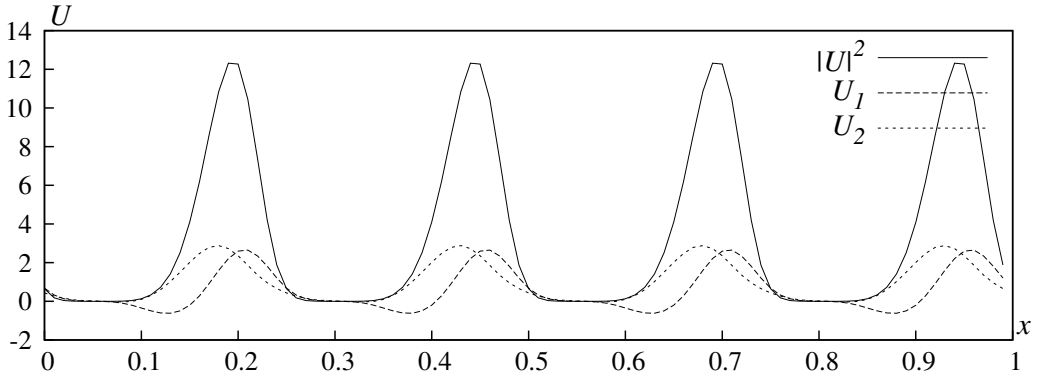

Рис. 1. Временной срез решения задачи (1), (2), (4) при $a = 1.5$, $b = 1.5$, $d = (1+i)10^{-3}$, $t = 3000$, $k = 4$

или условиями непроницаемости на границе

$$U_x(t,0) \equiv U_x(t,1) \equiv 0. \tag{3}$$

В качестве начального условия выбиралась функция

$$U(t,x) = \varphi(t,x) \equiv N^*(t + kT^*x), \quad -1 \le t \le 0, \tag{4}$$

где N^* — периодическое решение обыкновенного комплексного уравнения Хатчинсона:

$$\dot{N} = [a - b|N(t-1)|^2]N, \quad N = N_1(t,x) + iN_2(t,x), \tag{5}$$

а T^* — его период. Такое решение уравнения (4) существует и единственно при $\mathrm{Re}\,(\mathrm{a}) > \pi/4$ [4].

Уравнение (1) демонстрирует при численном анализе более богатую динамику в сравнении с полученной в [2] и [3] для действительного аналога, в то время как пространственно-неоднородные режимы вида бегущих волн и ведущих центров также являются наблюдаемыми при численном эксперименте.

Для численного интегрирования уравнения (1) использовался метод прямых с дискретизацией пространственной переменной в 100 точках, полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием решалась с помощью схемы Оурена–Зеннаро 5(4) с абсолютной и относительной погрешностью 10^{-5} [8].

Краевая задача с периодическими краевыми условиями Выбор начальных условий (4) определяет решение в виде бегущей волны у задачи (1),(2) при $d = 0$. Вначале рассмотрим случай $a_2 = b_2 = 0$. При малых d_1, d_2 амплитуда $|U|^2$ по-прежнему демонстрирует бегущую волну, в то время как U_1 и U_2, вместе с перемещением с той же скоростью в пространстве, совершают также и колебательные движения.

На Рис. 1 изображены $|U|^2(t,x)$, $U_1(t,x)$, $U_2(t,x)$ — амплитуда, действительная и мнимая компоненты решения задачи (1), (2), (4) в момент времени $t = 3000$ при значениях параметров $a = 1.5$, $b = 1.5$, $d = (1+i)10^{-3}$, $k = 4$.

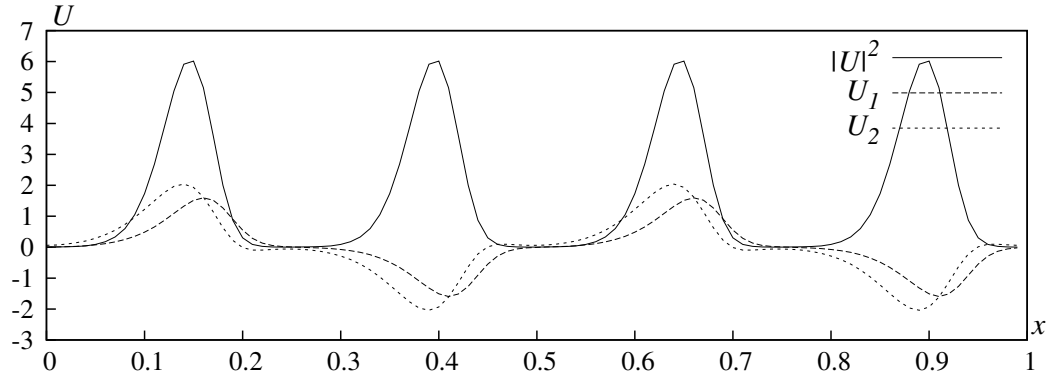

Рис. 2. Временной срез решения задачи (1), (2), (4) при $a = 1.5$, $b = 1.5+i$, $d = 10^{-3}$, $t = 3000$, $k = 4$

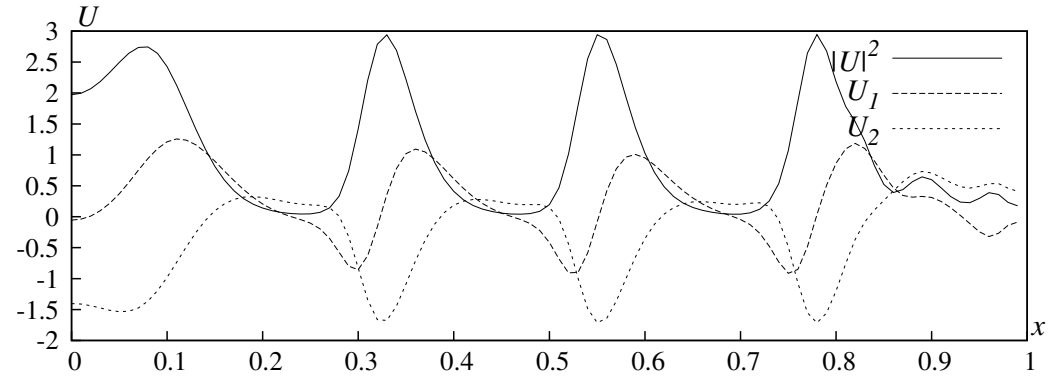

Рис. 3. Временной срез решения задачи (1), (3), (6) при $a = 1 + 0.5i$, $b = 1 + 0.5i$, $d = 10^{-4}(1 + i)$

Ситуация, когда пространственный период $|U(t, x)|^2$ и пространственные периоды $U_1(t, x)$, $U_2(t, x)$ совпадают, является типичной, однако возможны и иные соотношения: на Рис. 2 изображено решение задачи (1), (2), (4) при $a = 1.5$, $b = 1.5 + i$, $d = 10^{-3}$. При данных значениях параметров период компонент U_1 и U_2 вдвое больше периода амплитуды $|U|^2$.

При малой диффузии зависимость поведения решений от параметров носит следующий характер: с ростом a_1 увеличивается амплитуда $|U|^2$, рост a_2 приводит к ускорению колебаний компонент U_1 и U_2, а ненулевое b_2 привносит в динамику колебания амплитуды бегущих волн $|U|^2$.

Краевая задача с условиями непроницаемости Для решения задачи (1), (3) выбиралось начальное условие вида

$$\begin{array}{lll} U_1^i(t) = 0, & U_2^i(t) = 0, & t \in [-1, 0], i > 0 \\ U_1^0(t) = 2, & U_2^0(t) = 2, & t \in [-1, 0], \end{array} \tag{6}$$

таким образом крайняя левая точка выполняет роль генератора импульсов. На Рис. 3 и Рис. 4 изображены решения задачи (1), (3), (6) с параметрами $a = 1 + 0.5i$,

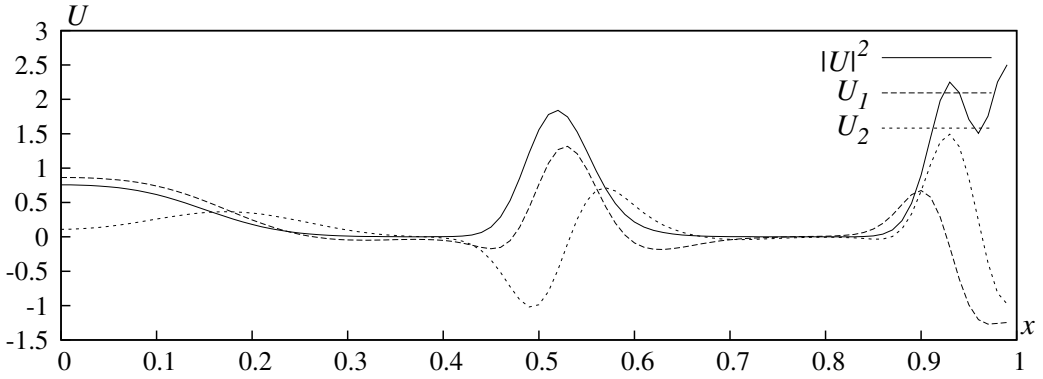

Рис. 4. Временной срез решения задачи (1), (3), (6) при $a = 1 + 0.5i$, $b = 3 + 1.5i$, $d = 10^{-4}(4 + 10i)$

$b = 1 + 0.5i$, $d = 10^{-4}(1 + i)$ и $a = 1 + 0.5i$, $b = 3 + 1.5i$, $d = 10^{-4}(4 + 10i)$ соответственно. В обоих случаях структура сохраняется на большом промежутке времени ($t > 3000$): крайняя левая точка генерирует всплески, продвигающиеся вправо в пространстве и разрушающиеся у правой границы.

Список литературы

1. *Bestehorn M., Grigorieva E. V., Kaschenko S. A.* Spatiotemporal structures in a model with delay and diffusion // Phys. Rev. E70. 026202 (2004).

2. *Глызин Д. С., Кащенко С. А., Полстьянов А. С.* Пространственно-неоднородные периодические решения в распределенном уравнении Хатчинсона // Моделирование и анализ информационных систем. 2009. Т. 16, № 4. С. 77–85.

3. *Глызин Д. С., Кащенко С. А., Полстьянов А. С.* Пространственно-неоднородные периодические решения уравнения Хатчинсона с распределенным насыщением // Моделирование и анализ информационных систем. 2009. Т. 18, № 1. С. 37–45.

4. *Кащенко С.А.* Асимптотика периодического решения обобщенного уравнения Хатчинсона // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль, 1981. С. 64–85.

5. *Глызин С. Д.* Разностные аппроксимации уравнения «реакция-диффузия» на отрезке // Моделирование и анализ информационных систем. 2009. Т. 16, № 3. С. 96–116.

6. *Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Конечномерные модели диффузионного хаоса // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2010. Т. 50. № 5. С. 860 – 875.

7. *Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Релаксационные колебания и диффузионный хаос в реакции Белоусова // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т. 51, № 8. С. 1400 – 1418.

8. *Owren B., Zennaro M.* Derivation of Efficient Continuous Explicit Runge-Kutta Methods // SIAM J. Sci. Stat. Comput. 1992. Vol. 13. P. 1488–1501.

Dynamics of a Complex Spatially Distributed Hutchinson Equation

Glyzin D. S., Kaschenko S. A.

Keywords: asymptotic methods, distributed Hutchinson equation, method of steps

In the article the complex Hutchinson equation is studied. New results on numerically observable space-inhomogenious solutions are obtained.

Сведения об авторах:
Глызин Дмитрий Сергеевич,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического моделирования.
Кащенко Сергей Александрович,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
доктор физ.-мат. наук, профессор,
заведующий кафедрой математического моделирования.