Моделирование и анализ информационных систем. Т. 24, №4 (2017), с. 410–414
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 24, No 4 (2017), pp. 410–414

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-4-410-414
УДК 004.9

Уточнение свойств центроида дерева

Белов Ю. А., Вовчок С. И.

получена 25 июля 2017

Аннотация. Работа посвящена уточнению свойств центроида дерева. Внимание авторов привлекла популярная задача (бинарного) разбиения графа, для которой неизвестен непереборный алгоритм. Выяснено, что для «экономного» разбиения дерева имеет смысл рассматривать разбиения в окрестности центроидных вершин, определение которых представлено. В ходе работы предложены доказательства, связанные с ограничением их веса. Также доказано, что если в дереве имеются две центроидные вершины, то они смежны. В следствии отмечается, что в дереве не могут иметь место три таких вершины. Составлены соответствующие предложения. Согласно первому, любая вершина дерева с определенным ограничением на ее вес является центроидной. По одному из пунктов второго предложения, если в дереве имеются две центроидные вершины, то порядок дерева является чётным числом. Третье предложение гласит, что если в дереве имеется центроидная вершина ограниченного веса, то имеется и другая центроидная вершина того же веса и смежная с первой. Для доказательства предложений рассматривается ветвь наибольшего веса при центроидной вершине и в этой ветви берется другая смежная с центроидной вершина. В работе используется теорема Жордана, при изложении материала представлено три изображения.

Ключевые слова: центроид, центроид дерева

Для цитирования: Белов Ю. А., Вовчок С. И., "Уточнение свойств центроида дерева", *Моделирование и анализ информационных систем*, **24**:4 (2017), 410–414.

Об авторах:
Белов Юрий Анатольевич, orcid.org/0002-0007-1896-0951, канд. физ.-мат. наук, доцент,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: belov45@yandex.ru

Вовчок Сергей Иванович, orcid.org/0000-0003-0535-5786, аспирант,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: vof4ok@gmail.com

Введение

Поводом для рассмотрения указанного в заголовке вопроса явилась популярная задача (бинарного) разбиения графа: для данного простого графа указать способ разбиения его вершин на два подмножества такие, что, во-первых, подмножества равны по количеству вершин (или равны с некоторой заданной погрешностью) и, во-вторых, количество «перекрёстных» рёбер графа (то есть рёбер, соединяющих вершины из различных множеств) при этом разбиении минимально. Конечно, задача допускает различные варианты постановки — для нагруженных графов, для мультиграфов, для ориентированных графов и т. п., но даже для простейшего случая точный не переборный алгоритм её решения неизвестен.

Обычное эвристическое соображение, используемое при этом, состоит в том, что для связного графа имеется набор остовных деревьев и достаточно построить разбиение для некоторого остовного дерева, чтобы автоматически получить разбиение всего графа. Конечно, при этом возникают вопросы, какое остовное дерево «выгоднее» взять, чтобы получить в итоге более качественное разбиение графа. Кроме того, возникает задача «экономного» разбиения дерева, в связи с чем и имеет смысл рассматривать разбиения дерева, «в окрестности центроидных вершин», то есть разбиения, в которых исключаются только рёбра, примыкающие к центроидной вершине.

Доказательства и предложения

Рассматривается дерево — связный граф без циклов. Порядок графа $n(T)$ — количество его вершин. Как известно, количество рёбер при этом равно $n-1 = R(T)$, оно иногда называется размером дерева. Конечно, можно отметить, что это практически то же самое, что порядок графа, но некоторые формулы с использованием этого понятия будут проще, поэтому понятие размера имеет какой-то смысл. Для произвольной вершины v дерева можно рассмотреть набор поддеревьев, называемых ветвями данной вершины. Ветвь при вершине v — максимальный подграф графа T, для которого данная вершина является концевой.

Количество ветвей, примыкающих к данной вершине v, равно, конечно, степени этой вершины. Понятно также, что ветви, примыкающие к данной вершине v, не имеют общих рёбер и имеют только одну общую вершину — вершину v, сумма размеров всех ветвей, примыкающих к произвольной вершине, равна количеству всех рёбер дерева, то есть размеру графа T (см. рис. 1):

$$n-1 = R(T). \tag{*}$$

На рисунке 1 при вершине v имеются три ветви: размеров 1, 3 и 9.

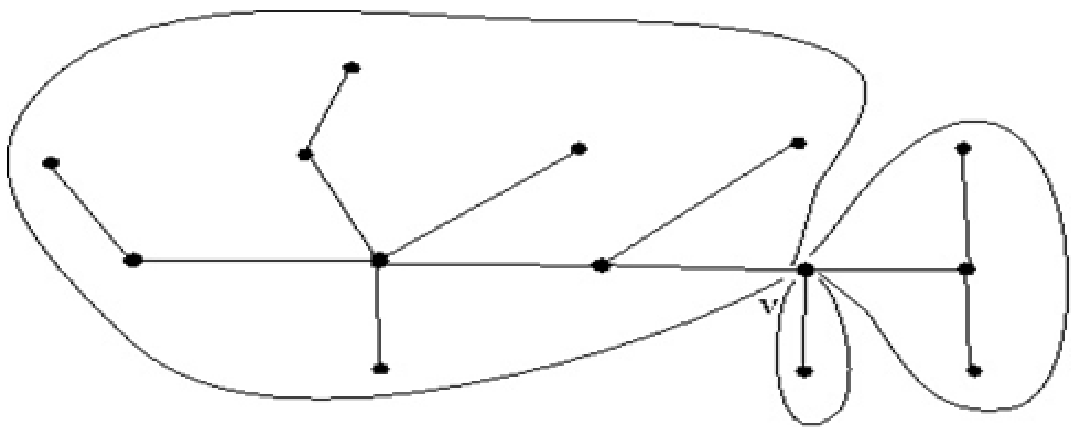

Рис. 1. Изображение графа T
Fig.1 Graph T image

Определение 1. *Для произвольной вершины v дерева T весом вершины называется максимум размеров ветвей, примыкающих к данной вершине v; будем обозначать его через $w(v)$.*

Например, если v — концевая вершина дерева, то к ней примыкает ровно одна ветвь, размер её равен $n-1$ и она просто совпадает со всем исходным графом. Таким образом, вес любой концевой вершины равен $n-1$. Вообще вес вершин, очевидно, находится в пределах от 1 до $n-1$. На рисунке 1 $w(v) = 9$.

Определение 2. *Вершина называется центроидной, если её вес наименьший среди всех вершин дерева.*

Теорема (Жордан). В произвольном дереве имеются ровно две центроидные вершины, смежные друг с другом, или ровно одна центроидная вершина.

Докажем это утверждение и некоторые его уточнения.

1. Докажем, что вес любой центроидной вершины не превосходит $\frac{n}{2}$. Предположим противное, пусть имеется ветвь, примыкающая к центроидной вершине v, имеющая размер больше $\frac{n}{2}$. Тогда, во-первых, такая ветвь может быть только одна, в силу (*). Пусть (v, a) — ребро, входящее в эту ветвь. Тогда, как легко понять, вес вершины a будет меньше веса вершины v, что противоречит центроидности вершины v.

   Действительно, сумма размеров всех ветвей, при вершине a, кроме одной ветви, включающей ребро (a, v), на единицу меньше размера наибольшей ветви при вершине v, а одна оставшаяся ветвь, примыкающая к вершине a, будет иметь размер не более $\frac{n}{2}$, так как все ветви, примыкающие к вершине v, кроме наибольшей ветви, имели в сумме размер не более $n - 1 - \frac{n}{2} = \frac{n}{2} - 1$, а теперь к этой величине лишь добавилась единица (см. рис. 2).

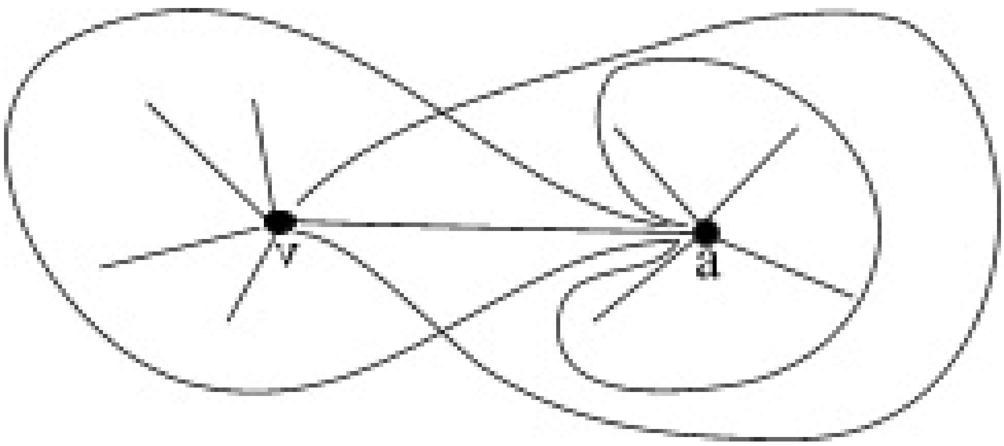

Рис. 2. Изображение графа для доказательства
Fig.2. Graph image for proof

2. Докажем, что если в дереве имеются две центроидные вершины, то они смежны. Предположим противное: пусть в дереве имеются две центроидные несмежные вершины v_1 и v_2. В дереве любые две вершины соединены единственной простой цепью. Так как v_1 и v_2 не смежны, имеется вершина a, лежащая между v_1 и v_2. Тогда нетрудно увидеть, что сумма размеров ветвей, примыкающих к вершине a должна быть меньше $n-1$, что противоречит (*).

Действительно, сумма размеров всех ветвей, примыкающих к вершине a, кроме ветви, включающей v_1, не более $\frac{n}{2}-1$, так как эта сумма есть часть размера одной ветви, примыкающей к v_1 (а именно ветви, включающей вершину a), уменьшенная по крайней мере на единицу. (Напомним, что вес каждой ветви при центроидной вершине не более $\frac{n}{2}$). Вес оставшейся ветви, примыкающей к вершине a и содержащей v_1, также не превосходит $\frac{n}{2}-1$, так как это часть ветви, идущей от вершины v_2 , содержащей вершину a. Значит, сумма размеров всех ветвей, примыкающих к вершине a, не превосходит $\frac{n}{2}-1+\frac{n}{2}-1=\frac{n}{2}$ — действительно, противоречие с (*).

Следствие. В произвольном дереве может быть только одна или только две смежные центроидных вершины. Действительно, три вершины, будучи попарно смежными, образовывали бы треугольник, но в дереве циклов нет.

Предложение 1. Любая вершина v дерева, вес которой не более $\frac{n}{2}$, является центроидной.

Доказательство. Предположим противное: v — не центроидная вершина, тогда в дереве имеется центроидная вершина c, вес её, по предположению, меньше веса вершины v: $w(c) < w(v) \leq \frac{n}{2}$. В дереве имеется единственный путь от c к v. Пусть r — последнее ребро этого пути. Рассмотрим ветвь при вершине c, содержащую вершину v. Вес этой ветви, как и любой ветви при вершине c, меньше $\frac{n}{2}$. Эта ветвь включает в себя все ветви при вершине v, кроме ветви, содержащей c. Таким образом, сумма весов всех ветвей при вершине v, кроме ветви, содержащей вершину c, имеет вес меньше чем $\frac{n}{2}-1$, так как хотя бы ребро r в эту сумму не входит (см. рис. 3). Рассмотрим теперь оставшуюся ветвь при вершине v, содержащую вершину c. Она имеет вес не более $w(v)$, то есть не более $\frac{n}{2}$. Тогда сумма весов всех ветвей при вершине v будет меньше $\frac{n}{2}+\frac{n}{2}-1$, то есть меньше $n-1$. Противоречие с (*).

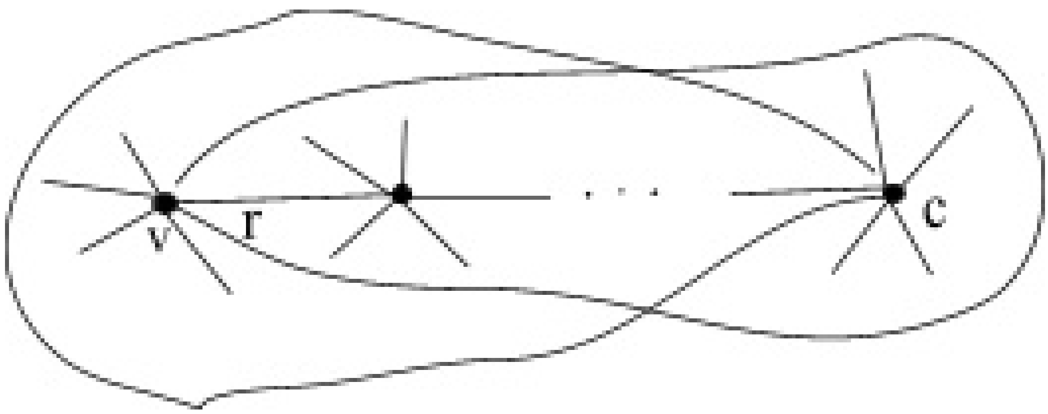

Рис. 3. Изображение графа для доказательства предложения 1
Fig. 3. Graph image for suggestion 1 proof.

Предложение 2. Если в дереве имеются две центроидные вершины c_1 и c_2, тогда порядок дерева $n(T)$ является чётным числом и $w(c_1)=w(c_2)=\frac{n}{2}$.

Доказательство. Пусть имеются две центроидные вершины v_1 и v_2. Они смежны в силу утверждения теоремы. Можно отметить, что ветвь при v_1, содержащая

v_2, имеет размер $\frac{n}{2}$. Действительно, её размер не более $\frac{n}{2}$ в силу теоремы, но он не может быть и меньше $\frac{n}{2}$, так как иначе сумма размеров остальных ветвей при вершине v_1, была бы более $\frac{n}{2} - 1$, а тогда ветвь при вершине v_2, содержащая v_1, имела бы вес больше, чем $\frac{n}{2} - 1 + 1 = \frac{n}{2}$, что противоречит теореме.

Предложение 3. Если в дереве имеется центроидная вершинаv веса $\frac{n}{2}$, то имеется и другая центроидная вершина (естественно, того же веса и смежная с первой).

Для доказательства достаточно (аналогично предыдущим случаям) рассмотреть ветвь наибольшего веса при вершине v и взять в этой ветви вершину, смежную с v.

Отметим, что для деревьев чётного порядка утверждения, обратные к предложениям 2 и 3, вообще говоря, не обязательны.

Список литературы / References

[1] Евстигнеев В. А., Касьянов В. Н., *Теория графов. Алгоритмы обработки деревьев*, Наука, Новосибирск, 1994; [Yevstigneev V. A., Kas'anov V. N., *Teoriya grafov. Algoritmy obrabotki derev'ev*, Nauka, Novosibirsk, 1994, (in Russian).]

[2] Ловас Л., Пламмер М., *Прикладные задачи теории графов. Теория паросочетаний в математике, физике, химии*, Мир, М., 1998; In English: Lovasz L., Plummer M.D., *Matching Theory*, Akademiai Kiado, North Holland, Budapest, 1986.

Belov Y. A., Vovchok S. I., "Tree Centroid Properties Clarification", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:4 (2017), 410–414.

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-4-410-414

Abstract. The paper is devoted to the tree centroid properties clarification. Attention of the authors was attracted by the popular problem of (binary) partition of a graph. The solution is known only by brute force algorithm. It was found that for a "economical" partition of a tree it makes sense to consider partitions in the neighborhood of centroid vertices, the definition of which is presented. In the paper, we proposed proofs connected with the limitation of their weight. It is also proved that if there are two centroid vertices in a tree, they are adjacent. In what follows, it is noted that three such vertices can not be in the tree. The corresponding statements are made. According to the first one, any vertex of a tree with a certain restriction on its weight is centroid. According to one of the points of the second statement, if there are two centroid vertices in the tree, the order of the tree is an even number. The third statement says that if a tree has a centroid vertex of limited weight, there is another centroid vertex of the same weight and adjacent to the first one. To prove the propositions, we consider the branch of greatest weight with a centroid vertex and take in this branch another vertex adjacent to the centroid. In this paper, Jordan's theorem is used, three images are used in the presentation of the material.

Keywords: centroid, tree centroid

On the authors:
Yurii A. Belov, orcid.org/0002-0007-1896-0951, PhD,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: belov45@yandex.ru

Sergei I. Vovchok, orcid.org/0000-0003-0535-5786, graduate student,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: vof4ok@gmail.com