Моделирование и анализ информационных систем. Т. 24, №4 (2017), с. 508–515
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 24, No 4 (2017), pp. 508–515

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-4-508-515

УДК 519.17

Разложение самоподобных функций в системе Фабера–Шаудера

Тимофеев Е. А.

получена 6 июля 2017

Аннотация.
Пусть $\Omega = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ – пространство правосторонних бесконечных последовательностей символов алфавита $\mathcal{A} = \{0, 1\}$, $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Пусть

$$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k| 2^{-k}$$

– метрика на $\Omega = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, и μ – мера Бернулли на Ω с вероятностями $p_0, p_1 > 0$, $p_0 + p_1 = 1$. Обозначим через $B(\boldsymbol{x}, \omega)$ открытый шар радиуса r с центром в точке $\boldsymbol{\omega}$. Основной результат работы

$$\mu\left(B(\boldsymbol{\omega}, r)\right) = r + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^n-1} \mu_{n,j}(\boldsymbol{\omega}) \tau(2^n r - j),$$

где $\tau(x) = 2\min\{x, 1-x\}$, $0 \le x \le 1$, ($\tau(x) = 0$, if $x < 0$ or $x > 1$),

$$\mu_{n,j}(\boldsymbol{\omega}) = \left(1 - p_{\omega_{n+1}}\right) \prod_{k=1}^{n} p_{\omega_k \oplus j_k}, \quad j = j_1 2^{n-1} + j_2 2^{n-2} + \dots + j_n.$$

Семейство функций $1, x, \tau(2^n x - j)$, $j = 0, 1, \dots, 2^n - 1$, $n = 0, 1, \dots$ является системой Фабера – Шаудера в пространстве $C([0, 1])$ непрерывных функций на $[0, 1]$. Также получены разложения в системе Фабера – Шаудера для сингулярной функции Лебега, кривых Чезаро и кривых Коха – Пеано.

Ключевые слова: система Фабера–Шаудера, вейвлета Хаара, самоподобие, функция Лебега

Для цитирования: Тимофеев Е. А., "Разложение самоподобных функций в системе Фабера–Шаудера", *Моделирование и анализ информационных систем*, **24**:4 (2017), 508–515.

Об авторах:
Тимофеев Евгений Александрович, orcid.org/0000-0002-0980-2507, д-р физ.-мат. наук, профессор
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: timofeevEA@gmail.com

Изучению сингулярных функций в последнее время посвящено большое число работ. Одним из основных изученных классов являются самоподобные функции. Самоподобные функции задаются простыми рекуррентными уравнениями, но обычно не допускают явного задания. В настоящей работе будут найдены разложения некоторых непрерывных самоподобных функций в системе Фабера–Шаудера. Коэффициенты разложения найдены в явном виде.

Система Фабера–Шаудера. Семейство функций

$$1, x, \tau(2^n x - j), \quad j = 0, 1, \ldots, 2^n - 1, \ n = 0, 1, \ldots,$$

где $\tau(x) = 2\min\{x, 1-x\}, \ 0 \le x \le 1$, ($\tau(x) = 0$, при $x < 0$ или $x > 1$), называется [1] системой Фабера–Шаудера в пространстве $C([0,1])$ всех непрерывных функций на отрезке $[0,1]$ с нормой $||f|| = \max_{0 \le x \le 1} |f(x)|$.

Любая непрерывная функция $f(x)$ представляется в виде

$$f(x) = A_0 + A_1 x + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^n - 1} A_{n,j} \tau(2^n x - j),$$

где $A_0 = f(0)$, $A_1 = f(1) - f(0)$ и

$$A_{n,j} = f((2j+1)2^{-n-1}) - 0.5f(j2^{-n}) - 0.5f((j+1)2^{-n}) \tag{1}$$

см. [1, гл.6 (4)].

Базис Хаара. Семейство функций

$$1, 2^{n/2}\psi(2^n x - j), \quad j = 0, 1, \ldots, 2^n - 1, \ n = 0, 1, \ldots,$$

где $\psi(t) = 0.5\tau'(t)$ называется вейвлетой Хаара, образует ортонормированный базис в пространстве $L^2(0,1)$ [1].

1. Мера шара в пространстве последовательностей

Рассмотрим пространство правосторонних бинарных последовательностей $\Omega = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, где $\mathcal{A} = \{0, 1\}$, $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ с метрикой

$$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k| 2^{-k}. \tag{2}$$

Через μ обозначим меру Бернулли на Ω с вероятностями $p_0, p_1 > 0$, $p_0 + p_1 = 1$.

Через $B(\boldsymbol{\omega}, r)$ обозначим открытый шар радиуса r с центром в точке $\boldsymbol{\omega}$.

Нетрудно видеть, что функция $\mu(\boldsymbol{\omega}, x) = \mu(B(\boldsymbol{\omega}, x))$ удовлетворяет рекуррентному уравнению

$$\mu(a\boldsymbol{\omega}, x) = \begin{cases} p_a \mu(\boldsymbol{\omega}, 2x), & 0 \le x \le 0.5, \\ p_a + p_{1-a}\mu(\boldsymbol{\omega}, 2x - 1), & 0.5 \le x \le 1, \end{cases} \tag{3}$$

где $a \in \{0, 1\}$ и через $a\boldsymbol{\omega}$ обозначается точка $a, \omega_1, \omega_2, \ldots$

Теорема 1. *Функция $\mu(\boldsymbol{\omega}, x)$ имеет следующее разложение по системе Фабера–Шаудера*

$$\mu(\boldsymbol{\omega}, x) = x + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^n-1} \left(p_{\omega_{n+1}} - 0.5\right) p_0^{s_n(\boldsymbol{\omega},j)} p_1^{n-s_n(\boldsymbol{\omega},j)} \tau(2^n x - j), \tag{4}$$

где

$$s_n(\boldsymbol{\omega}, j) = \left|\{i \ : \ \omega_i = j_i, \ j = j_1 2^{n-1} + \cdots + j_n, \ i = 1, 2, \ldots, n\}\right|. \tag{5}$$

Доказательство. Покажем, что функция $\mu(\boldsymbol{\omega}, x)$, заданная в (4), удовлетворяет уравнению

$$\mu(a\boldsymbol{\omega}, x/2) = p_a \mu(\boldsymbol{\omega}, x). \tag{6}$$

Из (4) имеем

$$\mu(a\boldsymbol{\omega}, x/2) = \frac{x}{2} + (p_a - 0.5)\, x + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} (p_{\omega_n} - 0.5)\, p_0^{s_n(a\boldsymbol{\omega},j)} p_1^{n-s_n(a\boldsymbol{\omega},j)} \tau(2^{n-1}x - j).$$

Поскольку при $j < 2^{n-1}$

$$s_n(0\boldsymbol{\omega}, j) = s_{n-1}(\boldsymbol{\omega}, j) + 1,$$
$$s_n(1\boldsymbol{\omega}, j) = s_{n-1}(\boldsymbol{\omega}, j),$$

имеем

$$p_0^{s_n(a\boldsymbol{\omega},j)} p_1^{n-s_n(a\boldsymbol{\omega},j)} = p_a p_0^{s_{n-1}(\boldsymbol{\omega},j)} p_1^{n-1-s_{n-1}(\boldsymbol{\omega},j)}.$$

Подставляя, получим

$$\mu(a\boldsymbol{\omega}, x/2) = p_a x + \\ + p_a \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} (p_{\omega_n} - 0.5)\, p_0^{s_{n-1}(\boldsymbol{\omega},j)} p_1^{n-1-s_{n-1}(\boldsymbol{\omega},j)} \tau(2^{n-1}x - j) = \\ = p_a x + p_a \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^n-1} \left(p_{\omega_{n+1}} - 0.5\right) p_0^{s_n(\boldsymbol{\omega},j)} p_1^{n-s_n(\boldsymbol{\omega},j)} \tau(2^n x - j) = \\ = p_a \mu(\boldsymbol{\omega}, x).$$

Покажем, что функция $\mu(\boldsymbol{\omega}, x)$, заданная в (4), удовлетворяет уравнению

$$\mu\left(a\boldsymbol{\omega}, \frac{1}{2} + \frac{x}{2}\right) = p_a + p_{1-a}\mu(\boldsymbol{\omega}, x). \tag{7}$$

Из (4) имеем

$$\mu\left(a\boldsymbol{\omega}, \frac{1}{2} + \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{x}{2} + (p_a - 0.5)\,(1 - x) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=2^{n-1}}^{2^n-1} (p_{\omega_n} - 0.5)\, p_0^{s_n(a\boldsymbol{\omega},j)} p_1^{n-s_n(a\boldsymbol{\omega},j)} \tau(2^{n-1}x + 2^{n-1} - j).$$

Поскольку при $2^{n-1} \le j < 2^n$

$$s_n(0\boldsymbol{\omega}, j) = s_{n-1}(\boldsymbol{\omega}, j - 2^{n-1}),$$
$$s_n(1\boldsymbol{\omega}, j) = s_{n-1}(\boldsymbol{\omega}, j - 2^{n-1}) + 1,$$

имеем

$$p_0^{s_n(a\boldsymbol{\omega},j)} p_1^{n-s_n(a\boldsymbol{\omega},j)} = p_{1-a} p_0^{s_{n-1}(\boldsymbol{\omega},j-2^{n-1})} p_1^{n-1-s_{n-1}(\boldsymbol{\omega},j-2^{n-1})}.$$

Подставляя, получим

$$\mu\left(a\boldsymbol{\omega}, \frac{1}{2} + \frac{x}{2}\right) = p_a + p_{1-a}x +$$
$$+ p_{1-a} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=2^{n-1}}^{2^n-1} (p_{\omega_n} - 0.5)\, p_0^{s_{n-1}(\boldsymbol{\omega},j-2^{n-1})} p_1^{n-1-s_{n-1}(\boldsymbol{\omega},j)} \tau(2^{n-1}x - j) =$$
$$= p_a x + p_{1-a} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^n-1} \left(p_{\omega_{n+1}} - 0.5\right) p_0^{s_n(\boldsymbol{\omega},j)} p_1^{n-s_n(\boldsymbol{\omega},j)} \tau(2^n x - j) =$$
$$= p_a + p_{1-a}\mu(\boldsymbol{\omega}, x).$$

Доказанные равенства (6), (7) эквивалентны определению (3) функции $\mu(\boldsymbol{\omega}, x)$. □

2. Кривые де Рама с двумя линейными сжатиями

Напомним конструкцию де Рама [3], которая позволяет построить большое число известных фрактальных кривых, например функции Кантора, Минковского, Такаги, кривые Пеано и Коха.

Пусть в метрическом пространстве M с метрикой d заданы два сжимающих отображения

$$f_0 : \ M \to M; \qquad f_1 : \ M \to M. \tag{8}$$

Кривая де Рама $p(x) \in M$, $x \in [0, 1]$ задается следующим образом. Пусть $x \in [0, 1]$ имеет бинарное разложение

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} b_k 2^{-k}, \ \ b_k \in \{0, 1\},$$

тогда $p(x) \in M$ задается как та единственная точка, в которую M переходит при отображении

$$f_{b_1} \circ f_{b_2} \circ \cdots \circ f_{b_k} \circ \cdots$$

Пусть отображения f_0, f_1 имеют неподвижные точки m_0 и m_1. Тогда кривая $p(x)$ является непрерывной, если

$$f_0(m_1) = f_1(m_0).$$

Кривые де Рама по построению являются самоподобными, поскольку

$$p(x) = f_0(p(2x)), \qquad x \in [0, 0.5];$$
$$p(x) = f_1(p(2x - 1)), \quad x \in [0.5, 1].$$

2.1. Функция Лебега

Кривая де Рама $L(x)$, полученная при $M = [0,1]$, $f_0(x) = p_0 x$, $f_1(x) = p_0 + p_1 x$, называется функцией Лебега, где $p_0, p_1 > 0$, $p_0 + p_1 = 1$.

Функция Лебега является самой простой самоподобной функцией и удовлетворяет рекуррентным уравнениям

$$L(x) = \begin{cases} p_0 L(2x), & 0 \le x \le 0.5, \\ p_0 + p_1 L(2x-1), & 0.5 \le x \le 1. \end{cases} \tag{9}$$

Название дано Ломницким и Уламом [2] в 1934 г. В их работе также показано, что при заданном бинарном разложении числа

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-\gamma_k}, \quad \gamma_0 < \gamma_1 < \dots$$

значение $L(x)$ вычисляется по формуле

$$L(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_0^{\gamma_k - k} p_1^k. \tag{10}$$

Теорема 2. *Функция $L(x)$ имеет следующее разложение по системе Фабера–Шаудера*

$$L(x) = x + (p_0 - 0.5) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^n-1} p_0^{n-s(j)} p_1^{s(j)} \tau(2^n x - j), \tag{11}$$

где $s(j)$ – число единиц в бинарном разложении j.

Для сравнения приведем разложение $L(x)$ в базисе Хаара, полученное в [2]

$$L(x) = p_0 - p_0 p_1 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^n-1} 2^n p_0^{n-s(j)} p_1^{s(j)} \psi(2^n x - j),$$

где $\psi(t) = 0.5\tau'(t)$.

Доказательство. Доказательство этой теоремы можно провести аналогично доказательству теоремы 1. Однако здесь будет приведено доказательство, основанное на представлении (10) и формулах для коэффициентов (1).

По формуле (1) коэффициенты $l_{n,j}$ разложения функции $L(x)$ в системе Фабера–Шаудера задаются как

$$l_{n,j} = L((2j+1)2^{-n-1}) - 0.5L(j2^{-n}) - 0.5L((j+1)2^{-n}). \tag{12}$$

Пусть j – четное, тогда

$$j2^{-n} = \sum_{i=0}^{s(j)-1} 2^{-\gamma_i}, \quad \gamma_0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_{s(j)-1} < n,$$

$$(j+1)2^{-n} = \sum_{i=0}^{s(j)-1} 2^{-\gamma_i} + 2^{-n},$$

$$(2j+1)2^{-n-1} = \sum_{i=0}^{s(j)-1} 2^{-\gamma_i} + 2^{-n-1}.$$

Подставляя (10) в (12), получим

$$l_{n,j} = (p_0 - 0.5)p_0^{n-s(j)} p_1^{s(j)}.$$

Пусть j – нечетное, тогда для некоторого m

$$j2^{-n} = \sum_{i=0}^{m-1} 2^{-\gamma_i} + \sum_{i=m}^{s(j)-1} 2^{-n+s(j)-i-1}, \quad \gamma_0 < \gamma_1 < \cdots < \gamma_{m-1} < m + n - s(j),$$

$$(j+1)2^{-n} = \sum_{i=0}^{m-1} 2^{-\gamma_i} + 2^{-n+s(j)-m},$$

$$(2j+1)2^{-n-1} = \sum_{i=0}^{m-1} 2^{-\gamma_i} + \sum_{i=m}^{s(j)} 2^{-n+s(j)-i-1}.$$

Подставляя (10) в (12), получим

$$\begin{aligned} l_{n,j} &= \sum_{i=m}^{s(j)} p_0^{n-s(j)+1} p_1^i - 0.5 p_0^{n-s(j)} p_1^m - 0.5 \sum_{i=m}^{s(j)-1} p_0^{n-s(j)+1} p_1^i = \\ &= p_0^{n-s(j)} p_1^m \left(1 - p_1^{s(j)-m+1}\right) - 0.5 p_0^{n-s(j)} p_1^m - 0.5 p_0^{n-s(j)} p_1^m \left(1 - p_1^{s(j)-m}\right) = \\ &= p_0^{n-s(j)} p_1^m \left(-p_1^{s(j)-m+1} + 0.5 p_1^{s(j)-m}\right) = \\ &= (p_0 - 0.5) p_0^{n-s(j)} p_1^{s(j)}. \end{aligned}$$

□

2.2. Кривые Чезаро–Леви

Кривая де Рама $C(x)$, полученная при $M = \mathbb{C}$ – комплексная плоскость, $f_0(z) = az$, $f_1(x) = a + bz$, $b = 1 - a$, называется кривой Чезаро–Леви. На любом интервале у кривой Чезаро–Леви есть точки самопересечения. Эта кривая открыта Е.Чезаро в 1906 г. и исследована П. Леви [4].

Из теоремы 2 получаем

Следствие 1. *Функция $C(x)$ имеет следующее разложение по системе Фабера–Шаудера*

$$C(x) = x + (a - 0.5) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^n-1} a^{n-s(j)} b^{s(j)} \tau(2^n x - j), \qquad (13)$$

где $s(j)$ – число единиц в бинарном разложении j.

2.3. Кривые Коха–Пеано

Кривая де Рама $p(x)$, полученная при $M = \mathbb{C}$ – комплексная плоскость, $f_0(z) = a\overline{z}$, $f_1(x) = a + b\overline{z}$, $b = 1 - a$, называется кривой Коха–Пеано, поскольку при $a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{6}$ получаем классическую снежинку Коха, а при $a = \frac{1+i}{2}$ — кривую Пеано, заполняющую треугольник с вершинами $0, 1, a$.

Из теоремы 2 получаем

Следствие 2. *Функция $p(x)$ имеет следующее разложение по системе Фабера–Шаудера*

$$p(x) = x + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{2^n-1} p_{n,j}\tau(2^n x - j), \tag{14}$$

$$\begin{aligned} p_{2k,j} &= a^{k-s(j)+s_0(j)}\overline{a}^{k-s_0(j)}b^{s(j)-s_0(j)}\overline{b}^{s_0(j)}\left(a - 0.5\right), \\ p_{2k+1,j} &= a^{k-s_0(j)+1}\overline{a}^{k-s(j)+s_0(j)}b^{s_0(j)}\overline{b}^{s(j)-s_0(j)}\left(a - 0.5\right), \end{aligned} \tag{15}$$

где $s(j)$ – число единиц в бинарном разложении j, $s_0(j)$ – число единиц на четных местах в бинарном разложении j.

Доказательство. Поскольку $p(0) = 0$, $p(1) = 1$ имеем разложение (14).

Подставляя разложение (14) в первое уравнение

$$p\left(\frac{t}{2}\right) = a\overline{p(t)},$$

получим $p_{0,0} = a - 0.5$ и

$$p_{n+1,j} = a\overline{p_{n,j}}, \quad 0 \leq j < 2^n. \tag{16}$$

Подставляя разложение (14) во второе уравнение

$$p\left(\frac{1}{2} + \frac{t}{2}\right) = b\overline{p(t)} + a,$$

получим

$$p_{n+1,j+2^n} = b\overline{p_{n,j}}, \quad 0 \leq j < 2^n. \tag{17}$$

Нетрудно проверить, что решение уравнений (16), (17) задается формулами (15).

□

Список литературы / References

[1] Кашин Б.С., Саакян А.А., *Ортогональные ряды*, 2-е изд., доп., Изд-во АФЦ, М., 1999; English transl.: Kashin B.S., Saakyan A. A., *Orthogonal series*, 2nd ed., Izd. Nauchno-Issled. Aktuarno-Finans. Tsentra (AFTs), Moscow, 1999.

[2] Lomnicki Z., Ulam S. E., "Sur la theorie de la mesure dans les espaces combinatoires et son application au calcul des probabilites. I. Variables independantes", *Fundamenta Mathematicae*, **23**:1 (1934), 237–278.

[3] De Rham G., "On Some Curves Defined by Functional Equations", *Classics on Fractals*, ed. Gerald A. Edgar, Addison-Wesley, 1993, 285–298.

[4] Levy P., "Plane or Space Curves and Surfaces Consisting of Parts Similar to the Whole", *Classics on Fractals*, ed. Gerald A. Edgar, Addison-Wesley, 1993, 180–239.

Timofeev E. A., "The Expansion of Self-similar Functions in the Faber–Schauder System", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:4 (2017), 508–515.

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-4-508-515

Abstract. Let $\Omega = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ be a space of right-sided infinite sequences drawn from a finite alphabet $\mathcal{A} = \{0,1\}$, $\mathbb{N} = \{1,2,\dots\}$. Let

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k| 2^{-k}$$

be a metric on $\Omega = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, and μ the Bernoulli measure on Ω with probabilities $p_0, p_1 > 0$, $p_0 + p_1 = 1$. Denote by $B(\boldsymbol{x},\omega)$ an open ball of radius r centered at $\boldsymbol{\omega}$. The main result of this paper is

$$\mu\left(B(\boldsymbol{\omega},r)\right) = r + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{2^n-1} \mu_{n,j}(\boldsymbol{\omega})\tau(2^n r - j),$$

where $\tau(x) = 2\min\{x, 1-x\}$, $0 \le x \le 1$, ($\tau(x) = 0$, if $x < 0$ or $x > 1$),

$$\mu_{n,j}(\boldsymbol{\omega}) = \left(1 - p_{\omega_{n+1}}\right) \prod_{k=1}^{n} p_{\omega_k \oplus j_k}, \quad j = j_1 2^{n-1} + j_2 2^{n-2} + \dots + j_n.$$

The family of functions $1, x, \tau(2^n r - j)$, $j = 0, 1, \dots, 2^n - 1$, $n = 0, 1, \dots$, is the Faber–Schauder system for the space $C([0,1])$ of continuous functions on $[0,1]$. We also obtain the Faber–Schauder expansion for the Lebesgue's singular function, Cezaro curves, and Koch–Peano curves.

Keywords: Faber–Schauder system, Haar wavelet, self-similar, Lebesgue's function

On the authors:
Evgeniy A. Timofeev, orcid.org/0000-0002-0980-2507, ScD, professor
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl, 150003, Russia, e-mail: timofeevEA@gmail.com