

УДК 517.9

Полиномиальный метод построения равновесных конфигураций точечных вихрей на плоскости

Демина М. В., Кудряшов Н. А.¹

Национальный Исследовательский Ядерный Университет "МИФИ"

e-mail: mvdemina@mephi.ru, nakudr@gmail.com

получена 12 сентября 2012

Ключевые слова: точечные вихри, статические конфигурации, равномерно движущиеся конфигурации

Рассматривается вопрос построения и классификации статических и равномерно движущихся конфигураций точечных вихрей на плоскости при произвольном выборе интенсивностей вихрей. Дается детальное описание полиномиального метода, позволяющего находить любую такую конфигурацию. Проводится классификация статических конфигураций для вихрей с интенсивностями Γ , $-\mu\Gamma$ при условии, что μ – целое число, а количество вихрей не превышает десяти. Получены новые конфигурации.

1. Введение

Движение M бесконечно тонких прямолинейных параллельных вихревых нитей с интенсивностями $\Gamma_1, \dots, \Gamma_M$ в безграничной идеальной жидкости описывается системой уравнений Гельмгольца

$$\frac{dz_k^*}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=1}^M \frac{\Gamma_m}{z_k - z_m}, \quad k = 1, \dots, M. \quad (1)$$

Здесь $z_k(t)$ – комплекснозначная функция, определяющая положение точки пересечения вихревой нити с перпендикулярной плоскостью в момент времени t . Символом $*$ обозначено комплексное сопряжение, а штрих у знака суммы означает, что необходимо исключить случай $m = k$. Хорошо известно, что система (1) неинтегрируема для четырех и более вихрей при произвольном выборе интенсивностей [1]. В связи с этим большое значение имеет задача построения точных решений системы (1), к которым, в частности, относят статические и равномерно движущиеся конфигурации [1–4].

¹Работа выполнена при поддержке Федеральной целевой программы «Исследование и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007 – 2013 годы. (Государственный контракт № 11.519.11.6036).

Для нахождения статических конфигураций вихрей с равными по модулю интенсивностями В.К. Ткаченко предложил рассматривать полиномы с корнями в позициях вихрей. В.К. Ткаченко получил дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют полиномы [5]. В настоящее время это уравнение принято называть уравнением Ткаченко, а подход – полиномиальным методом. Более простой вывод уравнения Ткаченко предложен Х. Арефом, применившим полиномиальный метод не только для построения статических и равномерно движущихся вихревых конфигураций при равных по модулю интенсивностях, но и для нахождения вращательных конфигураций вихрей с одинаковыми интенсивностями [3]. Основная задача данной работы – обобщить полиномиальный метод для случая вихрей с произвольными интенсивностями.

Заметим, что уравнение Ткаченко довольно неожиданно возникает в, на первый взгляд, не связанной с точечными вихрями области – теории уравнения Кортевега – де Вриза. Для описания рациональных решений уравнения Кортевега – де Вриза М. Адлер и Ю. Мозер ввели семейство полиномов, которые, как оказалось, удовлетворяют уравнению Ткаченко [6]. Связь полиномов, описывающих статические вихревые конфигурации, с некоторыми другими интегрируемыми дифференциальными уравнениями подробно рассматривается в работе [7].

2. Полиномиальный метод

Рассмотрим систему M точечных вихрей с интенсивностями $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$, $M \geq N$. В уравнениях движения (1) положим $dz_k^*/dt = \lambda/(2\pi i)$. Случай $\lambda = 0$ соответствует статическим конфигурациям, а случай $\lambda \neq 0$ – равномерно движущимся. Разобьем вихри на группы в соответствии со значениями их интенсивностей. Обозначим позиции вихрей с интенсивностью Γ_j через $a_1^{(j)}, \dots, a_{l_j}^{(j)}$, $j = 1, \dots, N$ и введем характеристические полиномы

$$P_j(z) = \prod_{i=1}^{l_j} (z - a_i^{(j)}), \quad j = 1, \dots, N. \quad (2)$$

Точки $a_i^{(j)}$ при $\lambda \neq 0$ можно рассматривать как мгновенные позиции вихрей. Таким образом, корни полинома $P_j(z)$ задают позиции вихрей с интенсивностью Γ_j . Заметим, что полиномы $P_j(z)$, $j = 1, \dots, N$ не имеют кратных и совпадающих корней. Кроме того, справедливо равенство $M = l_1 + \dots + l_N$, $M \geq N$. Подстановка выражения $dz_k^*/dt = \lambda/(2\pi i)$ в уравнения движения (1) дает

$$\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{l_j} \frac{\Gamma_j}{a_{i_0}^{(j_0)} - a_i^{(j)}} = \lambda, \quad i_0 = 1, \dots, l_{j_0}, \quad j_0 = 1, \dots, N, \quad (3)$$

где в сумме необходимо исключить случай $(j_0, i_0) = (j, i)$. Используя свойства логарифмической производной, нетрудно убедиться в справедливости равенств

$$P_{j,z} = P_j \sum_{i=1}^{l_j} \frac{1}{z - a_i^{(j)}}, \quad P_{j,zz} = 2P_j \sum_{i=1}^{l_j} \sum_{k=1}^{l_j} \frac{1}{(z - a_i^{(j)})(a_i^{(j)} - a_k^{(j)})}. \quad (4)$$

Далее, пусть переменная z стремится к одному из корней полинома $P_{j_0}(z)$. Вычисляя предел при $z \rightarrow a_{i_0}^{(j_0)}$ в выражении для $P_{j_0,zz}$, находим

$$P_{j_0,zz}(a_{i_0}^{(j_0)}) = 2P_{j_0,z}(a_{i_0}^{(j_0)}) \sum_{i=1}^{l_{j_0}} \frac{1}{a_{i_0}^{(j_0)} - a_i^{(j_0)}}. \quad (5)$$

Используя равенства (3), (4), получаем соотношения

$$\Gamma_{j_0} \frac{P_{j_0,zz}(a_{i_0}^{(j_0)})}{P_{j_0,z}(a_{i_0}^{(j_0)})} = -2 \sum_{j=1, j \neq j_0}^N \Gamma_j \frac{P_{j,z}(a_{i_0}^{(j_0)})}{P_j(a_{i_0}^{(j_0)})} + 2\lambda, \quad i_0 = 1, \dots, l_{j_0}, \quad j_0 = 1, \dots, N, \quad (6)$$

справедливые для каждого корня $a_{i_0}^{(j_0)}$ полинома $P_{j_0}(z)$. Используя равенства (5), (6), мы видим, что полином

$$\prod_{i=1}^N P_i(z) \left\{ \sum_{j=1}^N \Gamma_j^2 \frac{P_{j,zz}}{P_j} + 2 \sum_{k < j} \Gamma_k \Gamma_j \frac{P_{k,z}}{P_k} \frac{P_{j,z}}{P_j} - 2\lambda \sum_{j=1}^N \Gamma_j \frac{P_{j,z}}{P_j} \right\} \quad (7)$$

степени $M - 1$ ($\lambda \neq 0$) или $M - 2$ ($\lambda = 0$) имеет M корней $a_i^{(j)}$, $i = 1, \dots, l_j$, $j = 1, \dots, N$. Следовательно, этот полином есть тождественный ноль. Таким образом, характеристические полиномы $P_j(z)$, $j = 1, \dots, N$ рассматриваемых конфигураций удовлетворяют уравнению

$$\prod_{i=1}^N P_i(z) \left\{ \sum_{j=1}^N \Gamma_j^2 \frac{P_{j,zz}}{P_j} + 2 \sum_{k < j} \Gamma_k \Gamma_j \frac{P_{k,z}}{P_k} \frac{P_{j,z}}{P_j} - 2\lambda \sum_{j=1}^N \Gamma_j \frac{P_{j,z}}{P_j} \right\} = 0. \quad (8)$$

Это уравнение позволяет доказать справедливость обратного утверждения. Если полиномы $P_j(z)$, $j = 1, \dots, N$, не имеющие кратных и совпадающих корней, удовлетворяют уравнению (8), то корни этих полиномов определяют положения вихрей с интенсивностями Γ_j , $j = 1, \dots, N$ в статическом ($\lambda = 0$) или равномерно движущемся ($\lambda \neq 0$) равновесии.

Уравнение (8) позволяет довольно просто найти необходимые условия существования соответствующих конфигураций. Разложим функцию (7) в ряд Лорана в окрестности бесконечности и приравняем нулю коэффициент при старшей степени. В результате получим

$$\lambda = 0 : \quad \sum_{j=1}^N l_j \Gamma_j^2 - \left\{ \sum_{j=1}^N l_j \Gamma_j \right\}^2 = 0, \quad \lambda \neq 0 : \quad \sum_{j=1}^N l_j \Gamma_j = 0. \quad (9)$$

Таблица 1. Значения параметров M , l_1 , l_2 , μ для статических конфигураций, описываемых уравнением (10) при $M \leq 10$ и $\mu \in \mathbb{N}$.

$M = l_1 + l_2$	3	4	4	6	8	9	9	9	10	10	10	10
l_1	1	1	3	5	7	3	6	6	5	8	8	9
l_2	2	3	1	1	1	6	3	3	5	2	2	1
μ	2	1	1	2	3	1	1	5	2	2	14	4

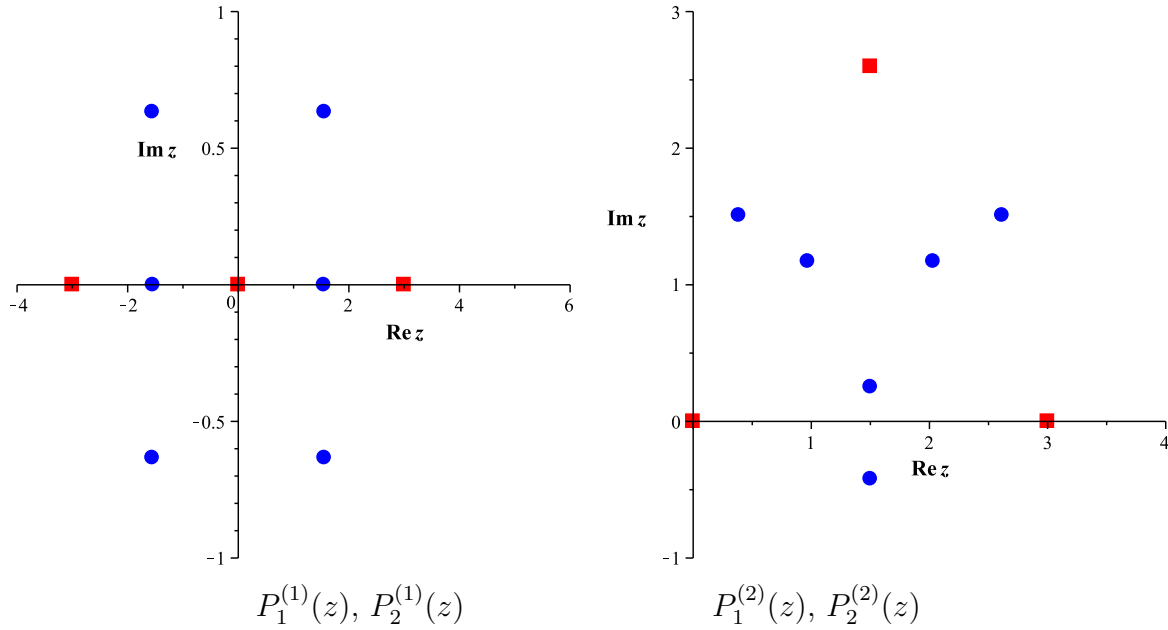


Рис. 1. Точечные вихри в статическом равновесии. Кружками отмечены вихри с интенсивностью Γ , а квадратами – с интенсивностью -5Γ

Далее подробно рассмотрим случай $N = 2$. Если $\Gamma_1 = \Gamma$, $\Gamma_2 = -\Gamma$, то уравнение (8) называют уравнением Ткаченко при $\lambda = 0$ и обобщенным уравнением Ткаченко при $\lambda \neq 0$. Пусть $\Gamma_1 = \Gamma$, $\Gamma_2 = -\mu\Gamma$, тогда уравнение (8) при $N = 2$, $\lambda = 0$ примет вид

$$P_{1,zz}P_2 - 2\mu P_{1,z}P_{2,z} + \mu^2 P_1P_{2,zz} = 0. \quad (10)$$

Полиномиальные решения этого уравнения хорошо изучены только в двух случаях $\mu = 1$ и $\mu = 2$. Используя уравнение (10), проведем классификацию статических конфигураций, если количество вихрей $M = l_1 + l_2 \leq 10$ и $\mu \in \mathbb{N}$. Необходимое условие (9) в этом случае выглядит следующим образом

$$l_1(l_1 - 1) - 2\mu l_1 l_2 + \mu^2 l_2(l_2 - 1) = 0. \quad (11)$$

Решая Диофантово уравнение (11), получаем 12 троек натуральных чисел l_1 , l_2 , μ , которые приведены в таблице 1. Полиномиальные решения при $\mu = 1$, $\mu = 2$ известны (см. [5–8]). Уравнение (10) инвариантно относительно преобразования $z \mapsto \alpha z + \beta$, $\alpha \neq 0$, поэтому, без ограничения общности, будем считать, что полином $P_2(z)$ всегда имеет ноль в начале координат. В таблице 2 приведены новые полиномиальные решения уравнения (10). Если $c_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, то эти параметры можно убрать преобразованиями поворота и растяжения. Корни полиномов из таблицы 2 при $c_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$ определяют положения точечных вихрей с интенсивностями Γ и $-\mu\Gamma$ в статическом равновесии. Конфигурации при $\mu = 5$ изображены на рисунке 1.

Таблица 2. Некоторые полиномиальные решения уравнения (10).

$\mu = 3$	$P_1(z) = z^7 + c_1$	$P_2(z) = z$
$\mu = 4$	$P_1(z) = z^9 + c_1$	$P_2(z) = z$
$\mu = 5$	$P_1^{(1)}(z) = z^6 - \frac{5}{7}b_1^2z^4 + \frac{5}{23}b_1^4z^2 - \frac{3}{115}b_1^6$	$P_2^{(1)}(z) = z(z^2 - b_1^2)$
$\mu = 5$	$P_1^{(2)}(z) = z^6 - 2(\kappa + 1)b_1z^5 + 5\kappa b_1^2z^4 - \frac{25\sqrt{3}}{11}ib_1^3z^3 + \frac{20}{11}(\kappa - 1)b_1^4z^2 - \frac{3}{11}(\kappa - 2)b_1^5z - \frac{3}{55}b_1^6$	$P_2^{(2)}(z) = z(z^2 - (\kappa + 1)b_1z + \kappa b_1^2),$ $\kappa = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)$
$\mu = 14$	$P_1(z) = z^8 - 4b_1z^7 + \frac{308}{43}b_1^2z^6 - \frac{322}{43}b_1^3z^5 + \frac{644}{129}b_1^4z^4 - \frac{280}{129}b_1^5z^3 + \frac{3640}{6063}b_1^6z^2 - \frac{195}{2021}b_1^7z + \frac{195}{28294}b_1^8$	$P_2(z) = z(z - b_1)$

3. Заключение

В работе выведены обыкновенные дифференциальные уравнения, позволяющие находить любую статическую и равномерно движущуюся конфигурацию точечных вихрей на плоскости при произвольном выборе их интенсивностей. С помощью полученного уравнения классифицированы статические конфигурации точечных вихрей с интенсивностями Γ , $-\mu\Gamma$ при условии, что μ – целое число, а количество вихрей не превышает десяти. Среди найденных конфигураций имеются новые.

Список литературы

1. Борисов А.В., Мамаев И.С. Математические методы динамики вихревых структур. Москва; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2005. 368 с.
2. Kadtko H.B., Campbell L. J. Method for finding stationary states of point vortices // Phys. Rev. 1987. A 36. P. 4360–4370.
3. Aref H. Relative equilibria of point vortices and the fundamental theorem of algebra // Proc. R. Soc. A. 2011. 467. P. 2168–2184.
4. O'Neil K.A. Minimal polynomial systems for point vortex equilibria // Physica D. 2006. 219. P. 69–79.
5. Ткаченко В.К. О вихревых решетках // ЖЭТФ. 1965. Т. 49. Вып. 6(12). 1875–1883.
6. Adler M., Moser J. On a class of polynomials connected with the Korteweg – de Vries equation // Commun. Math. Phys. 1978. 61. P. 1–30.
7. Demina M.V., Kudryashov N.A. Point vortices and polynomials of the Sawada – Kotera and Kaup – Kupershmidt equations // R&C Dynamics. 2011. 16(6). P. 562 – 576.

8. *Demina M.V., Kudryashov N.A.* Vortices and polynomials: non-uniqueness of the Adler–Moser polynomials for the Tkachenko equation // J. Phys. A: Math. Theor. 2012. 45. P. 195–205.

Polynomial Method for Constructing Equilibrium Configurations of Point Vortices in the Plane

Demina M. V., Kudryashov N. A.

Keywords: point vortices, stationary configurations, translating configurations

The problem of constructing and classifying stationary and translating configurations of point vortices with an arbitrary choice of circulations is studied. The polynomial method enabling one to find any such configuration is described in detail. Stationary configurations for vortex systems with circulations Γ , $-\mu\Gamma$ are classified in the case of integer μ . New configurations are obtained.

Сведения об авторах:

Демина Мария Владимировна,

Национальный Исследовательский Ядерный Университет "МИФИ",
кандидат физико-математических наук, доцент;

Кудряшов Николай Алексеевич,

Национальный Исследовательский Ядерный Университет "МИФИ",
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой