

УДК 517.9

Автоколебания решеток нелинейных элементов в опыте Скотта

Бобок А. С., Глызин С. Д.¹

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: alboneto@gmail.com, glyzin@uniyar.ac.ru

получена 12 сентября 2012

Ключевые слова: автоколебания, нормальная форма, резонансы, буферность

Выполнен бифуркационный анализ динамической системы, моделирующей решетку взаимодействующих осцилляторов в опыте Скотта. Рассмотрен нерезонансный случай.

1. Постановка задачи

Понятие турбулентной буферности введено в статье [1], под ним авторы понимают феномен, возникающий в некоторых динамических системах с бесконечномерным фазовым пространством, который характеризуется ростом количества сосуществующих устойчивых инвариантных торов и размерностей аттракторов на этих торах при изменении управляющих параметров.

Данный феномен очевидным образом связан со сценарием перехода к турбулентности по Ландау [2,3] и наблюдается, например, когда при уменьшении вязкости или какого-либо другого параметра возникают все новые и новые цепочки бифуркаций инвариантных торов

$$T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow \dots \rightarrow T_N \rightarrow T_{N+1} \rightarrow \dots \quad (1)$$

на каждом из которых имеется хаотический аттрактор возрастающей с ростом N размерности.

Простейшей физической системой, в которой возможна турбулентная буферность, является двумерный прямоугольный массив идентичных осцилляторов, каждый из которых взаимодействует со своими соседями. Следуя работам [2,4,5], предположим, что рассматриваемый массив имеет размер $N_1 \times N_2$, где N_1, N_2 — пока произвольные натуральные числа, и состоит из одинаковых ячеек показанного на

¹Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства РФ по постановлению № 220, договор № 11.G34.31.0053 и при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашения 14.B37.21.0457 и 14.B37.21.2016.

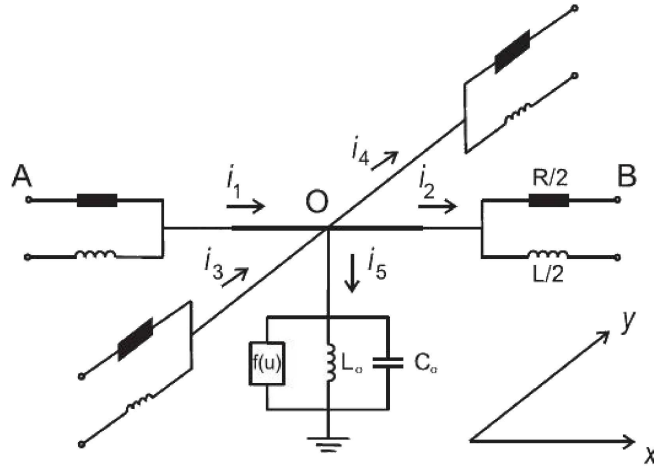


Рис. 1.

рис. 1 вида. Считаем, что центр O каждой такой ячейки связан с землей посредством параллельно подключенных конденсатора C_0 , индуктивности L_0 и туннельного диода с вольт-амперной характеристикой $i = f(u)$. Сами же ячейки взаимодействуют между собой через параллельно подсоединенные индуктивности L и активные сопротивления R .

Вывод математической модели описанной системы приведен в [2]. Коротко воспроизведем его. Для этого фиксируем ячейку с номерами n, m и обозначим через $u_{n,m}(t)$ — напряжение в ее узле O . Применяя первый закон Кирхгофа для этого узла, имеем равенство

$$i_1 + i_2 - i_3 - i_4 - i_5 = 0, \quad (2)$$

где i_k , $k = 1, \dots, 5$ — соответствующие токи (см. рис. 1). Ток i_5 представляет собой сумму токов, текущих через конденсатор C_0 , индуктивность L_0 и туннельный диод, и вследствие этого записывается в виде

$$i_5 = C_0 \dot{u}_{n,m}(t) + f(u_{n,m}(t)) + \frac{1}{L_0} \int u_{n,m} dt. \quad (3)$$

Остальные токи в силу закона Ома для участков цепи задаются равенствами

$$\begin{aligned} i_1 &= -\frac{1}{L} \int (u_{n,m} - u_{n-1,m}) dt - \frac{1}{R} (u_{n,m} - u_{n-1,m}), \\ i_2 &= -\frac{1}{L} \int (u_{n+1,m} - u_{n,m}) dt - \frac{1}{R} (u_{n+1,m} - u_{n,m}), \\ i_3 &= -\frac{1}{L} \int (u_{n,m} - u_{n,m-1}) dt - \frac{1}{R} (u_{n,m} - u_{n,m-1}), \\ i_4 &= -\frac{1}{L} \int (u_{n,m+1} - u_{n,m}) dt - \frac{1}{R} (u_{n,m+1} - u_{n,m}). \end{aligned} \quad (4)$$

Соотношения (2) – (4) позволяют выписать систему, связывающую напряжения $u_{n,m}(t)$, $n = 1, \dots, N_1$, $m = 1, \dots, N_2$ в узлах массива. Действительно, подставляя формулы (3), (4) в (2) и дифференцируя результат по t , приходим к уравнениям

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{L}(u_{n+1,m} - 2u_{n,m} + u_{n-1,m}) + \frac{1}{L}(u_{n,m+1} - 2u_{n,m} + u_{n,m-1}) + \\
& + \frac{1}{R}(\dot{u}_{n+1,m} - 2\dot{u}_{n,m} + \dot{u}_{n-1,m}) + \frac{1}{R}(\dot{u}_{n,m+1} - 2\dot{u}_{n,m} + \dot{u}_{n,m-1}) = \\
& = C_0\ddot{u}_{n,m} + \frac{d}{dt}f(u_{n,m}) + \frac{1}{L_0}u_{n,m}, \quad n = 1, \dots, N_1, \quad m = 1, \dots, N_2.
\end{aligned} \tag{5}$$

Получившуюся систему (5) следует дополнить какими-либо граничными условиями. В работе [4] рассматривалась ситуация, когда две смежные стороны граничного прямоугольника заземлены, а две другие — свободны, а в [5] изучался случай трех заземленных сторон и одной свободной. Мы же, следуя [8], остановимся на двух простейших вариантах, в первом из которых предполагаем, что заземлены все граничные ячейки

$$u_{N_1+1,m} = u_{0,m} = 0, \quad m = 1, \dots, N_2; \quad u_{n,N_2+1} = u_{n,0} = 0, \quad n = 1, \dots, N_1, \tag{6}$$

а во втором, что все они свободны

$$\begin{aligned}
u_{0,m} &= u_{1,m}, \quad u_{N_1+1,m} = u_{N_1,m}, \quad m = 1, \dots, N_2; \\
u_{n,0} &= u_{n,1}, \quad u_{n,N_2+1} = u_{n,N_2}, \quad n = 1, \dots, N_1.
\end{aligned} \tag{7}$$

Для моделирования опыта Скотта можно рассматривать систему (5) с краевыми условиями (6) или (7), однако для сопоставления наших результатов с результатами статьи [2] выполним предложенные в данной работе нормирующие замены. Предполая, что каждая отдельно взятая ячейка массива имеет одинаковые линейные размеры $h \times h$ по осям x, y , будем считать (см. [4], [6])

$$C_0 = C_{0,*}h^2, \quad L_0 = L_{0,*}/h^2, \quad R = R_*, \quad L = L_*, \quad f(u) = -h^2G_*(u - u^3/3), \tag{8}$$

где электрические параметры $C_{0,*}, L_{0,*}, R_*, L_*, G_*$ уже не зависят от h . Тем самым, для введения координат x, y фиксируем произвольно постоянные $a_1, a_2 > 0$ и положим

$$N_1 = \left[\frac{a_1}{h} \right], \quad N_2 = \left[\frac{a_2}{h} \right] \quad ([*] — \text{целая часть}), \tag{9}$$

тогда можно считать, что узлу O ячейки с номерами n, m соответствует точка $(x, y) = (nh, mh)$.

Указанный способ введения x, y позволяет перейти от (5), (6) или (5), (7) к соответствующей распределенной модели. Если поделить каждое уравнение системы (5) на h^2 и устремить параметр h к нулю, то для распределенного напряжения $u = u(t, x, y)$ получаем уравнение

$$C_{0,*}u_{tt} - \varepsilon u_t + \frac{1}{L_{0,*}}u = \frac{1}{L_*}\Delta u + \frac{1}{R_*}\frac{\partial}{\partial t}\Delta u, \tag{10}$$

в области $\Omega_0 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a_1, 0 \leq y \leq a_2\}$. После нормирующих замен

$$t/\sqrt{L_{0,*}C_{0,*}} \rightarrow t, \quad x/a_1 \rightarrow x, \quad y/a_2 \rightarrow y$$

от (10) переходим к краевой задаче

$$u_{tt} - \varepsilon u_t - \varepsilon \nu \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}u + u = \mathcal{L}u - \varepsilon u^2 u_t, \quad (11)$$

в области $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, где $\mathcal{L} = \sigma_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \sigma_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\varepsilon = G_* \sqrt{\frac{L_{0,*}}{C_{0,*}}}$, $\nu = \frac{\sqrt{L_*}}{R_* G_* \sqrt{L_{0,*}}}$, $\sigma_j = \frac{\sqrt{L_{0,*}}}{a_j \sqrt{L_*}}$, $j = 1, 2$, с краевыми условиями Дирихле или Неймана.

В работе [2] для краевой задачи (11) с условиями Дирихле показано, что при некоторых условиях на параметры σ_1 , σ_2 и при согласованном стремлении к нулю ε и ν в ней реализуется турбулентная буферность. Нашей целью является изучение разностного аналога (11)

$$\frac{\partial^2 u_{n,m}}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{\partial u_{n,m}}{\partial t} - \varepsilon \nu \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}^* u_{n,m} + u_{n,m} = \mathcal{L}^* u_{n,m} - \varepsilon u_{n,m}^2 \frac{\partial u_{n,m}}{\partial t}, \quad (12)$$

где $\mathcal{L}^* u_{n,m} = (\sigma_1^2 (u_{n+1,m} - 2u_{n,m} + u_{n-1,m}) + \sigma_2^2 (u_{n,m+1} - 2u_{n,m} + u_{n,m-1}))/h^2$, ε — малый параметр и выполнены равенства (6) или (7).

Исследование этих задач выполним стандартными средствами локального анализа, в частности, будем использовать метод нормальных форм, вариант алгоритма построения которых изложен в работе [9].

2. Нормальная форма и асимптотики устойчивых режимов решеток автогенераторов Скотта

2.1. Решетки Скотта с краевыми условиями Неймана

Нахождение асимптотик решений системы (12) – (7) и определение их устойчивости начнем с выбора собственных решений линейной части нашей системы. Для этого рассмотрим исследуемую систему при $\varepsilon = 0$. Нетрудно показать, что она допускает тригонометрические решения вида

$$u_{k,j}(t) = \exp(\pm i \omega_{n,m} t) e_{n,m}(k, j), \quad e_{n,m}(k, j) = 2 \cos \frac{\pi n (k - \frac{1}{2})}{N_1} \cos \frac{\pi m (j - \frac{1}{2})}{N_2}, \quad (13)$$

$$n = 0, \dots, N_1 - 1, \quad m = 0, \dots, N_2 - 1, \quad k = 1, \dots, N_1, \quad j = 1, \dots, N_2,$$

$$\text{где } \omega_{n,m} = \sqrt{1 + 2\delta_1^2 \left(1 - \cos \frac{\pi n}{N_1}\right) + 2\delta_2^2 \left(1 - \cos \frac{\pi m}{N_2}\right)}. \quad (14)$$

Отметим, что величины k, j выполняют здесь роль пространственных переменных, при этом справедливо следующее утверждение

Лемма 1. *Набор векторов $e_{n,m}$, $n = 0, \dots, N_1 - 1$, $m = 0, \dots, N_2 - 1$, определяемый формулами (13), линейно независим и образует базис в фазовом пространстве системы (12) – (7).*

Всюду далее будем считать, что, как и в [4], [5], $N_1 = N_2 = 4$. Для исследования локальной динамики системы (12) – (7) в окрестности нулевого решения при фиксированном $\nu > 0$ и достаточно малом $0 < \varepsilon \ll 1$ выполним стандартную замену метода нормальных форм (см. [9])

$$u_{k,j}(t, \tau, \varepsilon) = u_0(t, \tau, k, j) + \varepsilon u_1(t, \tau, k, j) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t, \quad k, j = 1, \dots, 4. \quad (15)$$

Здесь

$$u_0(t, \tau, k, j) = \sum_{n,m=1}^4 [z_{n,m}(\tau) \exp(i\omega_{n,m}t) + \bar{z}_{n,m}(\tau) \exp(-i\omega_{n,m}t)] e_{n,m}(k, j), \quad (16)$$

причем $z_{n,m}$ — пока неизвестные подлежащие определению амплитуды.

В данной работе обратимся лишь к нерезонансному случаю, т.е. выберем параметры σ_1, σ_2 таким образом, чтобы исключить всевозможные резонансы третьего порядка между собственными частотами $\omega_{n,m}$, иначе говоря, исключим одновременное выполнение равенств вида $\omega_{n_0,m_0} = s_1\omega_{n_1,m_1} + s_2\omega_{n_2,m_2} + s_3\omega_{n_3,m_3}$, $n_0 = \pm n_1 \pm n_2 \pm n_3$, $m_0 = \pm m_1 \pm m_2 \pm m_3$ для любых наборов индексов n_k, m_k , $k = 0, \dots, 3$, таких что $(s_1, s_2, s_3): |s_1| + |s_2| + |s_3| = 3$ и при любой расстановке знаков во втором и третьем соотношениях. Тожественные резонансы $\omega_{n_0,m_0} = \omega_{n_0,m_0} + \omega_{n_1,m_1} - \omega_{n_1,m_1}$ из рассмотрения, естественно, исключаются.

После подстановки (15) в краевую задачу (12) – (7) приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях ε , после чего на первом шаге получаем верное тождество, а на втором приходим к следующей краевой задаче для $u_1(t, \tau, k, j)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + u_1 - \mathcal{L}^* u_1 &= \frac{\partial}{\partial t} \left[u_0 + \nu \mathcal{L}^* u_0 - \frac{u_0^3}{3} - 2 \frac{\partial u_0}{\partial \tau} \right], \\ u_1(0, j) &= u_1(1, j), \quad u_1(4, j) = u_1(5, j), \quad u_1(k, 0) = u_1(k, 1), \quad u_1(k, 4) = u_1(k, 5), \\ &k = 1, \dots, 4, \quad j = 1, \dots, 4. \end{aligned} \quad (17)$$

Система (17) разрешима в классе периодических по t функций в том и только в том случае, если в неоднородности отсутствуют гармоники вида (13). Приравнивая коэффициенты при этих гармониках к нулю, приходим к системе относительно неизвестных комплексных амплитуд $z_{n,m}$

$$\begin{aligned} 2 \frac{dz_{n,m}}{d\tau} &= (1 - \nu(\omega_{n,m}^2 - 1))z_{n,m} - \frac{9}{4}z_{n,m}|z_{n,m}|^2 - 3 \sum_{k=0, k \neq n}^3 z_{n,m}|z_{k,m}|^2 - \\ &- 3 \sum_{s=0, s \neq m}^3 z_{n,m}|z_{n,s}|^2 - 2 \sum_{k,s=0, k \neq n, s \neq m}^3 z_{n,m}|z_{k,s}|^2, \quad n = 0, \dots, 3, \quad m = 0, \dots, 3. \end{aligned} \quad (18)$$

Воспользовавшись заменой $z_{n,m} = \rho_{n,m} \exp(i\varphi_{n,m})$, приходим к следующей системе, с которой и будем иметь дело в дальнейшем:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{n,m}}{d\tau} &= (1 - \nu(\omega_{n,m}^2 - 1))\rho_{n,m} - \frac{9}{4}\rho_{n,m}^3 - 3\rho_{n,m} \sum_{k=0, k \neq n}^3 \rho_{k,m}^2 - \\ &- 3\rho_{n,m} \sum_{s=0, s \neq m}^3 \rho_{n,s}^2 - 2\rho_{n,m} \sum_{k,s=0, k \neq n, s \neq m}^3 \rho_{k,s}^2, \quad n = 0, \dots, 3, \quad m = 0, \dots, 3. \end{aligned} \quad (19)$$

В статье [2] система (19) рассмотрена в бесконечномерном случае, как оказалось, исследование ее нулевого состояния равновесия и однокомпонентных режимов можно выполнить по аналогии с [2]. Задача поиска условий существования и устойчивости многокомпонентных состояний равновесия в данном случае имеет существенную специфику, поэтому остановимся именно на ней.

Сначала рассмотрим режимы с двумя ненулевыми компонентами $\rho_{p,q} \neq 0$, $\rho_{r,s} \neq 0$, $\rho_{i,j} = 0$, $i, j = 0, \dots, 3$, $i \neq p \vee j \neq q$, $i \neq r \vee j \neq s$. Имеем

$$\begin{aligned}\rho_{p,q}^2 &= \frac{4(4C_{(p,q)(r,s)}(1 - \nu(\omega_{r,s}^2 - 1)) - 9(1 - \nu(\omega_{p,q}^2 - 1)))}{16C_{(p,q)(r,s)}^2 - 81}, \\ \rho_{r,s}^2 &= \frac{4(4C_{(p,q)(r,s)}(1 - \nu(\omega_{p,q}^2 - 1)) - 9(1 - \nu(\omega_{r,s}^2 - 1)))}{16C_{(p,q)(r,s)}^2 - 81}, \\ C_{(p,q)(r,s)} &= 3, \quad p = r \vee q = s, \quad C_{(p,q)(r,s)} = 2, \quad p \neq r \wedge q \neq s.\end{aligned}\tag{20}$$

Линеаризуя систему (19) на состоянии равновесия (20), получаем 16×16 матрицу с коэффициентами

$$\begin{aligned}\alpha_{(p,q),(p,q)} &= -\frac{9}{2}\rho_{p,q}^2, \quad \alpha_{(r,s),(r,s)} = -\frac{9}{2}\rho_{r,s}^2, \\ \alpha_{(p,q),(r,s)} &= -2C_{(p,q)(r,s)}\rho_{p,q}\rho_{r,s}, \quad \alpha_{(r,s),(p,q)} = -2C_{(p,q)(r,s)}\rho_{p,q}\rho_{r,s}, \\ \alpha_{(i,j),(i,j)} &= (1 - \nu(\omega_{i,j}^2 - 1)) - C_{(p,q)(i,j)}\rho_{p,q}^2 - C_{(r,s)(i,j)}\rho_{r,s}^2, \\ i \neq p \vee j \neq q, \quad i \neq r \vee j \neq s, \\ \alpha_{(i,j),(k,l)} &= 0, \\ i \neq p \vee j \neq q, \quad i \neq r \vee j \neq s, \quad i \neq k, j \neq l, \\ i &= 0, \dots, 3, j = 0, \dots, 3.\end{aligned}\tag{21}$$

Анализ собственных значений этой матрицы приводит к следующему условию устойчивости состояний равновесия (20) :

$$\begin{aligned}(1 - \nu(\omega_{i,j}^2 - 1)) &< \frac{8}{17 + 4(C_{(p,q)(r,s)} - 2)}((1 - \nu(\omega_{p,q}^2 - 1)) + (1 - \nu(\omega_{r,s}^2 - 1))), \\ \forall i \neq p \vee j \neq q, \quad i \neq r \vee j \neq s, \quad i &= 0, \dots, 3, j = 0, \dots, 3,\end{aligned}\tag{22}$$

из которого нетрудно получить условие сосуществования максимального числа таких устойчивых режимов

$$(1 - \nu(\omega_{3,3}^2 - 1)) < \frac{16}{21}(1 - \nu(\omega_{0,0}^2 - 1)).\tag{23}$$

Полученные результаты позволяют сформулировать следующее утверждение

Теорема 1. Пусть для краевой задачи (12) – (7) выполнено условие (23), где $\omega_{0,0}, \omega_{3,3}$ задаются равенством (14), тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для всех $0 < \varepsilon <$

ε_0 задача (12) – (7) имеет ровно 120 орбитально асимптотически устойчивых торов, асимптотика которых задается следующей формулой:

$$\begin{aligned}
 u(t, k, j) = & 2 \sqrt{\frac{4C_{(p,q)(r,s)}(1 - \nu(\omega_{r,s}^2 - 1)) - 9(1 - \nu(\omega_{p,q}^2 - 1))}{16C_{(p,q)(r,s)}^2 - 81}} \cos(\omega_{p,q}t + \varphi_{p,q}) \times \\
 & \times \cos \frac{\pi p(k - \frac{1}{2})}{4} \cos \frac{\pi q(j - \frac{1}{2})}{4} + 2 \sqrt{\frac{4C_{(r,s)(p,q)}(1 - \nu(\omega_{p,q}^2 - 1)) - 9(1 - \nu(\omega_{r,s}^2 - 1))}{16C_{(r,s)(p,q)}^2 - 81}} \times \\
 & \times \cos(\omega_{r,s}t + \varphi_{r,s}) \cos \frac{\pi r(k - \frac{1}{2})}{4} \cos \frac{\pi s(j - \frac{1}{2})}{4} + O(\varepsilon), \\
 & p = 0, \dots, 3, \quad q = 0, \dots, 3, \quad r = 0, \dots, 3, \quad s = 0, \dots, 3. \quad (24)
 \end{aligned}$$

Обратимся теперь к случаю, когда число ненулевых компонент в состоянии равновесия превышает 2: $\rho_{p_1, q_1} \neq 0, \dots, \rho_{p_m, q_m} \neq 0, m \geq 3$. Компоненты матрицы устойчивости имеют в этом случае вид

$$\begin{aligned}
 \alpha_{(p_1, q_1), (p_1, q_1)} &= -\frac{9}{2} \rho_{p_1, q_1}^2, \quad \alpha_{(p_2, q_2), (p_2, q_2)} = -\frac{9}{2} \rho_{p_2, q_2}^2, \\
 &\dots, \\
 \alpha_{(p_1, q_1), (p_2, q_2)} &= -2C_{(p_1, q_1)(p_2, q_2)} \rho_{p_1, q_1} \rho_{p_2, q_2}, \quad \alpha_{(p_2, q_2), (p_1, q_1)} = -2C_{(p_2, q_2)(p_1, q_1)} \rho_{p_2, q_2} \rho_{p_1, q_1}, \\
 &\dots, \\
 \alpha_{(p_1, q_1), (i, j)} &= 0, \quad \alpha_{(p_2, q_2), (i, j)} = 0, \\
 &\dots, \\
 \alpha_{(i, j), (i, j)} &= (1 - \nu(\omega_{i, j}^2 - 1)) - \sum_{s=1}^m C_{(p_s, q_s)(i, j)} \rho_{p_s, q_s}^2, \\
 i \neq p_s \bigvee j \neq q_s, & \quad s = 1, \dots, m, \\
 \alpha_{(i, j), (k, l)} &= 0, \\
 i \neq p_s \bigvee j \neq q_s, & \quad s = 1, \dots, m, \quad i \neq k, j \neq l \\
 i = 0, \dots, 3, & \quad j = 0, \dots, 3.
 \end{aligned} \tag{25}$$

В случае, если хотя бы одно из чисел $C_{(p_s, q_s)(p_w, q_w)}$, $s = 1, \dots, m$, $w = 1, \dots, m$, $s \neq w$ равно трем, коэффициенты характеристического уравнения, полученного из (25), имеют разные знаки, что гарантирует неустойчивость соответствующего состояния равновесия. Пользуясь этим условием, заключаем, что неустойчивыми будут все состояния равновесия с числом ненулевых компонент большим либо равным 5. Тем самым, остается рассмотреть случаи $m = 3$ и $m = 4$. Для $m = 3$ также оказывается, что коэффициенты характеристического многочлена имеют разные знаки, что естественно влечет неустойчивость.

Случай $m = 4$ несколько более сложный. Выпишем значения ненулевых компонентов такого состояния равновесия

$$\begin{aligned}\rho_{p_1, q_1}^2 &= \frac{1}{33}(100(1 - \nu(\omega_{p_1, q_1}^2 - 1)) - 32(1 - \nu(\omega_{p_2, q_2}^2 - 1)) - \\ &\quad - 32(1 - \nu(\omega_{p_3, q_3}^2 - 1)) - 32(1 - \nu(\omega_{p_4, q_4}^2 - 1))), \\ \rho_{p_2, q_2}^2 &= \frac{1}{33}(100(1 - \nu(\omega_{p_2, q_2}^2 - 1)) - 32(1 - \nu(\omega_{p_1, q_1}^2 - 1)) - \\ &\quad - 32(1 - \nu(\omega_{p_3, q_3}^2 - 1)) - 32(1 - \nu(\omega_{p_4, q_4}^2 - 1))), \\ \rho_{p_3, q_3}^2 &= \frac{1}{33}(100(1 - \nu(\omega_{p_3, q_3}^2 - 1)) - 32(1 - \nu(\omega_{p_2, q_2}^2 - 1)) - \\ &\quad - 32(1 - \nu(\omega_{p_1, q_1}^2 - 1)) - 32(1 - \nu(\omega_{p_4, q_4}^2 - 1))), \\ \rho_{p_4, q_4}^2 &= \frac{1}{33}(100(1 - \nu(\omega_{p_4, q_4}^2 - 1)) - 32(1 - \nu(\omega_{p_2, q_2}^2 - 1)) - \\ &\quad - 32(1 - \nu(\omega_{p_3, q_3}^2 - 1)) - 32(1 - \nu(\omega_{p_1, q_1}^2 - 1))),\end{aligned}$$

Понятно, что условия существования таких состояний равновесия имеют вид

$$\begin{aligned}100(1 - \nu(\omega_{p_1, q_1}^2 - 1)) - 32(1 - \nu(\omega_{p_2, q_2}^2 - 1)) - \\ - 32(1 - \nu(\omega_{p_3, q_3}^2 - 1)) - 32(1 - \nu(\omega_{p_4, q_4}^2 - 1)) > 0, \\ 100(1 - \nu(\omega_{p_2, q_2}^2 - 1)) - 32(1 - \nu(\omega_{p_1, q_1}^2 - 1)) - \\ - 32(1 - \nu(\omega_{p_3, q_3}^2 - 1)) - 32(1 - \nu(\omega_{p_4, q_4}^2 - 1)) > 0, \\ 100(1 - \nu(\omega_{p_3, q_3}^2 - 1)) - 32(1 - \nu(\omega_{p_2, q_2}^2 - 1)) - \\ - 32(1 - \nu(\omega_{p_1, q_1}^2 - 1)) - 32(1 - \nu(\omega_{p_4, q_4}^2 - 1)) > 0, \\ 100(1 - \nu(\omega_{p_4, q_4}^2 - 1)) - 32(1 - \nu(\omega_{p_2, q_2}^2 - 1)) - \\ - 32(1 - \nu(\omega_{p_3, q_3}^2 - 1)) - 32(1 - \nu(\omega_{p_1, q_1}^2 - 1)) > 0,\end{aligned}\tag{26}$$

Задача об устойчивости данных состояний равновесия распадается на две не зависящие друг от друга части. Коэффициенты первой из них имеют вид

$$\begin{aligned}\alpha_{(p_1, q_1), (p_1, q_1)} &= -\frac{9}{2}\rho_{p_1, q_1}^2, \quad \alpha_{(p_2, q_2), (p_2, q_2)} = -\frac{9}{2}\rho_{p_2, q_2}^2, \\ \dots, \\ \alpha_{(p_1, q_1), (p_2, q_2)} &= -2C_{(p_1, q_1)(p_2, q_2)}\rho_{p_1, q_1}\rho_{p_2, q_2}, \quad \alpha_{(p_2, q_2), (p_1, q_1)} = -2C_{(p_2, q_2)(p_1, q_1)}\rho_{p_2, q_2}\rho_{p_1, q_1}, \\ \dots\end{aligned}\tag{27}$$

а второй —

$$\begin{aligned}\alpha_{(i, j), (i, j)} &= (1 - \nu(\omega_{i, j}^2 - 1)) - \sum_{s=1}^m C_{(p_s, q_s)(i, j)}\rho_{p_s, q_s}^2, \\ i \neq p_s \bigvee j \neq q_s, s &= 1, \dots, 4, \\ \alpha_{(i, j), (k, l)} &= 0, \\ i \neq p_s \bigvee j \neq q_s, s &= 1, \dots, 4, \quad i \neq k, j \neq l \\ i = 0, \dots, 3, j &= 0, \dots, 3.\end{aligned}\tag{28}$$

Все коэффициенты характеристического полинома первой из матриц положительны и имеют вид

$$\begin{aligned} A_0 &= 1; \quad A_1 = \frac{9}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2); \\ A_2 &= \frac{17}{4}(p_1^2 p_2^2 + p_1^2 p_3^2 + p_1^2 p_4^2 + p_2^2 p_3^2 + p_2^2 p_4^2 + p_3^2 p_4^2); \\ A_3 &= \frac{25}{8}(p_1^2 p_2^2 p_3^2 + p_1^2 p_2^2 p_4^2 + p_1^2 p_3^2 p_4^2 + p_2^2 p_3^2 p_4^2); \\ A_4 &= \frac{33}{16}(p_1^2 p_2^2 p_3^2 p_4^2), \end{aligned}$$

позволяющий утверждать, что все корни данного многочлена имеют отрицательные действительные части.

Необходимым и достаточным условием устойчивости второй матрицы являются неравенства

$$\begin{aligned} (1 - \nu(\omega_{i,j}^2 - 1)) &< \frac{8}{33}((1 - \nu(\omega_{p_1,q_1}^2 - 1)) + (1 - \nu(\omega_{p_2,q_2}^2 - 1)) + \\ &+ (1 - \nu(\omega_{p_3,q_3}^2 - 1)) + (1 - \nu(\omega_{p_4,q_4}^2 - 1))), \\ \forall i \neq p_s \bigvee j \neq q_s, \quad s &= 1, \dots, 4, \quad i = 0, \dots, 3, j = 0, \dots, 3, \end{aligned} \quad (29)$$

причем при выполнении условия

$$(1 - \nu(\omega_{3,3}^2 - 1)) < \frac{32}{33}((1 - \nu(\omega_{0,0}^2 - 1))) \quad (30)$$

в системе (19) сосуществует максимальное число описанных выше четырехкомпонентных режимов.

Подведя итог исследования состояний равновесия системы (19) в нерезонансном случае, можно сформулировать дополнительно к теореме 1 следующие два утверждения

Теорема 2. Пусть для краевой задачи (12) – (7) выполнено условие (30), а $\omega_{0,0}, \omega_{3,3}$ задаются равенствами (14), тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ задача (12) – (7) имеет ровно 24 орбитально асимптотически устойчивых тора, асимптотика которых задается следующей формулой:

$$\begin{aligned} u(t, k, j) &= \rho_{p_1,q_1} \cos(\omega_{p_1,q_1} t + \varphi_{p_1,q_1}) \cos \frac{\pi p_1(k - \frac{1}{2})}{4} \cos \frac{\pi q_1(j - \frac{1}{2})}{4} + \\ &+ \rho_{p_2,q_2} \cos(\omega_{p_2,q_2} t + \varphi_{p_2,q_2}) \cos \frac{\pi p_2(k - \frac{1}{2})}{4} \cos \frac{\pi q_2(j - \frac{1}{2})}{4} + \\ &+ \rho_{p_3,q_3} \cos(\omega_{p_3,q_3} t + \varphi_{p_3,q_3}) \cos \frac{\pi p_3(k - \frac{1}{2})}{4} \cos \frac{\pi q_3(j - \frac{1}{2})}{4} + \\ &+ \rho_{p_4,q_4} \cos(\omega_{p_4,q_4} t + \varphi_{p_4,q_4}) \cos \frac{\pi p_4(k - \frac{1}{2})}{4} \cos \frac{\pi q_4(j - \frac{1}{2})}{4} + O(\varepsilon), \\ p_s &= 1, \dots, 4, \quad q_s = 1, \dots, 4, \quad s = 1, \dots, 4. \end{aligned} \quad (31)$$

Теорема 3. Все состояния системы (19) с числом ненулевых компонент равным 3, а также большим либо равным 5 неустойчивы.

2.2. Решетка Скотта с краевыми условиями Дирихле

Рассмотрим систему (12) – (6). Для неё справедливы рассуждения, аналогичные тем, что приведены в предыдущем разделе, поэтому большую часть их мы опустим и сразу перейдем к формулировке результатов.

В первую очередь отметим, что собственные векторы системы (12) – (6) имеют вид

$$u_{(n,m)} = \exp(\pm i\omega_{n,m}t)e_{n,m}(k,j), \quad e_{n,m}(k,j) = 2 \sin \frac{\pi nk}{5} \sin \frac{\pi mj}{5}, \quad (32)$$

$$n = 1, \dots, 4, \quad m = 1, \dots, 4, \quad k = 1, \dots, 4, \quad j = 1, \dots, 4$$

где

$$\omega_{n,m} = \sqrt{1 + 2\delta_1^2 \left(1 - \cos \frac{\pi n}{5}\right) + 2\delta_2^2 \left(1 - \cos \frac{\pi m}{5}\right)}, \quad n = 1, \dots, 4, \quad m = 1, \dots, 4. \quad (33)$$

Нормальная форма в нерезонансном случае выписывается следующим образом:

$$2 \frac{dz_{n,m}}{d\tau} = (1 - \nu(\omega_{n,m}^2 - 1))z_{n,m} - \frac{9}{4}z_{n,m}|z_{n,m}|^2 - 3 \sum_{k=1, k \neq n}^4 z_{n,m}|z_{k,m}|^2 -$$

$$- 3 \sum_{s=1, s \neq m}^4 z_{n,m}|z_{n,s}|^2 - 2 \sum_{k,s=1, k \neq n, s \neq m}^4 z_{n,m}|z_{k,s}|^2, \quad n = 1, \dots, 4, \quad m = 0, \dots, 3. \quad (34)$$

Анализ этой системы позволяет сделать вывод о динамике задачи (12) – (6) и сформулировать для нее условия существования асимптотически орбитально устойчивых многочастотных режимов. В частности для двухчастотных режимов это условие имеет вид

$$(1 - \nu(\omega_{i,j}^2 - 1)) < \frac{8}{17 + 4(C_{(p,q)(r,s)} - 2)}((1 - \nu(\omega_{p,q}^2 - 1)) + (1 - \nu(\omega_{r,s}^2 - 1))),$$

$$\forall i \neq p \bigvee j \neq q, \quad i \neq r \bigvee j \neq s, \quad i, j = 0, \dots, 0, \quad (35)$$

откуда нетрудно получить условие сосуществования максимального числа таких устойчивых режимов

$$(1 - \nu(\omega_{4,4}^2 - 1)) < \frac{16}{21}(1 - \nu(\omega_{1,1}^2 - 1)). \quad (36)$$

Сформулируем основные утверждения, выполненные для данного случая.

Теорема 4. Пусть для краевой задачи (12) – (6) выполнено условие (36), где $\omega_{0,0}, \omega_{3,3}$ задаются равенством (14), тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ задача (12) – (6) имеет ровно 120 орбитально асимптотически устойчивых

торов, асимптотика которых задается формулой

$$\begin{aligned}
 u(t, k, j) = & 2 \sqrt{\frac{4C_{(p,q)(r,s)}(1 - \nu(\omega_{r,s}^2 - 1)) - 9(1 - \nu(\omega_{p,q}^2 - 1))}{16C_{(p,q)(r,s)}^2 - 81}} \cos(\omega_{p,q}t + \varphi_{p,q}) \times \\
 & \times \sin \frac{\pi pk}{5} \sin \frac{\pi qj}{5} + \sqrt{\frac{4C_{(r,s)(p,q)}(1 - \nu(\omega_{p,q}^2 - 1)) - 9(1 - \nu(\omega_{r,s}^2 - 1))}{16C_{(r,s)(p,q)}^2 - 81}} \times \\
 & \times \cos(\omega_{r,s}t + \varphi_{r,s}) \sin \frac{\pi rk}{5} \sin \frac{\pi sj}{5} + O(\varepsilon), \quad p, q, r, s = 0, \dots, 3, \quad k, j = 1, \dots, 4. \quad (37)
 \end{aligned}$$

Для четырехкомпонентных режимов условие устойчивости соответствующего состояния равновесия может быть сформулировано следующим образом:

$$\begin{aligned}
 (1 - \nu(\omega_{i,j}^2 - 1)) & < \frac{8}{33}((1 - \nu(\omega_{p_1,q_1}^2 - 1)) + (1 - \nu(\omega_{p_2,q_2}^2 - 1)) + \\
 & + (1 - \nu(\omega_{p_3,q_3}^2 - 1)) + (1 - \nu(\omega_{p_4,q_4}^2 - 1))), \\
 \forall i \neq p_s \bigvee j \neq q_s, \quad s = 1, \dots, 4, \\
 i, j = 0, \dots, 3,
 \end{aligned} \quad (38)$$

а при выполнении условия

$$(1 - \nu(\omega_{3,3}^2 - 1)) < \frac{32}{33}((1 - \nu(\omega_{0,0}^2 - 1))) \quad (39)$$

в исходной системе сосуществует максимальное число четырехкомпонентных режимов, в частности выполнена теорема

Теорема 5. Пусть для краевой задачи (12) – (6) выполнено условие (39), где $\omega_{0,0}, \omega_{3,3}$ задаются равенством (14), тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ задача (12) – (6) имеет ровно 24 орбитально асимптотически устойчивых тора, асимптотика которых задается следующей формулой:

$$\begin{aligned}
 u(t, k, j) = & \rho_{p_1,q_1} \cos(\omega_{p_1,q_1}t + \varphi_{p_1,q_1}) \sin \frac{\pi p_1 k}{5} \sin \frac{\pi q_1 j}{5} + \\
 & \rho_{p_2,q_2} \cos(\omega_{p_2,q_2}t + \varphi_{p_2,q_2}) \sin \frac{\pi p_2 k}{5} \sin \frac{\pi q_2 j}{5} + \\
 & \rho_{p_3,q_3} \cos(\omega_{p_3,q_3}t + \varphi_{p_3,q_3}) \sin \frac{\pi p_3 k}{5} \sin \frac{\pi q_3 j}{5} + \\
 & \rho_{p_4,q_4} \cos(\omega_{p_4,q_4}t + \varphi_{p_4,q_4}) \sin \frac{\pi p_4 k}{5} \sin \frac{\pi q_4 j}{5} + O(\varepsilon), \\
 p_s = 1, \dots, 4, \quad q_s = 1, \dots, 4, \quad s = 1, \dots, 4.
 \end{aligned} \quad (40)$$

В заключение заметим, что обе системы (12) – (6) и (12) – (7) демонстрируют достаточно сложную динамику, состоящую в сосуществовании большого числа многочастотных режимов. Тем самым, здесь реализуется аналог хаотической буферности, найденной в [2], сопровождающийся, однако, рядом эффектов, обусловленных конечномерностью задачи.

Список литературы

1. Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Хаотическая буферность в цепочке связанных осцилляторов // Дифференциальные уравнения. 2005. 41:1. С. 41–49.
2. Колесов А. Ю., Розов Н. Х., Садовничий В. А. Математические аспекты теории развития турбулентности по Ландау // Успехи математических наук. 2008. Т. 63, №2(380). С. 21 – 84.
3. Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. К вопросу о реализуемости сценария развития турбулентности по Ландау // Теоретическая и математическая физика. 2009. Т. 158, № 2. С. 291 – 310.
4. Scott C.A. Distributed Multimode Oscillators of One and Two Spatial Dimensions // IEEE Trans. on circuit theory. CT-17:1. 1970. P. 55 – 80.
5. Scott C.A. Tunnel Diode Arrays for Information Processing and Storage // IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. SMC-1:3. 1971. P. 267 – 275.
6. Parmentier R.D. Lumped Multimode Oscillators in the Continuum Approximation // IEEE Trans. on circuit theory. CT-19:2. 1972. P. 142 – 145.
7. Глызин С. Д. Сценарии фазовых перестроек одной конечноразностной модели уравнения «реакция-диффузия» // Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 33, № 6. С. 805 – 811.
8. Скотт Э. Нелинейная наука: рождение и развитие когерентных структур. М.: Физматлит, 2007.
9. Глызин С. Д., Колесов А. Ю. Локальные методы анализа динамических систем: Учебн. пособие / Яросл. гос. ун-т. Ярославль, 2006. 92 с.
10. van der Pol B. The nonlinear theory of electric oscillations // Proc. IRE. 1934. Vol. 22. P. 1051 – 1086.
11. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику. Киев: Изд-во АН УССР, 1937.
12. Боголюбов Н. Н. Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний // М.: Наука, 1974.
13. Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений. М.: Физматлит, 2004.
14. Мищенко Е. Ф., Садовничий В. А., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. М.: Физматлит, 2005.

15. Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Аттракторы типа жесткой турбулентности в релаксационных системах // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38, №12. С. 1596 – 1605.
16. Мищенко Е. Ф., Садовничий В. А., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Явление буферности в нелинейной физике // Тр. МИАН. 2005. Т. 250. С. 112 – 182.
17. Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Явление буферности в RCLG-автогенераторе: теоретический анализ и результаты эксперимента // Тр. МИАН. 2001. Т. 233. С. 153 – 207.
18. Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Многочастотные автоколебания в двухмерных решетках связанных осцилляторов // Тр. ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16, №5. С. 82 – 94.

Oscillations in Arrays of Nonlinear Elements in the Scott Experiment

Bobok A. S., Glyzin S. D.

Keywords: auto-oscillations, normal form, resonances, buffering

Bifurcation analysis of dynamic system modeling the array of coupled oscillators in the experience of Scott are presented. The non-resonant cases are considered.

Сведения об авторах:

Глызин Сергей Дмитриевич,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой компьютерных сетей;

Бобок Алексей Станиславович,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
аспирант