Модел. и анализ информ. систем. Т. **19**, № **5** (2012) 69–73

УДК 519.7

Моделирование счетчиковых машин двухголовочными автоматами

Кузьмин Е. В.[1], Соколов В. А.[2]

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: {kuzmin,sokolov}@uniyar.ac.ru

получена 3 апреля 2012

Ключевые слова: счетчиковые машины, двухголовочные автоматы, моделирование

Проводится моделирование работы счетчиковых машин Минского с помощью двухголовочных автоматов.

1. Введение

В статье простым и наглядным образом показывается, как работа счетчиковой машины Минского может быть смоделирована с помощью двухголовочного автомата в том смысле, что этот автомат будет допускать те и только те слова, которые являются конечными исполнениями счетчиковой машины из всех возможных начальных конфигураций.

Известно (см., например, [2, 4]), что проблема пустоты (зацикливания при любом входе) для машин Минского с двумя счетчиками не является частично разрешимой. Следовательно, имеем, что проблема пустоты (недопущения ни одного слова) для двухголовочных автоматов также не является частично разрешимой. В свою очередь этот факт о двухголовочных автоматах используется при доказательстве неразрешимости некоторых проблем для схем программ [1].

Поэтому результаты статьи могут быть использованы при преподавании теории схем программ в той её части, которая касается, например, доказательства отсутствия частичной разрешимости проблем пустоты и эквивалентности стандартных схем программ.

Ранее [1] факт отсутствия частичной разрешимости проблемы пустоты двухголовочных автоматов доказывался с помощью (сведением) проблемы зацикливания машин Тьюринга. Доказательство имеет громоздкий вид и при этом оформлено в виде наброска, в котором выражаются основные идеи моделирования двухголовочным автоматом работы машины Тьюринга над некоторым начальным словом.

В настоящей статье каждой команде счетчиковой машины Минского сопоставлена в наглядном графическом виде соответствующая подпрограмма двухголовочного автомата, моделирующая работу этой команды.

[1]Работа проводилась при поддержке РФФИ, гранты №11-07-00549-а и №12-01-00281-а.

[2]Работа поддержана Федеральной целевой программой «Кадры», соглашение 14.B37.21.0392.

2. Основные понятия и определения

Счетчиковая машина Минского M представляет собой набор (q_0, q_n, Q, X, Δ), где $Q = \{q_0, \ldots, q_n\}$ — конечное непустое множество состояний машины; $q_0 \in Q$ — начальное состояние; $q_n \in Q$ — финальное состояние; $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ — конечное непустое множество счетчиков, которые могут принимать значения из $\mathbb{N} \cup \{0\}$; $\Delta = \{\delta_0, \ldots, \delta_{n-1}\}$ — набор правил переходов по состояниям машины; δ_i — правило переходов для состояния q_i. Состояния q_i, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, подразделяются на два типа. Состояния первого типа имеют правила переходов вида:

$$(\delta_i)\ \ q_i\colon\ x_j := x_j + 1;\ \mathsf{goto}\ q_k,$$

где $1 \leqslant j \leqslant m, 0 \leqslant k \leqslant n$. Для состояний второго типа имеем, $1 \leqslant j \leqslant m, 0 \leqslant k, l \leqslant n$:

$$(\delta_i)\ \ q_i\colon\ \mathsf{if}\ x_j > 0\ \mathsf{then}\ (x_j := x_j - 1;\ \mathsf{goto}\ q_k)\ \mathsf{else\ goto}\ q_l.$$

Для финального состояния q_n правило перехода не предусмотрено. Это означает, что при попадании в состояние q_n машина Минского M завершает свою работу.

Конфигурация машины Минского — это набор $(q_i, c_1, \ldots, c_m)$, где q_i — состояние машины, $c_1, \ldots, c_m$ — натуральные числа (включая ноль), являющиеся значениями соответствующих счетчиков.

Исполнением машины Минского называется последовательность конфигураций $s_0\, s_1\, s_2\, s_3\, s_4\, \ldots$, индуктивно определяемая в соответствии с правилами переходов. Счетчиковая машина имеет одно исполнение из начальной конфигурации s_0, так как для каждого состояния предусмотрено не более одного правила переходов. Машина, получив на вход некоторый набор значений счетчиков, стартует из состояния q_0 и либо останавливается в состоянии q_n с выходным набором значений счетчиков, либо зацикливается, реализуя тем самым частичную числовую функцию.

Двухголовочный автомат $A = (V, Q, q_0, q_f, \#, I)$ имеет одну ленту и две *считывающие головки*, которые могут независимо перемещаться вдоль ленты в одном направлении. Множество состояний $Q = Q_1 \bigcup Q_2$ разбито на два непересекающихся подмножества; в состояниях из Q_1 активна первая головка, в состояниях из Q_2 — вторая. V здесь означает алфавит символов на ленте, $q_0 \in Q$ — начальное состояние, $q_f \in Q$ — финальное состояние, $\#$ — символ конца ленты, а I — программу автомата A, т. е. последовательность команд вида $qa \to q'$, где q, $q' \in Q$, $a \in V$, причём для любой пары (q, a) существует единственная команда, начинающаяся этими символами. В начальном состоянии обе головки обозревают первый символ ленты.

Согласно программе на каждом шаге автомат считывает активной головкой символ с ленты, передвигает её по ленте вправо на одну клетку и переходит в новое состояние. Если автомат находится в состоянии $q \in Q_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 2)$, то i-я головка является активной и читает символ с ленты. При переходе автомата в состояние $q' \in Q_j$ $(j \neq i)$ i-я головка останавливается, а j-я начинает читать символы со своего места ленты (т. е. с того места, на котором она остановилась до передачи управления i-й головке). Если одна из головок считывает символ $\#$ конца ленты, автомат останавливается. Автомат также останавливается, если не может сработать ни одна из команд программы I. Автомат *допускает слово* α в алфавите V, если, начав работу с лентой, содержащей это слово, он, считав активной головкой #, символ конца ленты, останавливается в заключительном состоянии.

Двухголовочный автомат *моделирует* работу счетчиковой машины Минского, если автомат допускает те и только те слова, которые являются конечными исполнениями этой машины (при всех возможных начальных конфигурациях).

3. Моделирование

Теорема 1. *Для любой счетчиковой машины Минского может быть построен двухголовочный автомат, моделирующий её работу.*

Доказательство. Ограничимся двухсчетчиковым случаем, т. е. будем моделировать двухголовочными автоматами работу только двухсчетчиковых машин Минского. В случае n-счетчиков моделирование проводится по аналогии. Более того, двухсчетчиковые машины Минского обладают тьюринговой мощностью и могут моделировать произвольные n-счетчиковые машины [3].

Начнем с алфавита и представления конфигурации счетчиковой машины на ленте двухголовочного автомата. Положим $V = \{q_0, \ldots, q_n, 1, *\}$, где q_i — символы, обозначающие состояния машины Минского, соответствующим количеством символов «1» будем представлять значения счетчиков, * — специальный разделительный символ. Конфигурацию (q, c_1, c_2) счетчиковой машины будем представлять на ленте в виде $q\underbrace{11\ldots1}_{c_1}*\underbrace{11\ldots1}_{c_2}*$. Тогда, например, переход счетчиковой машины из (q, c_1, c_2) в конфигурацию $(q', c_1{+}1, c_2)$ при срабатывании команды первого типа $q:\ \ x_1 := x_1 + 1;$ $\texttt{goto}\ q'$ будет изображен на ленте двухголовочного автомата как $q\underbrace{11\ldots1}_{c_1}*\underbrace{11\ldots1}_{c_2}*q'\underbrace{11\ldots1}_{c_1+1}*\underbrace{11\ldots1}_{c_2}*$. Здесь $q, q' \in \{q_0, \ldots, q_n\}, q \neq q_n$.

Каждому состоянию счетчиковой машины сопоставим такое же состояние (с той же пометкой) двухголовочного автомата, в котором будет активна вторая считывающая головка. Каждую команду счетчиковой машины промоделируем соответствующей подпрограммой двухголовочного автомата, изображенной в виде графа переходов на рис. 1. На рисунке состояния автомата изображены в виде кружков, цифра внутри кружка означает номер активной в этом состоянии считывающей головки. Символы ленты, по которым возможен переход из текущего состояния двухголовочного автомата, указаны над дугами.

Для финального состояния q_n счетчиковой машины также сопоставим подпрограмму, см. рис. 1, завершающуюся в финальном состоянии, обозначенном двойным кружком, двухголовочного автомата при активной первой считывающей головке. Начальным состоянием двухголовочного автомата устанавливается новое состояние q'_0 при активной первой считывающей головке, для которого также приводится подпрограмма (см. рис. 1). Смысл этой подпрограммы состоит в том, чтобы, прочитав первой головкой начальную конфигурацию счетчиковой машины, передать управление второй считывающей головке в состоянии q_0, которое соответствует начальному состоянию счетчиковой машины.

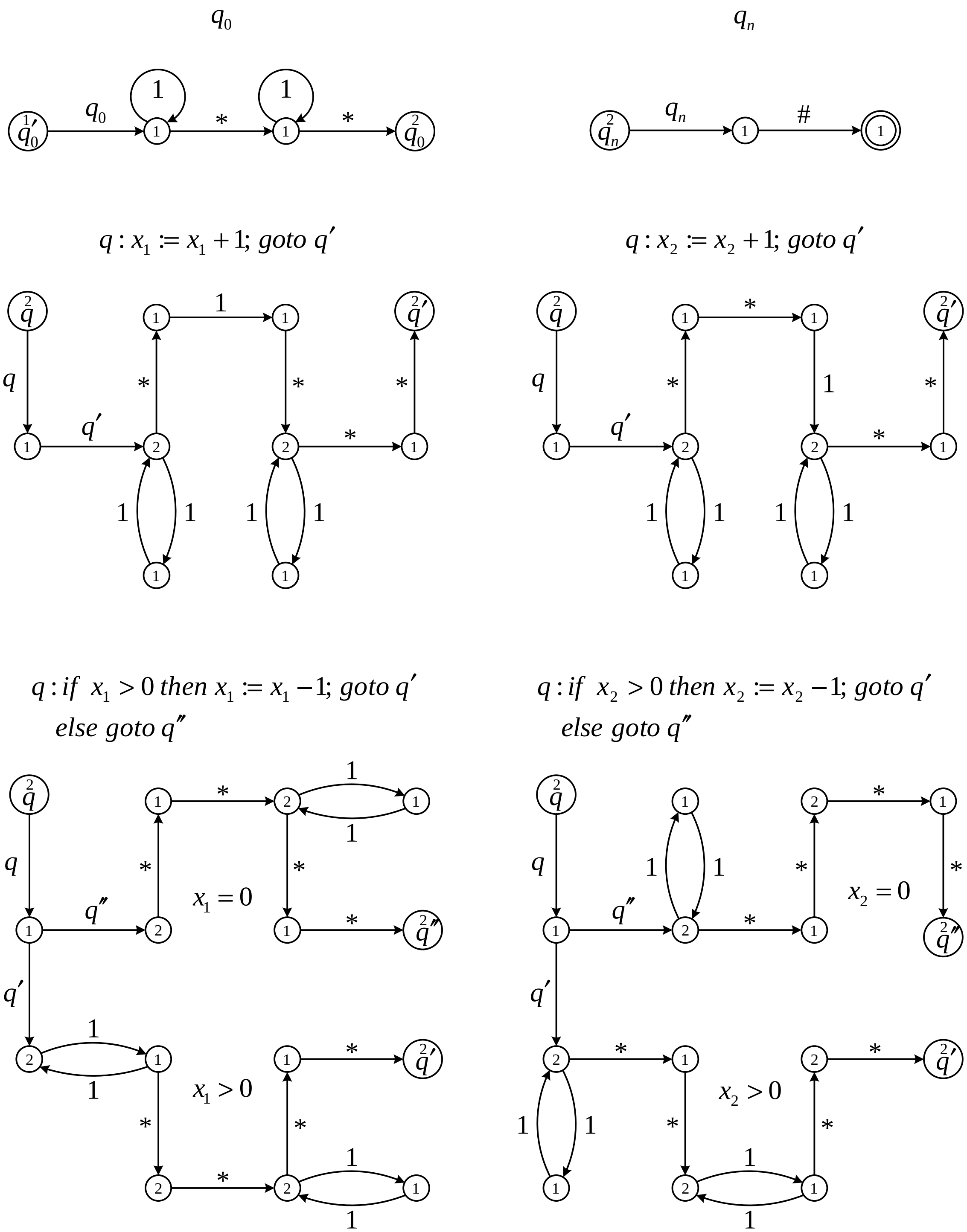

Рис. 1. Подпрограммы двухголовочного автомата, моделирующие работу соответствующих команд счетчиковой машины Минского

За исключением подпрограмм для начального и финального состояний работа подпрограмм сводится к проверке того, удовлетворяют ли две записанные на ленте соседние конфигурации счетчиковой машины соответствующей команде (этой машины), которая переводит одну конфигурацию в другую.

По построению двухголовочный автомат, моделирующий счетчиковую машину таким образом, будет допускать те и только те слова, которые являются возможными конечными исполнениями этой счетчиковой машины. □

Список литературы

1. *Котов В. Е.*, *Сабельфельд В. К.* Теория схем программ. М.: Наука, Физматлит, 1991. 248 с.
2. *Кузьмин Е. В.* Счетчиковые машины: Уч. пособ. Ярославль: ЯрГУ, 2010. 128 с.
3. *Минский М.* Вычисления и автоматы. М.: Мир, 1971. 268 с.
4. *Хопкрофт Д.*, *Мотвани Р.*, *Ульман Д.* Введение в теорию автоматов, языков и вычислений. 2-е изд.: Пер. с англ. М.: Вильямс, 2002. 528 с.
5. *Rosenberg A.* On Multi-Head Finite Automata // Proc. of the 5th Ann. Symp. on Switch. Theory and Log. Design, 1963. P. 221–228.

The Modeling of Counter Machines by Two-Head Finite Automata

Kuzmin E. V., Sokolov V. A.

Keywords: counter machines, two-head finite automata, modeling

A method of modeling the Minsky counter machine behaviour by a two-head finite automaton is proposed.

Сведения об авторах:
Кузьмин Егор Владимирович, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, д-р физ.-мат. наук, профессор;
Соколов Валерий Анатольевич, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, д-р физ.-мат. наук, профессор.