©Кащенко С. А., 2017

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-5-537-549

УДК 517.9

Устойчивость решений дискретных краевых задач для уравнения двумерной фильтрации

Кащенко С. А.

получена 15 мая 2017

Аннотация. Исследуется устойчивость решений линейных уравнений, возникающих в теории двумерной цифровой фильтрации. Анализируются различные постановки начальной задачи. В качестве основных результатов для каждой из них получен соответствующий критерий устойчивости в терминах корней характеристического уравнения. Для краевых условий типа Дирихле, Неймана или для периодических краевых условий обоснован переход к системе линейных уравнений первого порядка в конечномерном пространстве. Кроме этого, рассмотрены краевые условия, определяющие поведение решений на «бесконечности». Здесь речь идет об анализе линейных бесконечномерных систем.

Ключевые слова: дискретные уравнения, устойчивость, краевые задачи, спектральное множество

Для цитирования: Кащенко С. А., "Устойчивость решений дискретных краевых задач для уравнения двумерной фильтрации", *Моделирование и анализ информационных систем*, **24**:5 (2017), 537–549.

Об авторе:

Кащенко Сергей Александрович, orcid.org/0000-0002-8777-4302, доктор физико-математических наук, профессор, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000 Россия, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Каширское ш., 31, г. Москва, 115409, Россия
e-mail: kasch@uniyar.ac.ru

1. Постановка задачи

Дискретные уравнения являются основным математическим аппаратом при исследовании динамики многих важных прикладных задач, особенно в теории бурно развивающихся в настоящее время цифровых систем. Простейшими и в то же время базовыми математическими моделями являются линейные «автономные» уравнения вида

$$x_{n+1} = ax_n \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (1)$$

Задав начальное условие x_0 , легко выписать решение x_n уравнения (1), совпадающее с x_0 при $n = 0$, и исследовать его устойчивость. Более сложны и многообразны дискретные уравнения, в которых учитывается пространственное распределение.

На математическом языке это приводит к рассмотрению уравнения относительно величин $x_{n,m}$, зависящих от двух индексов. Например, дискретными аналогами простейших операторов переноса и диффузии являются соответственно уравнения

$$x_{n+1,m} = ax_{n,m} + d(x_{n,m+1} - x_{n,m}), \quad (2)$$

$$x_{n+1,m} = ax_{n,m} + d(x_{n,m+1} - 2x_{n,m} + x_{n,m-1}). \quad (3)$$

В настоящей работе исследуется более сложное уравнение, возникающее в задачах двумерной цифровой фильтрации [1-8]:

$$x_{n+1,m+1} = ax_{n+1,m} + bx_{n,m+1} + cx_{n,m}, \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (4)$$

Кроме задания самого пространственно-распределенного уравнения (4), центральным моментом является выбор фазового пространства. К числу наиболее простых следует отнести три возможных случая, которые обусловлены выбором соответствующих краевых условий:

1. Условие Дирихле: переменная m изменяется от 0 до некоторого $p > 0$, причем

$$x_{n,p} = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (5)$$

2. Условие Неймана: переменная m изменяется от 0 до некоторого $p > 0$, причем

$$x_{n,p-1} = x_{n,p}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (6)$$

3. Периодические граничные условия:

$$x_{n,m+p} = x_{n,m}, \quad n, m = 0, 1, \dots \quad (7)$$

Каждое из условий (5), (6) или (7) означает, что фазовое пространство является конечномерным. Тем самым, задавая $p + 1$ значение $z_0 = (x_{0,0}; x_{0,1}; \dots; x_{0,p})$, однозначно находим решение $x_{n,m}$ при $n > 0, m = 0, \dots, p$. В следующем пункте будут выписаны критерии устойчивости для каждой из упомянутых задач.

4. Для уравнения (4) естественной является ситуация, когда переменная m принимает все значения от 0 до ∞ . Имея в виду конкретные приложения, представляется наиболее естественным ограничение вида:

$$x_{n,m} \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty, \quad n = 0, 1, \dots \quad (8)$$

Фазовое пространство в случае условий (8) обозначим через L . Наиболее приемлемы метрики стандартных пространств L_1 или L_2 , т. е. имеем

$$\|z\| = \sum_{j=0}^{\infty} |z_j|, \quad \text{при } z \in L_1,$$

$$\|z\| = \left(\sum_{j=0}^{\infty} |z_j|^2 \right)^{1/2}, \quad \text{при } z \in L_2.$$

Рассмотрению краевого условия (8) будет посвящен пункт 3. Как оказалось, краевого условия (8) может быть недостаточно для определения решения $x_{n,m}$ уравнения (4). В этом случае необходимо существенно расширить фазовое пространство

и отказаться от интерпретации индекса n , как аналога временного дискрета. В качестве фазового пространства приходится определять пространство M элементов

$$z_0 = (\dots, x_{0,2}, x_{0,1}, x_{0,0}, x_{1,0}, x_{2,0}, \dots)$$

с краевыми условиями

$$|z_{0,j}| + |z_{j,0}| \rightarrow 0 \text{ при } j \rightarrow \infty \quad (9)$$

Соответствующие результаты приводятся в пункте 4.

2. Условия устойчивости для конечномерных фазовых пространств

2.1. Задача Дирихле

Предположим, что выполнены краевые условия (5). В этом случае для каждого n уравнение (4) расщепляется на систему p рекуррентных по m уравнений вида

$$z_{n+1} = A_p z_n, \quad (z_n = (x_{n,p-1}, \dots, x_{n,0}),) \quad (10)$$

где A_p — нижнетреугольная матрица, на главной диагонали которой стоит одно и то же число $-ca^{-1}$. Конечно, здесь предполагаем, что выполнены условия невырожденности $a \neq 0$. Таким образом, условия устойчивости траектории z_n системы (10), а значит, и решения $x_{n,m}$ уравнения (4), состоит в выполнении неравенства

$$|ca^{-1}| < 1. \quad (11)$$

Замечание 1. При условии $a = 0$ для разрешимости уравнения (4) с краевыми условиями (5) и с произвольными начальными условиями необходимо выполнение условия $c = 0$. Если же в рассматриваемой задаче $a = c = 0$, то уравнение (4) вырождается в простейшее уравнение $z_{n+1} = bz_n$, условия устойчивости которого состоят в выполнении неравенства

$$|b| < 1. \quad (12)$$

2.2. Задача Неймана

В случае краевых условий (6) задача (4) тоже представима в виде p -мерной системы (10) с нижнетреугольной матрицей A_p , левый верхний элемент которой равен

$$\lambda_0 = \frac{b+c}{1-a},$$

а все остальные элементы главной диагонали равны $-ca^{-1}$. Таким образом, при выполнении условий невырожденности $a \neq 0$ и $a \neq 1$ критерий устойчивости записывается в виде двух неравенств

$$|ca^{-1}| < 1,$$

$$|(b+c)(1-a)^{-1}| < 1.$$

Замечание 2. При условии $a = 0$ для разрешимости рассматриваемой задачи с произвольными начальными условиями необходимо, чтобы $c = 0$. Тогда критерий устойчивости имеет вид (12). Если же $a = 1$, то необходимо равенство $b + c = 0$. В этом случае, однако, задания только начального условия (значения z_0) оказывается недостаточно. Можно, например, произвольно задавать последовательность значений $x_{n,p-1}$ ($n = 0, 1, \dots$). Критерий устойчивости по части переменных $(x_{n,0}, \dots, x_{n,p-1})$ (с заданной ограниченной последовательностью $x_{n,p-1}$) состоит в выполнении неравенства $|c| < 1$.

2.3. Периодическая краевая задача

При условии (7) уравнение (4) принимает вид

$$(I - aJ)z_{n+1} = (bI + cJ)z_n, \quad (13)$$

где $z_n = (x_{n,0}, \dots, x_{n,p-1})$, I — единичная матрица, а матрица J задана равенством

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Условия устойчивости решения (12) состоят в выполнении неравенств

$$|\lambda_j| < 1 \quad (j = 0, 1, \dots, p-1),$$

где λ_j — собственные значения матрицы $A_p = (I - aJ)^{-1}(bI + cJ)$. Для чисел λ_j имеет место формула

$$\lambda_j = (b + c \exp(i\varphi_j))(1 - a \exp(i\varphi_j))^{-1},$$

где $\varphi_j = 2\pi j/p$ ($j = 0, \dots, p-1$). Здесь, конечно, тоже необходимо наложить условие невырожденности $a \neq 1$. Интересно отметить, что для выполнения несколько более сильного неравенства

$$|(b + c \exp(i\varphi_j))(1 - a \exp(i\varphi_j))^{-1}| < 1 \quad \text{при } \varphi \in [0, 2\pi]$$

необходимо и достаточно, чтобы имели место ограничения

$$\begin{cases} |bc + a| > 0 \\ |b + c| < |a - 1|, \\ a \neq 1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} |bc + a| < 0 \\ |b - c| < |a + 1|, \\ a \neq 1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} |bc + a| = 0 \\ b^2 + c^2 - a^2 < 1, \\ a \neq 1. \end{cases}$$

Замечание 3. Для более простого уравнения (2) устойчивость состоит в выполнении условий

$|a - d| < 1$ — в случае краевых условий (5);

$|a| < 1$ и $|a - d| < 1$ — в случае краевых условий (6);

$|a + d(\exp(i\varphi_j) - 1)| < 1$ ($\varphi_j = 2\pi j/p$, $j = 0, 1, \dots, p-1$) — в случае краевых условий (7).

3. Критерий устойчивости в бесконечномерном фазовом пространстве

Рассмотрим отдельно случаи $a > 1$ и $a < 1$. Относительно коэффициентов уравнения (4) удобно сделать некоторые допущения, не влияющие на общность постановки задачи. Коэффициенты a и b можно считать неотрицательными. В противном случае нужный знак достигается с помощью преобразования $x_{n,m} = (-1)^n y_{n,m}$ или $x_{n,m} = (-1)^m y_{n,m}$.

Пусть сначала $a > 1$. Положим $z_n = (x_{n,0}, x_{n,1}, \dots)$, и пусть вектор начальных условий z_0 принадлежит пространству L . Отметим, что задания только значения z_0 в общем случае оказывается недостаточным для определения значения $x_{n,m}$ ($n > 0, m \geq 0$). Однако требование, чтобы при всех $n > 0$ выполнялось включение $z_n \in L$, существенно меняет ситуацию. С чисто математической точки зрения суть дела заключается в содержании следующего вспомогательного утверждения.

Лемма 1. *Рассмотрим неоднородное разностное уравнение*

$$x_{m+1} = ax_m + y_{m+1} \quad (m = 0, 1, \dots), \quad (14)$$

в котором y_n — заданная последовательность и $y_n \in L$. Тогда при условии $|a| < 1$ для каждого решения x_m уравнения (14) тоже выполнено включение $x_m \in L$. Если же $|a| > 1$, то уравнение (14) имеет единственное решение x_m , принадлежащее пространству L

$$x_m = \sum_{k=n}^{\infty} a^{n-k} y_k.$$

Вернемся к уравнению (4) и положим в нем $n = 0$. В результате приходим к равенству

$$x_{1,m+1} = ax_{1,m} + y_m \quad (y_m = bx_{0,m+1} + cx_{0,m}).$$

Из условия $z_0 \in L$ следует, что $(y_0, y_1, \dots) \in L$. Из леммы тогда следует, что при выполнении неравенства $a > 1$ и при условии $z_1 = (x_{1,0}, x_{1,1}, \dots) \in L$ вектор z_1 однозначно определяется. Таким образом, для однозначной разрешимости рассматриваемого уравнения достаточными являются условие $a > 1$ и принадлежность решения уравнения (4) фазовому пространству L . Тем самым уравнение (4) в фазовом пространстве L порождает линейный оператор A , который элементу z_n ставит в соответствие элемент z_{n+1} : $z_{n+1} = Az_n$.

Далее рассмотрим при условии $|a| > 1$ вопрос об устойчивости решения z_n . Для нахождения спектра оператора A в (4) полагаем $z_{n+1} = \lambda z_n$. Для значений λ тогда получится соотношение

$$(\lambda - b)x_{n,m+1} = (a\lambda + c)x_{n,m}. \quad (15)$$

Из условия $z_n \in L$ получаем неравенство

$$\left| \frac{a\lambda + c}{\lambda - b} \right| < 1. \quad (16)$$

Множество всех λ , удовлетворяющих неравенству (16), обозначим через Ω и положим

$$\lambda_0 = \sup_{\lambda \in \Omega} |\lambda|.$$

Для значения λ_0 имеет место формула

$$\lambda_0 = \frac{|ac + b| + |ab + c|}{a^2 - 1}, \quad a^2 - 1 > 0. \quad (17)$$

Основное утверждение состоит в том, что при условии $\lambda_0 < 1$ решения z_n уравнения (4) асимптотически устойчивы в пространстве L , и при условии $\lambda_0 > 1$ — неустойчивы.

Проводя аналогию с распределенными системами, значения n можно интерпретировать как временную переменную, а значение m как пространственную переменную.

Отметим, что спектр оператора A составляет замкнутое множество Ω , все внутренние точки которого являются собственными значениями этого оператора. При этом число λ_0 в формуле (17) является спектральным радиусом рассматриваемого оператора.

Интересно сопоставить полученные в этом пункте утверждения с соответствующими результатами для более простой задачи: изучение решений уравнения (2) с «краевыми» условиями (8). В отличие от формулы (16) спектральное множество задач (2), (8) выделяется неравенством

$$|\lambda - a + d| \leq |d|.$$

Отсюда для спектрального радиуса λ_0 получаем равенство

$$\lambda_0 = |a - d| + |d|.$$

При $a < 1$ предыдущая задача теряет смысл в силу того, что невозможно определить решение $x_{n,m}$, задавая только значения $x_{0,m}$, ($m = 0, 1, \dots$). В этом случае наиболее естественно выглядит задача нахождения решения $x_{n,m}$ уравнения (4) при дополнительном условии

$$x_{n,0} = 0 \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (18)$$

Положим $z_n = (x_{n,1}, x_{n,2}, \dots)$, и пусть вектор z_n принадлежит пространству L_1 . Тогда линейный оператор $Az_n = z_{n+1}$, порожденный уравнением (4) и краевым условием (18) и действующий из L_1 в L_1 , представим в виде бесконечномерной матрицы A , причем

$$A = bI + [c + ab]B. \quad (19)$$

Здесь I — единичная матрица (тождественный оператор), а для j -го столбца b_j ($j = 1, 2, \dots$) матрицы B имеем равенство $b_j = \underbrace{(0, \dots, 0)}_j, b_0)$, где $b_0 = (1, a, a^2, \dots)$.

Из формулы (19) вытекает следующий критерий устойчивости решений рассматриваемой задачи.

Теорема 1. При условии $a < 1$ решения уравнения (4) с краевыми условиями (18) асимптотически устойчивы (неустойчивы), если

$$|c + ab| < (1 - a)(1 - b) \quad (|c + ab| > (1 - a)(1 - b)).$$

4. Уравнение с «двумя временами»

Результаты этого пункта наиболее интересны. Сначала заметим, что произвольное задание элементов $\dots, x_{0,2}, x_{0,1}, x_{0,0}, x_{1,0}, x_{2,0}, \dots$ однозначно определяет решение $x_{n,m}$ уравнения (4). Первый и второй индекс n и m элемента $x_{n,m}$ здесь равноправны, поэтому оправдано название уравнения (4) как уравнения с «двумя временами». С точки зрения приложений (например к задачам цифровой радиофизики) имеет смысл наложить условия

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n,m} = 0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} x_{n,m} = 0, \quad (20)$$

т. е. предполагаем, что вектор $z_k = (\dots, x_{k,2}, x_{k,1}, x_{k,k}, x_{1,k}, x_{2,k}, \dots)$ принадлежит фазовому пространству M . При этом уравнение (4) порождает линейный оператор A , который элементу z_k ставит в соответствие элемент z_{k+1} : $z_{k+1} = Az_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Обратим внимание, что рассматриваемая в этом пункте задача с «двумя временами» имеет смысл только при выполнении условий на коэффициенты a и b : $|a| < 1$, $|b| < 1$.

Чтобы обосновать это, достаточно в уравнении (4) при фиксированном n переменную m устремить в бесконечность (а затем при фиксированном m переменную n устремить в бесконечность) и воспользоваться условием $x_{n,m} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ или $m \rightarrow \infty$. Таким образом оператор A действует в пространстве M .

Отсюда естественным образом возникает задача изучения устойчивости решения z_k уравнения $z_{k+1} = Az_k$.

Относительно коэффициентов уравнения (4) удобно сделать некоторые допущения, не влияющие на общность постановки задачи. Во-первых, коэффициенты a и b можно считать неотрицательными. В противном случае нужный знак достигается с помощью преобразования $x_{n,m} = (-1)^n y_{n,m}$ или $x_{n,m} = (-1)^m y_{n,m}$. Во-вторых, удобно условиться, что выполнено неравенство $a \geq b$. Если $a < b$, то следует лишь поменять местами переменные n и m и соответственно переобозначить a и b .

Сначала исследуем основной случай, когда выполнено условие типа общности положения $b > 0$. Случай $b = 0$ будет рассмотрен ниже в качестве примера.

Устойчивость траекторий отображения $z_{k+1} = Az_k$ определяет спектральный радиус $r(A)$ оператора A . Для нахождения этой важной характеристики следует изучить вопрос о разрешимости в пространстве L уравнения

$$(A - \lambda I)x = z, \quad (21)$$

полагая $x = (\dots, x_{0,2}, x_{0,1}, x_{0,0}, x_{1,0}, x_{2,0}, \dots)$, $z = (\dots, z_{0,2}, z_{0,1}, z_{0,0}, z_{1,0}, z_{2,0}, \dots)$. Запишем уравнение (21) в координатной форме. В результате приходим к соотношениям

$$z_{0,m} - az_{0,m-1} = a\lambda x_{0,m-1} + (c - \lambda)x_{0,m} + bx_{0,m+1} \quad (m \geq 1), \quad (22)$$

$$z_{n,0} + bz_{n-1,0} = b\lambda x_{n-1,0} + (c - \lambda)x_{n,0} + ax_{n+1,0} \quad (n \geq 1), \quad (23)$$

$$z_{0,0} = ax_{1,0} + bx_{0,1} + (c - \lambda)x_{0,0}. \quad (24)$$

Вопрос о разрешимости в пространстве L уравнений (22) и (23) связан с поведением корней квадратного уравнения

$$ab\tau^2 + (c - \lambda)\tau + \lambda = 0. \quad (25)$$

Пусть $\tau_1 = \tau_1(\lambda)$ и $\tau_2 = \tau_2(\lambda)$ — корни этого уравнения, причем условимся считать, что

$$|\tau_1| \geq |\tau_2|. \quad (26)$$

Отметим, что корни характеристических уравнений, соответствующие правым частям уравнений (22) и (23), равны соответственно $a\tau_j$ ($j = 1, 2$) и $b\tau_j$ ($j = 1, 2$). В зависимости от расположения корней $a\tau_j$ и $b\tau_j$ разберем отдельно пять случаев.

Первый случай. Пусть модули всех корней $a\tau_j$ ($j = 1, 2$) и $b\tau_j$ ($j = 1, 2$) строго больше 1, т. е.

$$|b\tau_2| > 1. \quad (27)$$

В этом случае каждое из уравнений (22) и (23) имеет единственное решение $x_{0,m} = u_m$ и $x_{0,n} = v_n$ соответственно, принадлежащие пространству L (утверждение аналогично приведенной выше лемме). Однако, в общем случае $u_0 \neq v_0$, поэтому значение $x_{0,0}$, полученное из (22) и (23), не совпадает, не говоря уже о выполнении равенства (24). Тем самым множество Ω_1 таких значений λ , при которых выполнено неравенство (27), принадлежит спектральному множеству оператора A . Для того, чтобы описать границу $\partial\Omega_1$ множества Ω_1 , достаточно положить $|b\tau_2| = 1$ и учесть неравенство (26). Тогда $b\tau_2 = \exp(i\varphi)$ ($\varphi \in [0, 2\pi]$), а из (25) получаем, что $a\tau_1 = \lambda \exp(-i\varphi)$ и $\lambda = c + ab\tau_1 + ba\tau_2$. Отсюда приходим к выводу, что

$$\partial\Omega_1 = \left\{ \lambda : \lambda = \frac{c + a \exp(i\varphi)}{1 - b \exp(-i\varphi)}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \right\}.$$

Найдем значение λ_1 , равное точной верхней грани тех значений $|\lambda|$, для которых имеет место первый случай. Тем самым

$$\lambda_1 = \max_{0 \leq \varphi < 2\pi} \left| \frac{c + a \exp(i\varphi)}{1 - b \exp(-i\varphi)} \right|, \quad (28)$$

причем из (26) вытекает, что необходимо выполнение условия $|b\tau_1| \geq 1$, т. е.

$$\lambda_1 \geq \frac{a}{b}. \quad (29)$$

Для дальнейшего удобно ввести в рассмотрение два числа α и β по правилу

$$\alpha = \max \left\{ \frac{|c + a|}{1 - b}, \frac{|c - a|}{1 + b} \right\}, \quad \beta = \max \left\{ \frac{|c + b|}{1 - a}, \frac{|c - b|}{1 + a} \right\}. \quad (30)$$

Сразу отметим, что

$$\alpha = \begin{cases} |c + a|(1 - b)^{-1}, & \text{при } c \notin [-a/b, -ab], \\ |c - a|(1 + b)^{-1}, & \text{при } c \in [-a/b, -ab]. \end{cases}$$

Аналогично

$$\beta = \begin{cases} |c + b|(1 - a)^{-1}, & \text{при } c \notin [-b/a, -ab], \\ |c - b|(1 + a)^{-1}, & \text{при } c \in [-b/a, -ab]. \end{cases}$$

В выражении (28) максимум (по φ) достигается либо при $\varphi = 0$, либо при $\varphi = \pi$. Обратим внимание, что при выполнении неравенства $\alpha < a/b$ множество Ω_1 пустое. В этом случае полагаем $\lambda_1 = 0$. В итоге приходим к формуле

$$\lambda_1 = \begin{cases} \alpha, & \text{при } \alpha \geq a/b, \\ 0, & \text{при } \alpha < a/b. \end{cases} \quad (31)$$

Второй случай. Пусть все, кроме одного корня $a\tau_j$ и $b\tau_j$ ($j = 1, 2$), строго больше 1, т. е.

$$|a\tau_1| > 1, \quad |a\tau_2| > 1, \quad |b\tau_1| > 1, \quad |b\tau_2| < 1. \quad (32)$$

Тогда уравнение (22) по-прежнему имеет единственное решение $x_{0,m} = u_m$ в пространстве L , однако, в отличие от первого случая, уравнение (23) имеет семейство решений $x_{n,0} = v_n + h(b\tau_2)^n$, зависящее от произвольного параметра h . Этот параметр можно однозначно определить из условия $u_0 = v_0$.

Тем самым значение $x_{0,0}$, определяемое из (22) и (23), будет одно и то же. Однако равенство (24) в общем случае выполнено не будет. Отсюда заключаем, что множество Ω_2 тех λ , для которых выполнено условие (32), тоже принадлежит спектральному множеству оператора A . Множество $\partial\Omega_1$, является частью границы множества Ω_2 . Остальную часть границы Ω_2 обозначим через $\partial\Omega_2$. Она состоит из двух частей, которые мы обозначим через $\partial\Omega_{21}$ и $\partial\Omega_{22}$.

Для описания Ω_{21} полагаем, что все корни характеристических уравнений связаны соотношениями

$$|b\tau_2| \leq 1 = |b\tau_1| \leq |a\tau_2| \leq |a\tau_1|.$$

Тогда $b\tau_1 = \exp(i\varphi)$, $a\tau_2 = \lambda \exp(-i\varphi)$, $\varphi \in [0, \pi]$. Отсюда при условии $1 \leq |\lambda| \leq a/b$ следует, что

$$\partial\Omega_{21} = \left\{ \lambda : \quad \lambda = \frac{c + a \exp(i\varphi)}{1 - b \exp(-i\varphi)}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \right\}.$$

Для определения $\partial\Omega_{22}$ положим

$$|b\tau_2| \leq 1 = |a\tau_2| \leq |b\tau_1| \leq |a\tau_1|.$$

Тогда $a\tau_2 = \exp(i\varphi)$, $b\tau_1 = \lambda \exp(-i\varphi)$, $\varphi \in [0, \pi]$. Отсюда при условии $|\lambda| \geq 1$ следует, что

$$\partial\Omega_{22} = \left\{ \lambda : \quad \lambda = \frac{c + b \exp(i\varphi)}{1 - a \exp(-i\varphi)}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \right\}.$$

Отметим, что при $\beta < 1$ и $\alpha < 1$ множество $\partial\Omega_2$ пустое. Обозначим через λ_2 наибольший модуль из тех λ , которые принадлежат $\partial\Omega_2$. Тогда

$$\lambda_2 = \begin{cases} \alpha, & \text{при } \beta < 1, \quad \alpha \geq 1, \\ \max(\alpha, \beta), & \text{при } \beta \geq 1, \quad \alpha \geq 1, \\ \beta, & \text{при } \beta \geq 1, \quad \alpha < 1, \\ 0, & \text{при } \beta < 1, \quad \alpha < 1. \end{cases}$$

Третий случай. Предположим, что ровно два из значений $|a\tau_j|$ и $|b\tau_j|$ ($j = 1, 2$) по модулю меньше, чем 1, и ровно два значения по модулю больше, чем 1. Тогда решения уравнений (22) и (23) в пространстве L определяется с точностью до двухпараметрического семейства. Условие совпадения в (22) и (23) найденного значения $x_{0,0}$ и равенство (24) позволяют однозначно определить два имеющихся параметра. Таким образом, при сформулированных условиях существует единственное решение системы (22)–(24), а значит, соответствующее значение λ не принадлежит спектральному множеству оператора A .

Обратим внимание, что при достаточно больших значениях $|\lambda|$ выполнены соотношения: $|\tau_1| \gg 1$ и $|\tau_2 - 1| \ll 1$, т. е. имеет место третий случай.

Четвертый случай. Пусть все четыре значения $|a\tau_j|$ и $|b\tau_j|$ ($j = 1, 2$) не превосходят единицу. Система (22)–(24), как и во втором случае, оказывается неоднозначно разрешима, а значит, соответствующие λ принадлежат спектральному множеству Ω_3 оператора A . Для описания множества $\partial\Omega_3$ полагаем, что для корней характеристических уравнений выполнены соотношения

$$|b\tau_2| \leq |b\tau_1| \leq |a\tau_1| = 1, |b\tau_2| \leq |a\tau_2| \leq |a\tau_1| = 1.$$

Тогда $a\tau_1 = \exp(i\varphi)$, $b\tau_2 = \lambda \exp(-i\varphi)$, $\varphi \in [0, \pi]$. Отсюда при условии $|\lambda| \leq a/b$ следует, что

$$\partial\Omega_3 = \left\{ \lambda : \lambda = \frac{c + b \exp(i\varphi)}{1 - a \exp(-i\varphi)}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \right\}.$$

Обозначим через λ_3 наибольший модуль из тех λ , которые принадлежат $\partial\Omega_3$. Тогда

$$\lambda_3 = \begin{cases} \beta, & \text{при } \beta \geq b/a, \\ 0, & \text{при } \beta < b/a. \end{cases}$$

Пятый случай. Пусть $|a\tau_1| > 1$, а все остальные значения $|a\tau_2|$, $|b\tau_1|$ и $|b\tau_2|$ меньше, чем 1. В этой ситуации система (22)–(24) всегда разрешима, но неоднозначно, а тогда соответственно значение λ принадлежит спектральному множеству Ω_4 оператора A . Отметим, что четвертый и пятый случай выделяют точечный спектр рассматриваемого оператора. Множество $\partial\Omega_3$ является частью границы множества $\partial\Omega_4$. Остальная часть границы $\partial\Omega_4$ состоит из двух частей, которые мы обозначим через $\partial\Omega_{41}$ и $\partial\Omega_{42}$. Для описания $\partial\Omega_{41}$ полагаем, что все корни характеристических уравнений связаны соотношениями

$$|b\tau_2| \leq |a\tau_2| \leq 1 = |b\tau_1| \leq |a\tau_1|.$$

Тогда $b\tau_1 = \exp(i\varphi)$, $a\tau_2 = \lambda \exp(-i\varphi)$, $\varphi \in [0, \pi]$. Отсюда при условии $|\lambda| \leq 1$ следует, что

$$\partial\Omega_{41} = \left\{ \lambda : \lambda = \frac{c + a \exp(i\varphi)}{1 - b \exp(-i\varphi)}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \right\}.$$

Для определения $\partial\Omega_{42}$ положим

$$|b\tau_2| \leq |b\tau_1| \leq 1 = |a\tau_2| \leq |a\tau_1|.$$

Тогда $a\tau_2 = \exp(i\varphi)$, $b\tau_1 = \lambda \exp(-i\varphi)$, $\varphi \in [0, \pi]$. Отсюда при условии $|\lambda| \leq 1$ следует, что

$$\partial\Omega_{42} = \left\{ \lambda : \lambda = \frac{c + b \exp(i\varphi)}{1 - a \exp(-i\varphi)}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \right\}.$$

Обозначим через λ_4 наибольший модуль из тех λ , которые принадлежат $\partial\Omega_4$. Тогда

$$\lambda_4 = \begin{cases} \alpha, & \text{при } \beta > 1, \quad \alpha \leq 1, \\ \max(\alpha, \beta), & \text{при } \beta \leq 1, \quad \alpha \leq 1, \\ \beta, & \text{при } \beta \leq 1, \quad \alpha > 1, \\ 0, & \text{при } \beta > 1, \quad \alpha > 1. \end{cases}$$

Отметим, что при $\beta > 1$ и $\alpha > 1$ множество Ω_4 пустое. Тем самым, рассмотрение всех пяти возможных случаев поведения корней уравнения (25) завершено. Обозначим через λ_0 наибольшее среди всех чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и λ_4 , которые существуют при определенном наборе параметров a, b и c . Тогда $\lambda_0 = \max(\alpha, \beta)$.

Основной результат заключается в том, что $\lambda_0 = r(A)$. При $\lambda_0 > 1$ траектории z_k неустойчивы, а при $\lambda_0 < 1$ — устойчивы.

Замечание. Интересно отметить, что, казалось бы, естественный поиск собственных значений оператора A путем представления решения уравнения (4) в виде «разделяющихся» переменных $x_{n,m} = u^n v^m$, не приводит к верным результатам.

5. Примеры

Исследование вырожденного случая. Пусть выполнено условие $b = 0$. Тогда множество $\Omega_1 = \emptyset, \Omega_3 = \emptyset$, а значит, $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$. Множество Ω_2 выделяется неравенствами

$$\begin{cases} |c - \lambda| > a, \\ |c - \lambda| < a|\lambda| \end{cases}$$

и

$$\lambda_2 = \begin{cases} |c|(1-a)^{-1}, & \text{при } c \notin [-1-a, 1-a], \\ 0, & \text{при } c \in [-1-a, 1-a]. \end{cases}$$

Множество Ω_4 задается неравенствами

$$\begin{cases} |c - \lambda| < a, \\ |c - \lambda| > a|\lambda|, \end{cases}$$

откуда следует, что

$$\lambda_4 = \begin{cases} |c|(1-a)^{-1}, & \text{при } c \leq 1-a, \\ 1, & \text{при } 1-a \leq c \leq 1+a, \\ 0, & \text{при } c \geq 1+a. \end{cases}$$

В итоге получаем равенство $\lambda_0 = |c|(1-a)^{-1}$. Отметим, что каждый элемент множеств Ω_2 и Ω_4 принадлежит точечному спектру.

Условие устойчивости решений состоит в выполнении неравенства $|c| < 1-a$. Отметим, что это условие совпадает с условием устойчивости решений уравнения (4) с краевыми условиями (18) при $a < 1$ и $b = 0$.

При условии $a = b = 0$ имеем $\lambda_0 = |c|$. И здесь условие устойчивости решений уравнений с «двумя временами» совпадает с условием устойчивости решений в случае краевых условий (18).

Пусть $a = 0.5, b = 0.5$. В этом случае

$$\lambda_0 = \begin{cases} (1-2c)/3, & \text{при } c \in [-1, -0.25], \\ |2c+1|, & \text{при } c \notin [-1, -0.25]. \end{cases}$$

В результате получаем, что $\lambda_0 < 1$ при $-1 < c < 0$. В отличие от предыдущих примеров, это условие не совпадает с условием устойчивости $-1/2 < c < 0$ решений уравнений (4) с условиями (18).

Пусть $z_n = (\dots, x_{n,-1}, x_{n,0}, x_{n,1}, x_{n,2}, \dots)$ и при каждом n ($n = 0, 1, \dots$) $z_n \in L_1$. Для элементов z_n рассмотрим несколько более общее по сравнению с (3) уравнение

$$x_{n+1,m} = ax_{n,m} + bx_{n,m+1} + cx_{n,m-1}.$$

Весь спектр соответствующего оператора заполняет эллипс

$$\lambda = a + b \exp(i\varphi) + c \exp(-i\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

При $b = c$ и $b = -c$ этот эллипс вырождается в отрезок.

Выводы

Исследованы свойства устойчивости решений разностного уравнения двумерной фильтрации в случаях различных краевых условий. Особый интерес представляют результаты для краевых условий на «бесконечности».

Список литературы / References

- [1] Chang T., "Limit cycles in a two-dimensional first-order digital filter", *IEEE Trans. Ckts. and Syst.*, **CAS-24** (1977), 15–19.
- [2] El-Agizi N. G., Fahmy M. M., "Sufficient conditions for the nonexistence of limit cycles in two-dimensional digital filters", *IEEE Trans. Ckts. and Syst.*, **CAS-26** (1979), 402–406.
- [3] Maria G. A., Fahmy M. M., "Limit cycle oscillations in first-order two-dimensional digital filters", *IEEE Trans. Ckts. and Syst.*, **CAS-22** (1975), 246–251.
- [4] Bose T., Brown D. P., "First-order 2-D periodically shift varying digital filters without limit cycles", *Proc. IEEE Southeastcon*, 1988, 619–623.
- [5] El-Agizi N. G., Fahmy M. M., "Two-dimensional digital filters with no overflow oscillations", *IEEE Trans. Acous., Speech and Signal Process.*, **ASSP-27** (1979), 465–469.
- [6] Lodge J. H., Fahmy M. M., "Stability and overflow oscillations in 2-D state-space digital filters", *IEEE Trans. Acous., Speech and Signal Process.*, **ASSP-29** (1981), 1161–1171.
- [7] Bose T., Brown D. P., "Limit cycles in 2-D linearshift varying digital filters", *Proc. 31st Midwest Symp. on Ckts. and Syst.*, 1988.
- [8] Bose T., Brown D. P., "Limit cycles in first-order two-dimensional digital filters", *Proc. IEEE Southeastcon*, 1989, 371–375.

Kashchenko S. A., "Stability of the Solutions of the Simplest Space-Distributed Discrete Equations", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:5 (2017), 537–549.

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-5-537-549

Abstract. The stability of the solutions of the linear equations arising in the theory of two-dimensional digital filtration is studied. The different statements of the initial value problem are analysed. As the basic results, the corresponding stability criterion is obtained for each of them.

Keywords: discrete equations, stability, boundary value problems, spectral set

On the author:

Sergey A. Kashchenko, orcid.org/0000-0002-8777-4302, doctor of science, professor,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia,
National Research Nuclear University MEPhI,
31 Kashirskoye shosse, Moscow 115409, Russia,
e-mail: kasch@uniyar.ac.ru