Моделирование и анализ информационных систем. Т. 24, № 5 (2017), с. 567–577
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 24, No 5 (2017), pp. 567–577

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-5-567-577

УДК 513.7

О локально выпуклых кривых

Климов В. С.

получена 27 февраля 2017

Аннотация. Вводится понятие и устанавливаются свойства локально выпуклых кривых. В первом пункте рассматривается кривая K, допускающая параметрическое представление $x = u(t)$, $y = v(t)$, $(a \leqslant t \leqslant b)$, где $u(t), v(t)$ – непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a, b]$ функции, причём $|u'(t)| + |v'(t)| > 0 \, \forall t \in [a, b]$. Угловая функция $\theta(t)$ кривой K – это непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция, удовлетворяющая соотношениям

$$u'(t) = \sqrt{(u'(t))^2 + (v'(t))^2} \cos\theta(t), \quad v'(t) = \sqrt{(u'(t))^2 + (v'(t))^2} \sin\theta(t).$$

Кривая K называется локально выпуклой, если её угловая функция $\theta(t)$ строго монотонна на отрезке $[a, b]$. Для замкнутой кривой K число $degK = \dfrac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi}$ целое; оно равно числу оборотов, которое вектор скорости $(u'(t), v'(t))$ совершает вокруг начала координат. Основной результат пункта: если кривая K локально выпукла и замкнута, то для любой прямой G число $N(K; G)$ точек пересечения K с G конечно и верна оценка $N(K; G) \leqslant 2|degK|$.

Обсуждаются варианты этой оценки для незамкнутых и негладких кривых. В пунктах 2, 3 основное внимание уделяется кривым, возникающим при исследовании линейного однородного дифференциального уравнения вида $L(x) \equiv x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \cdots p_n(t)x = 0$ с локально суммируемыми коэффициентами $p_i(t) \, (i = 1, \cdots, n)$. Существенную роль начинают играть признаки неосцилляции дифференциального оператора L, установленные в работах Г.А. Бессмертных и А.Ю. Левина.

Ключевые слова: регулярная кривая, угловая функция, степень, прямая, дифференциальное уравнение, ломаная линия

Для цитирования: Климов В. С., "О локально выпуклых кривых", *Моделирование и анализ информационных систем*, **24**:5 (2017), 567–577.

Об авторе:
Климов Владимир Степанович, orcid.org/0000-0001-9560-8315, доктор физ.-мат. наук, профессор,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: VSK76@list.ru

1. Основные результаты

Пусть K – плоская спрямляемая кривая, G – прямая в той же плоскости. Обозначим через $N(G; K)$ число точек пересечения прямой G с кривой K. Справедлива оценка

$$N(K) := \sup_G N(G; K) \geqslant \frac{2L}{L_1},$$

где L – длина кривой K, а L_1 – периметр выпуклой оболочки K. Эта оценка является простым следствием известного в интегральной геометрии ([1], с. 20) равенства

$$\int N(G;K)dG = 2L,$$

где за область интегрирования принято множество всех прямых плоскости. В общем случае число $N(K)$ может принимать и бесконечные значения. Ниже устанавливаются оценки сверху $N(K)$ в терминах геометрических характеристик кривой K. Символы ◀ и ▶ означают начало и конец доказательства соответственно.

Основной результат относится к случаю, когда K – регулярная плоская кривая. Это означает, что кривая K задаётся параметрическими уравнениями

$$x = u(t), \quad y = v(t) \quad (t \in I = [a,b], -\infty < a < b < \infty), \tag{1}$$

где $u(t), v(t)$ – непрерывно дифференцируемые на отрезке I функции, причём $|u'(t)|+|v'(t)| > 0\,\forall t \in I$. Регулярность кривой влечёт за собой её локальную простоту. Более того, отрезок I можно разбить на конечное число таких отрезков $I_1, \cdots, I_m$, что соотношения $x = u(t), \quad y = v(t) \quad (t \in I_k, k = 1, \cdots, m)$ эквивалентны одному из равенств $y = f_1(x)$ или $x = f_1(y)$, в которых f_1, f_2 – гладкие функции одного переменного. Вместе с тем регулярная кривая может иметь точки самопересечения, т.е. такие точки, в которых кривая пересекает саму себя. Например, у лемнискаты есть такая точка, а у окружности подобных точек нет.

Каждой регулярной плоской кривой K, задаваемой уравнениями (2), можно сопоставить вектор-функцию $\vec{r}(t) = u(t)\vec{e_1}+v(t)\vec{e_2}$, где векторы $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ образуют правый ортонормированный базис в плоскости Oxy. Если $\vec{r} = \vec{r}(t) = u(t)\vec{e_1} + v(t)\vec{e_2}$ – векторное уравнение кривой K, то вектор-функция $\vec{r}(t)$ всюду дифференцируема на отрезке $I = [a,b]$ и

$$\vec{r}\,'(t) = u'(t)\vec{e_1} + v'(t)\vec{e_2}.$$

Вектор $\vec{r}\,'(t)$ отличен от нуля и направлен по касательной к кривой K в точке P, соответствующей значению параметра t. Введем обозначение

$$\vec{\tau}(t) = \frac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|}. \quad (t \in I). \tag{2}$$

Из (2) вытекает непрерывность на отрезке I вектор-функции $\vec{\tau}(t)$ и равенство $|\vec{\tau}(t)| = 1 \quad (t \in I)$. Поэтому существует и единственна непрерывная на отрезке I функция $\theta(t)$, удовлетворяющая предположениям

$$\vec{\tau}(t) = \vec{e}_1 \cos\theta(t) + \vec{e}_2 \sin\theta(t) \quad (t \in I), \quad 0 \leqslant \theta(a) < 2\pi.$$

С точностью до кратного 2π число $\theta(t)$ совпадает с величиной угла между векторами $\vec{e_1}$ и $\vec{\tau}(t)$. Её называют [2] *угловой функцией* поля $\vec{r}\,'(t)$ на кривой K.

Если вектор-функция $\vec{r}(t)$ дважды непрерывно дифференцируема на отрезке I, т. е. $u \in C^2(I), v \in C^2(I)$, то функция $\theta(t)$ всюду на отрезке I дифференцируема и

$$\theta'(t) = \frac{u'(t)v''(t) - u''(t)v'(t)}{u'^2(t) + v'^2(t)}. \tag{3}$$

В силу (3) функция $\theta(t)$ непрерывно дифференцируема, поэтому согласно формуле Ньютона–Лейбница справедливо равенство

$$\theta(b) - \theta(a) = \int_a^b \theta'(t)\,dt = \int_a^b \frac{u'(t)v''(t) - u''(t)v'(t)}{u'^2(t) + v'^2(t)}\,dt. \tag{4}$$

Число

$$\gamma(\vec{\tau}, K) = \frac{1}{2\pi}[\theta(b) - \theta(a)] \tag{5}$$

называют *вращением* поля $\vec{\tau}$ на кривой K. Оно зависит от ориентации кривой K. При переходе к противоположной ориентации абсолютная величина вращения сохраняется, а знак вращения меняется. Вращение $\gamma(\vec{\tau}, K)$ может быть любым действительным числом. Если $\vec{\tau}(b) = \vec{\tau}(a)$, то вращение является целым числом. Если же $\vec{\tau}(b) = -\vec{\tau}(a)$, то $\gamma(\vec{\tau}, K) = n - \frac{1}{2}$, где n – целое число.

Регулярную кривую K, задаваемую уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)\,(t \in [a, b])$, назовём *замкнутой*, если выполнено условие периодичности

$$\vec{r}(b) = \vec{r}(a), \quad \vec{r}\,'(b) = \vec{r}\,'(a). \tag{6}$$

Условие (6) позволяет продолжить вектор-функцию $\vec{r}(t)$ на всю действительную ось по периодическому закону

$$\vec{r}(t + b - a) = \vec{r}(t)\,\forall t \in \mathbb{R}.$$

Из (6) следует равенство $\vec{\tau}(b) = \vec{\tau}(a)$, поэтому число $\gamma(\vec{\tau}, K)$ – целое. Его называют *степенью* замкнутой регулярной кривой K и обозначают символом $degK$; в литературе встречаются иные термины и другие обозначения. Из (4), (5) вытекает равенство

$$degK = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{u'(t)v''(t) - u''(t)v'(t)}{u'^2(t) + v'^2(t)}\,dt, \tag{7}$$

представляющее весьма частный случай формулы Пуанкаре ([2], с. 12).

Для вычисления $degK$ по формуле (7) можно использовать методы приближенного интегрирования. Поскольку число $degK$ целое, то его точное значение будет известно, если правая часть в формуле (7) будет вычислена с погрешностью, меньшей чем, 0,5.

Достаточно удобный способ нахождения $degK$ основан на теореме Уитни о замкнутых регулярных кривых. Её формулировка и доказательство приведены, например, в [3]. Теорема Уитни относится к кривым с конечным числом $d(K)$ точек самопересечения, причём каждая из этих точек двукратна. Добиться выполнения этого предположения можно путем малого шевеления кривой, не меняющего её степени. Из результатов Уитни вытекает неравенство: $|degK| \leqslant d(K) + 1$.

Регулярную кривую K назовём *локально выпуклой*, если соответствующая ей угловая функция $\theta(t)$ строго монотонна. Кривая K может быть и незамкнутой. Из формулы (4) следует, что локальная выпуклость эквивалентна тому, что функция $u'(t)v''(t) - u''(t)v'(t)$ не меняет знака на отрезке $I = [a, b]$, а множество $T_0 = \{t \in$

$I : u'(t)v''(t) - u''(t)v'(t) = 0\}$ не содержит ни одного интервала. Переходя, если это нужно, к противоположной ориентации, можно считать, что $u'(t)v''(t) - u''(t)v'(t) > 0\, \forall t \notin T_0$. В частности, локально выпуклая кривая не содержит отрезков положительной длины.

Для локально выпуклой кривой K число точек пересечения с каждой прямой конечно и допускает простую оценку сверху через $degK$. Более точно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть K – локально выпуклая замкнутая кривая. Тогда*

$$N(K) \leqslant 2|degK|. \tag{8}$$

◀ Пусть прямая G на плоскости задаётся уравнением $Ax + By + C = 0$, где $A^2 + B^2 > 0$. Оценим сверху число $N(G; K)$ точек пересечения прямой G с кривой K, заданной параметрическими уравнениями (2). Не нарушая общности, можно считать, что $a = 0, b = 1$, а функции $u(t), v(t)$ определены на всей оси и периодичны:

$$u(t + 1) = u(t), \quad v(t + 1) = v(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

В этом случае функция $\varphi(t) := Au(t)+Bv(t)+C$ также периодична $(\varphi(t+1) = \varphi(t))$ и непрерывно дифференцируема. Будем (для определенности) считать, что угловая функция $\theta(t)$ строго возрастает; это предположение влечёт за собой неравенство $degK \geqslant 1$.

Обозначим через l число различных корней уравнения $\varphi(t) = 0$, принадлежащих промежутку $J_0 = [0, 1)$. Очевидно, что $N(G; K) \leqslant l$. Ввиду этого можно ограничиться случаем, когда $l > 1$.

Пусть p – число различных критических точек функции $\varphi(t)$ на промежутке J_0. Из теоремы Ролля и периодичности функции φ вытекает неравенство $l \leqslant p$. Пронумеруем критические точки t_i функции $\varphi(t)$ в порядке возрастания, так что $0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots t_{p-1} < t_p < 1, \quad \varphi'(t_i) = 0$. Равенство $\varphi'(t_i) = 0$ эквивалентно ортогональности векторов $A\vec{e}_1 + B\vec{e}_2$ и $\vec{\tau}(t_i) \quad (i = 1, 2, \cdots, p)$. Поскольку угловая функция $\theta(t)$ строго монотонна, то $\theta(t_i) - \theta(t_{i-1}) = \pi \, (i = 2, 3, \cdots, p)$ и $\theta(0) \leqslant \theta(t_1), \theta(t_p) < \theta(1)$. Отсюда вытекают соотношения

$$(p - 1)\pi = \sum_{i=2}^{p} (\theta(t_i) - \theta(t_{i-1}) < \theta(1) - \theta(0) = 2\pi degK.$$

Сокращая на π, приходим к неравенству $p < 2degK+1$, а поскольку p – натуральное число, то $p \leqslant 2degK$. Объединяя установленные выше оценки, последовательно получаем

$$N(G; K) \leqslant l \leqslant p \leqslant 2degK.$$

Теперь доказываемое утверждение очевидно.▶

Обсудим вопрос о точности неравенства (8). Если K – выпуклая замкнутая кривая, то $N(K) = 2|degK| = 2$ и неравенство (8) неулучшаемо. Для произвольной локально выпуклой кривой K число $N(K)$ может быть значительно меньше $2|degK|$. Соответствующие примеры легко усматриваются для кривых, задаваемых натуральным уравнением вида $k(s) = c\cos^2 s + 1 \quad (c > 0)$. Кривые подобного типа в связи с другими вопросами анализируются в работе [4].

Вместе с тем во всём классе локально выпуклых кривых с фиксированной степенью $degK$ неравенство (8) неулучшаемо. В качестве простого примера можно рассмотреть кривую

$$x = \cos 2\pi nt, \quad y = \sin 2\pi nt, \quad (t \in I = [0,1], n \in \mathbb{N}).$$

Эта кривая есть n раз проходимая в положительном направлении окружность единичного радиуса. При малом её шевелении можно получить кривую с конечным числом двойных точек.

Вариант оценки (8) верен и для незамкнутых локально выпуклых кривых. Пусть, как и выше, $\theta(t)$ – угловая функция локально выпуклой кривой K, задаваемой параметрическими уравнениями (1).

Теорема 2. *Если* $|\theta(b) - \theta(a)| \leqslant 2\pi q$, *где* $q \in \mathbb{N}$, *то*

$$N(K) \leqslant 2q + 1.$$

Доказательство теоремы можно провести по той же схеме, что и доказательство теоремы 1. Надо лишь в соответствующем месте использовать хорошо известное следствие теоремы Ролля: если в промежутке J функция f имеет n нулей, то её производная f' в этом же промежутке имеет самое меньшее $n-1$ нулей. (Для периодических функций это следствие допускает определенное усиление, которое и применялось выше).

2. Приложения к дифференциальным уравнениям

Локально выпуклые кривые естественным образом возникают при изучении нетривиальных решений линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка

$$\mathscr{L}x \equiv x'' + p(t)x' + q(t)x = 0. \tag{9}$$

Будем считать, что функции $p(t), q(t)$ определены и непрерывны на отрезке $I = [a,b]$. В этом случае решения уравнения (9) дважды непрерывно дифференцируемы.

Лемма 1. *Пусть* $|q(t)| > 0\,\forall t \in I$. *Если* $u(t), v(t)$ *– фундаментальная система решений уравнения (9), то определяемая параметрическими уравнениями (1) кривая* K *локально выпукла, более того, условие локальной выпуклости выполняется в усиленной форме*

$$u'(t)v''(t) - u''(t)v'(t) \neq 0\,\forall t \in I. \tag{10}$$

◀ Так как u, v – решения уравнения (9), то

$$u''(t) = -p(t)u' - q(t)u, \quad v''(t) = -p(t)v' - q(t)v.$$

Отсюда легко выводится равенство

$$u'(t)v''(t) - u''(t)v'(t) = q(t)W(t),$$

в котором $W(t) = u(t)v'(t) - u'(t)v(t)$ – вронскиан системы функций $\{u(t), v(t)\}$. Поскольку функции $q(t), W(t)$ нигде на отрезке I не обращаются в нуль, то условие выпуклости (10) имеет место. ▶

Верно и обратное к лемме 1 утверждение.

Лемма 2. *Пусть u, v – функции класса $C^2(I)$, для которых выполнено условие (10) и $W(t) = u(t)v'(t) - u'(t)v(t) \neq 0 \, \forall t \in I$. Тогда функции $u(t), v(t)$ образуют фундаментальную систему решений дифференциального уравнения вида (9), в котором $p, q \in C[I]$ и $q(t) \neq 0 \, \forall t \in I$.*

◀ Искомое дифференциальное уравнение хорошо известно. Оно может быть записано в стандартной форме

$$\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ u & u' & u'' \\ v & v' & v'' \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая этот определитель по первой строке и поделив получающееся равенство на $W(t)$, приходим к уравнению (9) с коэффициентами

$$p(t) = \frac{u''(t)v(t) - u(t)v''(t)}{W(t)}, q(t) = \frac{u'(t)v''(t) - u''(t)v'(t)}{W(t)}.$$

Функции $p(t), q(t)$ обладают нужными свойствами.▶

Лемма 3. *Пусть u, v – функции класса $C^3(I)$. Тогда неравенство (10) эквивалентно тому, что тройка функций $\{1, u(t), v(t)\}$ есть фундаментальная система решений уравнения*

$$x''' + p_1(t)x'' + q_1(t)x' = 0, \tag{11}$$

в котором $p_1, q_1 \in C(I)$.

◀ Пусть $W(t)$ есть определитель Вронского системы $\{1, u(t), v(t)\}$. Как нетрудно видеть, справедливо равенство

$$W(t) = u'(t)v''(t) - u''(t)v'(t).$$

Уравнение (11) в рассматриваемом случае имеет вид

$$W^{-1}(t) \begin{vmatrix} x & x' & x'' & x''' \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ u & u' & u'' & u''' \\ v & v' & v'' & v''' \end{vmatrix} = 0.$$

Имеют место равенства

$$p_1(t) = \frac{u'(t)v'''(t) - u'''(t)v'(t)}{W(t)}, \quad q_1(t) = \frac{u'''(t)v''(t) - u''(t)v'''(t)}{W(t)},$$

влекущие за собой включения $p_1 \in C(I), q_1 \in C(I)$. ▶

Если $\varphi(t)$ – решение уравнения (11), то функция $\varphi'(t)$ – решение уравнения

$$\mathscr{L}_1(y) := y'' + p_1(t)y' + q_1(t)y = 0. \tag{12}$$

В силу теоремы Ролля между двумя нулями функции $\varphi(t)$ находится нуль её производной, поэтому число нулей l функции φ связано с числом нулей l_1 функции φ' неравенством $l \leq l_1 + 1$. Это позволяет использовать для оценки числа нулей нетривиальных решений уравнения (1) богатый арсенал средств, относящийся к дифференциальному уравнению второго порядка (12).

Ограничимся здесь лишь наиболее просто формулируемым и характерным результатом.

Теорема 3. *Пусть коэффициенты $p_1(t), q_1(t)$ оператора $\mathscr{L}_1$ удовлетворяют неравенствам*

$$|p_1(t)| \leqslant M_1, \quad |q_1(t)| \leqslant M_2 \quad (t \in I, M_1 > 0, M_2 > 0). \tag{13}$$

Пусть

$$h = \frac{\sqrt{4M_1^2 + 8M_2} - 2M_1}{M_2}. \tag{14}$$

Тогда любое нетривиальное решение $z(t)$ уравнения (12) имеет на отрезке $I = [a, b]$ не более $\dfrac{b-a}{h} + 1$ нулей.

◀ Пусть $z(t)$ – нетривиальное решение уравнения (12). Число нулей функции $z(t)$ на отрезке I конечно, обозначим его через n. Расположим корни уравнения $z(t) = 0$ в порядке возрастания: $a \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leqslant b$. Из оценок (13) вытекает (см., например, [5],[6]), что $t_{i+1} - t_i \geqslant h$. Справедлива цепь неравенств

$$(n-1)h \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \leqslant b - a.$$

Теперь доказываемое утверждение очевидно. ▶

Следствие 1. *В условиях теоремы 3 любое нетривиальное решение $\varphi(t)$ уравнения (11) имеет не более $\dfrac{b-a}{h} + 2$ нулей.*

Следствие 2. *Пусть функции $u(t), v(t)$ принадлежат классу $C^3(I)$ и определитель Вронского $W(t)$ системы $\{1, u(t), v(t)\}$ всюду положителен. Пусть M_1, M_2 – такие положительные постоянные, что для всех t из I справедливы неравенства*

$$|u'(t)v'''(t) - u'''(t)v'(t)| \leqslant M_1 W(t), \quad |u'''(t)v''(t) - u''(t)v'''(t)| \leqslant M_2 W(t).$$

Тогда $N(K) \leqslant \dfrac{b-a}{h} + 2$, где h определено равенством (14).

Комбинируя леммы 1, 2 с признаками неосцилляции дифференциального оператора $\mathscr{L}$, можно установить оценки сверху числа $N(G, K)$ для прямых G, задаваемых однородным уравнением $Ax + By = 0$, и кривой K, задаваемой параметрическими уравнениями (1). В более общем контексте эти вопросы обсуждаются в следующем пункте.

3. Обсуждение потенциальных обобщений

Ниже рассматриваются некоторые варианты понятия локально выпуклой кривой. Анонсируются аналоги теорем 1, 3.

Введенное выше определение локальной выпуклости неприменимо к локально липшицевым кривым, возникающим при замене класса $C^1(I)$ более широким классом $C^{0,1}(I)$, состоящим из функций, удовлетворяющих на отрезке I условию Липшица. Для функций этого класса развит аналог дифференциального исчисления, называемый рядом авторов негладким анализом. Понятие производной существенным образом расширяется, естественным образом появляются многозначные функции и отображения. Вместе с тем для функций данного класса верны аналоги теорем Ферма и Ролля. Это позволяет распространить установленные выше результаты на липшицевы кривые.

Приведём здесь лишь одно утверждение, относящееся к замкнутым ломаным линиям. Пусть $A_0, A_1, \cdots, A_n = A_0$ – вершины ломаной линии K с n звеньями $A_0A_1, A_1A_2, \cdots, A_{n-1}A_n$ положительной длины. Положим $A_{n+1} = A_1$. Ломаная линия K может иметь самопересечения. Введём в рассмотрение векторы

$$\vec{h}_i = \frac{\overrightarrow{A_{i-1}A_i}}{|\overrightarrow{A_{i-1}A_i}|} \quad (i = 1, 2, \ldots, n, n+1).$$

Очевидно, что длины всех векторов $\vec{h}_i$ равны 1 и $\vec{h}_{n+1} = \vec{h}_1$. Назовём K *локально выпуклой ломаной*, если для любого $j = 1, \cdots, n$ вектор $\vec{h}_{j+1}$ есть результат поворота (против часовой стрелки) предшествующего вектора $\vec{h}_j$ на угол $\psi_j \in (0, \pi)$. Это и эквивалентные ему определения локально выпуклой ломаной приводятся в [7].

Натуральное число

$$deg(K) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{n} \psi_j$$

назовём *степенью* K. Оно равно 1 лишь в случае, когда K есть граница выпуклого многоугольника.

Для ломаной K введенную выше числовую характеристику $N(G; K)$ необходимо несколько изменить. Именно, под $N(G; K)$ следует понимать число связных компонент пересечения прямой G с ломаной K. Сформулируем вариант теоремы 1.

Теорема 4. *Пусть K – локально выпуклая замкнутая ломаная. Тогда $N(G; K) \leqslant 2degK$ для любой прямой G.*

Аналоги теоремы 4 верны для липшицевых кривых. При этом необходимо соответствующим образом модернизировать понятие локально выпуклой кривой. В общем случае угловая функция монотонна, но может иметь и точки разрыва, и участки постоянства.

Подробнее остановимся на многомерном варианте теоремы 3. Пусть K – кривая в n – мерном пространстве $\mathbb{R}^n$, задаваемая параметрическими уравнениями

$$x_1 = u_1(t), \cdots, x_n = u_n(t), \tag{15}$$

где $u_1, \cdots, u_n$ – непрерывные на промежутке (α, β) $(\alpha < \beta)$ функции. Кривую K назовём *локально выпуклой,* если для каждой точки $t_0 \in (\alpha, \beta)$ существует такое $\delta > 0$, что $\{u_1, \cdots, u_n\}$ есть T- система (система Чебышева) на отрезке $[t_0-\delta, t_0+\delta] \subset (\alpha, \beta)$. По определению T - систем это означает, что каждый многочлен

$$P(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k(t) \quad \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 > 0 \right)$$

имеет в $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ менее n корней.

В качестве примера рассмотрим кривые, возникающие при изучении линейного однородного дифференциального уравнения

$$Lx \equiv x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_n(t)x = 0, \tag{16}$$

где коэффициенты $p_i(t)\,(i = 1, \cdots, n)$ определены и локально суммируемы на интервале (α, β). Если $\{u_1, \cdots, u_n\}$ – фундаментальная система решений уравнения (16), то кривая (15) локально выпукла [8, 9]. В частности, для любого отрезка $J = [a, b] \subset (\alpha, \beta)$ и любого нетривиального решения $x(t)$ уравнения (16) число корней уравнения $x(t) = 0$ конечно. На геометрическом языке это означает, что часть кривой K, отвечающая параметру $t \in J$ и обозначаемая далее через K_J, пересекается конечное число раз с любой проходящей через начало координат гиперплоскостью $G \subset \mathbb{R}^n$. Обозначим через $N(G; K_J)$ число точек пересечения $G \cap K_J$.

Используя признаки неосцилляции [8,9] дифференциального оператора L, можно дать оценки сверху числа $N(G; K_J)$. Например, пусть коэффициенты $p_i(t)$ удовлетворяют неравенствам

$$|p_i(t)| \leqslant M_i \qquad (t \in J, i = 1, \cdots, n), \tag{17}$$

в которых $M_i\,(i = 1, \cdots, n)$ – положительные постоянные. Введём в рассмотрение числа

$$\xi_k = \frac{n-k}{k!n} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \quad \xi_n = \frac{(n-1)^{n-1}}{n!n^n}$$

и многочлен

$$\Phi(\lambda) = -1 + \sum_{k=1}^{n} \xi_k M_k \lambda^k.$$

Обозначим через h единственный положительный корень многочлена Φ. Из результатов [6],[8] вытекает, что на каждом отрезке $\Delta \in (\alpha, \beta)$, длина которого меньше h, любое нетривиальное решение уравнения (16) имеет не более $n - 1$ нуль. Отсюда несложно выводится оценка сверху числа $N(G; K_J)$.

Теорема 5. *Пусть коэффициенты* $p_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ *на отрезке* $J = [a, b]$ *удовлетворяют неравенствам (17). Тогда*

$$N(G; K_J) \leqslant 1 + (n-1)\frac{b-a}{h}$$

для любой проходящей через начало координат гиперплоскости $G \subset \mathbb{R}^n$.

Литература, посвящённая признакам неосцилляции и их приложениям, насчитывает многие сотни наименований. Не претендуя на роль обзора, укажу лишь на работы [8] – [10], содержащие значительную библиографию.

Список литературы / References

[1] Сантало Л. А., *Введение в интегральную геометрию*, Издательство иностранной литературы, М., 1956, 184 с.; [Luis A. Santaló, *Introduction to integral geometry*, Hermann, 1953, 127 pp., (in English).]

[2] Красносельский М. А., Перов А. И., Поволоцкий А. И., Забрейко П. П., *Векторные поля на плоскости*, Физматгиз, М., 1963, 248 с.; English transl.: Krasnosel'skii M. A., Perov A. I., Povolockii A. I., Zabreiko P. P., *Plane Vector Fields*, New York City: Academic Press, 1966, 242 pp.

[3] Прасолов В. В., *Элементы комбинаторной и дифференциальной геометрии*, МЦНМО, М., 2004; [Prasolov V. V., *Elementy kombinatornoi i differencialnoi geometrii*, MCNMO, Moscow, 2004, (in Russian).]

[4] Иванов А. О., Тужилин А. А., Фоменко А. Т., "Компьютерное моделирование кривых и поверхностей", *Фундаментальная и прикладная математика*, **15**:5 (2009), 63–94; English transl.: Ivanov A. O., Tuzhilin A. A., Fomenko A. T., "Computer modeling of curves and surfaces", *J. Math. Sci.*, **172**:5 (2011), 663–689.

[5] Трикоми Ф., *Дифференциальные уравнения*, ИЛ, М., 1962; [Tricomi F. G., *Differencial equations*, Blackie & Son Limited, 1961, (in English).]

[6] Бессмертных Г. А., Левин А. Ю., "О некоторых оценках дифференцируемых функций одной переменной", *ДАН СССР*, **144**:3 (1962), 471–474; [Bessmertnyh G. A., Levin A. Yu., "O nekotoryh ocenkah differencyruemyh funccii odnoi peremennoi", *DAN SSSR*, **144**:3 (1962), 471–474, (in Russian).]

[7] Запутряева Е. С., "Изгибания равносторонних многоугольников с сохранением индекса", *Модел. и анализ информ. систем*, **20**:1 (2013), 138–159; [Zaputryaeva E. S., "Deformations of Planar Equilateral Polygons with a Constant Index", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **20**:1 (2013), 138–159, (in Russian).]

[8] Левин А. Ю., "Неосцилляция решений уравнения $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + p_n(t)x = 0$", *УМН*, **24**:2(146) (1969), 43–96; [Levin A. Yu., "Nonoscillation of solutions of the equation $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + p_n(t)x = 0$", *Russian Math. Surveys*, **24**:2(146) (1969), 43–96, (in Russian).]

[9] Дерр В. Я., "Неосцилляция решений линейных дифференциальных уравнений", *Вестник Удмуртского ун-та*, **15**:5 (2009), 46–89; [Derr V. A., "Nonoscillation of solutions of linear differential equations", *Vestnik Udmurtskogo universiteta*, **15**:5 (2009), 46–89, (in Russian).]

[10] Анисов С. С., "Выпуклые кривые в $\mathbb{RP}^n$", *Сборник статей. К 60-летию со дня рождения академика Владимира Игоревича Арнольда, Тр. МИАН*, **221** (1998), 9–47; English transl.: Anisov S. S., "Convex curves in $\mathbb{RP}^n$", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **221** (1998), 3–39.

Klimov V. S., "On Locally Convex Curves", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:5 (2017), 567–577.

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-5-567-577

Abstract. We introduce the definition of locally convex curves and establish some properties of such curves. In the section 1, we consider the curve K allowing the parametric representation $x = u(t)$, $y = v(t)$, $(a \leqslant t \leqslant b)$, where $u(t)$, $v(t)$ are continuously differentiable on $[a, b]$ functions such that $|u'(t)| + |v'(t)| > 0\,\forall t \in [a, b]$. A continuous on $[a, b]$ function $\theta(t)$ is called *the angle function of the curve* K if the following conditions hold: $u'(t) = \sqrt{(u'(t))^2 + (v'(t))^2}\cos\theta(t)$, $v'(t) = \sqrt{(u'(t))^2 + (v'(t))^2}\sin\theta(t)$. The curve K is called *locally convex* if its angle function $\theta(t)$ is strictly monotonous on $[a, b]$. For a closed curve K the number $degK = \dfrac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi}$ is whole. This number is equal to the number of rotations that the speed vector $(u'(t), v'(t))$ performs around the origin. The main result of the first section is the statement: if the curve K is locally convex, then for any straight line G the number $N(K; G)$ of intersections of K and G is finite and the estimate $N(K; G) \leqslant 2|degK|$ holds. We discuss versions of this estimate for closed and non-closed curves. In the sections 2 and 3, we consider curves arising in the investigation of a linear homogeneous differential equation of the form $L(x) \equiv x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \cdots p_n(t)x = 0$ with locally summable coefficients $p_i(t)\,(i = 1, \cdots, n)$. We demonstrate how conditions of disconjugacy of the differential operator L that were established in works of G. A. Bessmertnyh and A. Yu. Levin, can be applied.

Keywords: regular curve, corner function, degree, straight line, differential equation, polyline

On the author:
Vladimir S. Klimov, orcid.org/0000-0001-9560-8315, doctor of science,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia,
e-mail: VSK76@list.ru