Моделирование и анализ информационных систем. Т. 24, № 5 (2017), с. 596–614
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 24, No 5 (2017), pp. 596–614

©Нестеров П. Н., 2017

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-5-596-614

УДК 517.968.72

Асимптотическое интегрирование некоторых дифференциальных уравнений в банаховом пространстве

Нестеров П. Н.

получена 26 марта 2017

Аннотация. В работе исследуется задача построения асимптотических представлений для слабых решений некоторого класса линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве при стремлении независимой переменной к бесконечности. Исследуется класс уравнений, являющихся возмущением линейного автономного уравнения, вообще говоря, с неограниченным оператором. В качестве возмущения выступает семейство ограниченных операторов, которое в определенном смысле убывает колебательным образом на бесконечности. Относительно невозмущенного уравнения предполагаются выполненными стандартные требования теории центральных многообразий. Суть предложенного метода асимптотического интегрирования состоит в доказательстве существования у исходного уравнения многообразия типа центрального (критического многообразия). Это многообразие является положительно инвариантным для исходного уравнения и притягивает все траектории слабых решений. Динамика исходного уравнения на критическом многообразии описывается конечномерной системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Асимптотика фундаментальной матрицы этой системы может быть построена с помощью разработанного автором метода асимптотического интегрирования систем с колебательно убывающими коэффициентами. В качестве примера использования предложенной техники в работе строятся асимптотические представления для решений возмущенного уравнения теплопроводности.

Ключевые слова: асимптотика, дифференциальное уравнение, банахово пространство, колебательно убывающие коэффициенты, метод центральных многообразий, возмущенное уравнение теплопроводности

Для цитирования: Нестеров П. Н., "Асимптотическое интегрирование некоторых дифференциальных уравнений в банаховом пространстве", *Моделирование и анализ информационных систем*, **24**:5 (2017), 596–614.

Об авторе:
Нестеров Павел Николаевич, orcid.org/0000-0002-9102-9436, канд. физ.-мат. наук, доцент,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: nesterov.pn@gmail.com

Благодарности:
Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации № МК-4625.2016.1.

Постановка задачи

В работе изучается уравнение

$$\dot{u} = \big[A + G(t)\big]u, \quad t \geq t_0, \tag{1}$$

где u — элемент комплексного банахова пространства $\mathcal{B}$. Здесь A — замкнутый линейный оператор с плотной в $\mathcal{B}$ областью определения, который является генератором сильно непрерывной полугруппы линейных ограниченных операторов $T(t)$: $\mathcal{B} \to \mathcal{B}$ $(t \geq 0)$. Далее, $G(t)$ $(t \geq t_0)$— семейство линейных ограниченных операторов, действующих из $\mathcal{B}$ в $\mathcal{B}$, причем

$$G(t) = B(t) + R(t). \tag{2}$$

В представлении (2) семейство линейных ограниченных операторов $B(t)$ обладает тем свойством, что операторная функция $B(t)$ сильно измерима на любом отрезке $[t_0, T]$, $T \geq t_0$, и $\|B(t)u\|$ стремится к нулю колебательным образом при $t \to \infty$ для любого $u \in \mathcal{B}$. Более точно структура этого семейства операторов будет определена позднее. Далее, семейство линейных ограниченных операторов $R(t)$ также является сильно измеримым на любом отрезке $[t_0, T]$, $T \geq t_0$, и, кроме того, существует такая функция $\gamma(t) \in L_1[t_0, \infty)$, что

$$\|R(t)u\|_{\mathcal{B}} \leq \gamma(t)\|u\|_{\mathcal{B}} \tag{3}$$

для любого $u \in \mathcal{B}$. Целесообразность изучения уравнений вида (1), где операторная функция $G(t)$ понимается как некоторое параметрическое возмущение с непрерывным спектром, отмечена, в частности, в известной монографии [6, стр. 230].

Всюду в этой работе решение уравнения (1) с начальным условием $u(t_0) = u_0$ понимается в слабом смысле (см. [9]), точнее, как решение интегрального уравнения

$$u(t) = T(t - t_0)u_0 + \int\limits_{t_0}^{t} T(t - s)G(s)u(s)ds. \tag{4}$$

Из результатов работ [9,10] (см. также [8]) следует, что для любого $u_0 \in \mathcal{B}$ существует единственное непрерывное на отрезке $[t_0, T]$ $(T \geq t_0)$ слабое решение уравнения (1) с начальным условием $u(t_0) = u_0$, и это решение задается формулой (4). Нас будет интересовать вопрос об асимптотическом поведении решений уравнения (4) при $t \to \infty$, если на оператор A наложены следующие дополнительные условия. Предположим, что

(i)

$$\mathcal{B} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}, \tag{5}$$

где линейное конечномерное подпространство $\mathcal{X}$ есть линейная оболочка обобщенных собственных векторов оператора A, отвечающих собственным числам $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ с нулевой вещественной частью (с учетом кратностей);

(ii) замкнутое линейное подпространство $\mathcal{Y}$ инвариантно относительно полугруппы $T(t)$, и кроме того, для любого $y \in \mathcal{Y}$ имеет место неравенство

$$\|T(t)y\|_{\mathcal{B}} \leq Ke^{-\alpha t}\|y\|_{\mathcal{B}}, \quad t \geq 0, \tag{6}$$

где $K, \alpha > 0$.

Сформулированные условия (i) и (ii) — это стандартные требования теории центральных многообразий (см., например, [3, 11, 20]). Мы воспользуемся основными идеями этой теории, а также вариантом метода усреднения, предложенным в работе [4], для построения асимптотики слабых решений уравнения (1) при $t \to \infty$.

1. Критическое многообразие и его свойства

Мы начнем этот раздел с уточнения вида операторной функции $B(t)$ в (2). Следуя [4, 6], будем считать, что

$$B(t) = \sum_{i=1}^{n} v_i(t) B_i(t) + \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le n} v_{i_1}(t) v_{i_2}(t) B_{i_1 i_2}(t) + \ldots + \\ + \sum_{1 \le i_1 \le \ldots \le i_k \le n} v_{i_1}(t) \cdot \ldots \cdot v_{i_k}(t) B_{i_1 \ldots i_k}(t). \quad (7)$$

Здесь $B_{i_1 \ldots i_l}(t)$ — операторные функции, относительно которых предполагается, что

$$B_{i_1 \ldots i_l}(t) = \sum_{j=1}^{M} e^{\mathrm{i}\omega_j t} b_j^{(i_1 \ldots i_l)}, \quad (8)$$

где $b_j^{(i_1 \ldots i_l)}$ — линейные ограниченные операторы, не зависящие от t и действующие из $\mathcal{B}$ в $\mathcal{B}$. Наконец, $v_1(t), \ldots, v_n(t)$ — скалярные абсолютно непрерывные на $[t_0, \infty)$ функции такие, что

1^0. $v_1(t) \to 0, v_2(t) \to 0, \ldots, v_n(t) \to 0$ при $t \to \infty$;

2^0. $\dot{v}_1(t), \dot{v}_2(t), \ldots, \dot{v}_n(t) \in L_1[t_0, \infty)$;

3^0. Произведение $v_{i_1}(t) v_{i_2}(t) \ldots v_{i_{k+1}}(t) \in L_1[t_0, \infty)$ для любого набора $1 \le i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_{k+1} \le n$.

Определение 1. *Линейное N-мерное подпространство $\mathcal{W}(t) \subset \mathcal{B}$ будем называть критическим многообразием для уравнения (1) при $t \ge t_* \ge t_0$, если выполнены следующие условия:*

1. Существует вектор-строка $H(t) = \big(h_1(t), \ldots, h_N(t)\big) \in \mathcal{Y}^N$, составленная из непрерывных при $t \ge t_*$ функций со значениями из подпространства $\mathcal{Y}$, такая что $\|H(t)\|_{\mathcal{B}^N} \to 0$ при $t \to \infty$, где

$$\|H(t)\|_{\mathcal{B}^N} = \big|\big(\|h_1(t)\|_{\mathcal{B}}, \ldots, \|h_N(t)\|_{\mathcal{B}}\big)\big| \quad (9)$$

и $|\cdot|$ — некоторая норма в пространстве вектор-строк длины N;

2. Множество $\mathcal{W}(t)$ для $t \ge t_*$ задается формулой

$$\mathcal{W}(t) = \Big\{ u \in \mathcal{B} \;\Big|\; u = \Phi w + H(t) w,\ w \in \mathbb{C}^N \Big\}. \quad (10)$$

Здесь вектор-строка $\Phi = \big(\varphi_1, \ldots, \varphi_N\big) \in \mathcal{B}^N$ составлена из обобщенных собственных векторов оператора A, отвечающих собственным числам $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ из условия (i), которые образуют базис подпространства $\mathcal{X}$. Далее, символом $\mathbb{C}^N$ обозначено пространство комплекснозначных вектор-столбцов длины N, а произведение

вектор-строки $U = (u_1, \ldots, u_N) \in \mathcal{B}^N$ *и вектор-столбца* $w = (w_1, \ldots, w_N)^T$ *понимается в стандартном смысле:* $Uw = u_1 w_1 + \ldots + u_N w_N$*;*

3. Множество $\mathcal{W}(t)$ *при* $t \geq t_*$ *положительно инвариантно относительно решений уравнения* (1)*, т.е. если* $u(T) \in \mathcal{W}(T)$*,* $T \geq t_*$*, то* $u(t) \in \mathcal{W}(t)$ *для всех* $t \geq T$*.*

Перед тем, как вывести систему уравнений, описывающую динамику решений уравнения (1) на критическом многообразии $\mathcal{W}(t)$, напомним следующие факты из теории сопряженных операторов в банаховых пространствах. Пусть $\mathcal{B}^*$ — сопряженное к $\mathcal{B}$ пространство (пространство линейных ограниченных функционалов, заданных на $\mathcal{B}$) и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скобка двойственности между пространствами $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}^*$, так что

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \psi(\varphi) \in \mathbb{C} \tag{11}$$

для любых $\varphi \in \mathcal{B}$ и $\psi \in \mathcal{B}^*$. При этом если $U = (u_1, \ldots, u_l) \in \mathcal{B}^l$ и $V = (v_1, \ldots, v_m)^T \in (\mathcal{B}^*)^m$, то $\langle U, V \rangle$ есть $(m \times l)$ матрица, такая что

$$\langle U, V \rangle = \big\{ v_i(u_j) \big\}_{\substack{1 \leq i \leq m, \\ 1 \leq j \leq l}}.$$

Пусть A' — сопряженный к A линейный замкнутый оператор, действующий из пространства $\mathcal{B}^*$ в $\mathcal{B}^*$. Как известно (см., например, [1, 14]), в силу предположения (i) относительно оператора A оператор A' также имеет собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$, причем размерности соответствующих друг другу обобщенных собственных подпространств этих операторов, отвечающих одинаковым собственным числам, совпадают. Обозначим символом $\Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_N)^T \in (\mathcal{B}^*)^m$ вектор-столбец длины N, состоящий из линейно независимых обобщенных собственных векторов оператора A', отвечающих собственным числам $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$. Считаем, что вектор-столбец Ψ выбран так что

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = I, \tag{12}$$

где I — $(N \times N)$ единичная матрица (см., [7, 13]). Заметим, в частности, что одним из возможных выборов дополнительного подпространства к $\mathcal{X}$ в условии (i) является выбор в качестве этого подпространства множества $\mathcal{Y} = \big\{ u \in \mathcal{B} \mid \langle u, \Psi \rangle = 0 \big\}$.

Построим далее систему, описывающую динамику решений уравнения (1) на критическом многообразии $\mathcal{W}(t)$, в предположении существования этого многообразия при достаточно больших t. Пусть P — оператор проектирования на подпространство $\mathcal{X}$ вдоль $\mathcal{Y}$. Заметим, что P есть линейный ограниченный оператор, определенный во всем пространстве $\mathcal{B}$ (см., например, [14]). В силу условия (i) заключаем, что если $u \in \mathcal{B}$, то

$$u(t) = u_{\mathcal{X}}(t) + u_{\mathcal{Y}}(t), \qquad t \geq t_0, \tag{13}$$

где

$$u_{\mathcal{X}}(t) = Pu(t) \in \mathcal{X}, \quad u_{\mathcal{Y}}(t) = (1 - P)u(t) \in \mathcal{Y} \tag{14}$$

и символом 1 обозначен тождественный оператор. Заметим, что поскольку подпространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ инвариантны относительно оператора A и полугруппы $T(t)$, то для всех $t \geq 0$ и $u \in \mathcal{B}$ имеют место равенства

$$PT(t)u = T(t)Pu, \quad (1 - P)T(t)u = T(t)(1 - P)u. \tag{15}$$

Подставляя (13) в интегральное уравнение (4) и учитывая (14), (15), получаем

$$u_{\mathcal{X}}(t) = T(t-t_0)u_{\mathcal{X}}(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} T(t-s)PG(s)u(s)ds, \tag{16}$$

$$u_{\mathcal{Y}}(t) = T(t-t_0)u_{\mathcal{Y}}(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} T(t-s)(1-P)G(s)u(s)ds. \tag{17}$$

Поскольку

$$u_{\mathcal{X}}(t) = Pu(t) = \Phi w(t) \tag{18}$$

для некоторого $w(t) \in \mathbb{C}^N$, то

$$\Phi w(t) = T(t-t_0)\Phi w(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} T(t-s)PG(s)u(s)ds. \tag{19}$$

Кроме того, из (i) следует, что $A\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}$, а значит, существует такая $(N\times N)$-матрица D, спектром которой является множество $\{\lambda_1, \dots \lambda_N\}$, что

$$A\Phi = \Phi D. \tag{20}$$

Заметим, что если элемент $u \in \mathcal{B}$ принадлежит области определения оператора A, то на основании [18, p. 4, Theorem 2.4] имеем

$$\frac{dT}{dt}u = TAu = ATu. \tag{21}$$

Очевидно, что все элементы подпространства $\mathcal{X}$ заведомо принадлежат области определения оператора A. Дифференцируя тогда выражение (19) и учитывая (21), получаем

$$\Phi\dot{w}(t) = AT(t-t_0)\Phi w(t_0) + PG(t)u(t) + A\int\limits_{t_0}^{t} T(t-s)PG(s)u(s)ds =$$
$$= A\Phi w(t) + PG(t)u(t).$$

Откуда в силу (20) выводим, что

$$\Phi\dot{w} = \Phi D w(t) + PG(t)u(t) \tag{22}$$

или с учетом (12)

$$\dot{w} = Dw(t) + \langle PG(t)u(t), \Psi\rangle. \tag{23}$$

Пусть $u(t_*) \in \mathcal{W}(t_*)$, тогда в силу инвариантности критического многообразия, используя (10), заключаем, что при $t \geq t_*$ для решения $u(t)$ имеет место представление

$$u(t) = \Phi w(t) + H(t)w(t). \tag{24}$$

Подставляя (24) в (23), имеем

$$\dot{w} = \big[D + \langle PG(t)(\Phi + H(t)), \Psi\rangle\big]w(t), \quad t \geq t_*, \quad w \in \mathbb{C}^N. \tag{25}$$

Систему (25) будем называть проекцией уравнения (1) на критическое многообразие $\mathcal{W}(t)$ или просто системой на критическом многообразии.

Теорема 1. *При достаточно больших t у системы* (1) *существует критическое многообразие $\mathcal{W}(t)$, определяемое формулой* (10).

Доказательство. В силу представления (24) имеем

$$(1-P)u(t) = u_{\mathcal{Y}}(t) = H(t)w(t).$$

Используя это равенство наряду с формулой (24) в (17) и полагая $t_0 = t_*$, приходим к уравнению

$$H(t)w(t) = T(t-t_*)H(t_*)w(t_*) + \int\limits_{t_*}^{t} T(t-s)(1-P)G(s)\big[\Phi + H(s)\big]w(s)ds. \tag{26}$$

Пусть $W_H(t,s)$ $(t,s \geq t_*)$ — матрица Коши системы (25) $(W_H(s,s) = I)$. Тогда, учитывая, что $w(t) = W_H(t,t_*)w(t_*)$ и используя свойства матрицы $W_H(t,s)$, запишем уравнение (26) в следующем операторном виде:

$$H(t) = \Gamma H(t), \tag{27}$$

$$\Gamma H(t) = T(t-t_*)H(t_*)W_H(t_*,t) + \int\limits_{t_*}^{t} T(t-s)(1-P)G(s)\big[\Phi + H(s)\big]W_H(s,t)ds. \tag{28}$$

Областью определения оператора Γ будем считать банахово пространство $\mathcal{C}$ непрерывных по $t \geq t_*$ вектор-строк $H(t)$ длины N со значениями из пространства $\mathcal{Y}^N$ и фиксированным начальным условием $H(t_*)$ таких, что $\|H(t)\|_{\mathcal{B}^N} \to 0$ при $t \to \infty$. Норму в этом пространстве определим следующим образом:

$$\|H\|_{\mathcal{C}} = \sup_{t \geq t_*} \|H(t)\|_{\mathcal{B}^N}. \tag{29}$$

В силу (6) для любого $U \in \mathcal{B}^N$ имеет место оценка

$$\|T(t)(1-P)U\|_{\mathcal{B}^N} \leq Ke^{-\alpha t}\|U\|_{\mathcal{B}^N}, \quad t \geq 0. \tag{30}$$

Здесь и всюду далее различные константы, точные значения которых нам не важны, мы будем обозначать одинаковыми символами. Кроме того, из (2), (3), (7) и (8) следует, что

$$\|G(t)U\|_{\mathcal{B}^N} \leq p(t)\|U\|_{\mathcal{B}^N}, \qquad p(t) = f(t) + \gamma(t). \tag{31}$$

Здесь $f(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и $\gamma(t)$ — некоторая функция из класса $L_1[t_0,\infty)$.

Дальнейшие шаги в доказательстве опираются на использование принципа сжимающих отображений. Аналогично тому, как это делается при доказательстве теоремы 1 в работе [5] (см. также [17, Theorem 4.3]), несложно показать, что оператор Γ переводит некоторый замкнутый шар $\|H\|_{\mathcal{C}} \leq r_0$ пространства $\mathcal{C}$ в себя и является в этом шаре сжимающим, если t_* достаточно велико, а начальное условие $\|H(t_*)\|_{\mathcal{B}^N}$ выбрано достаточно малым. □

Для приближенного нахождения вектор-строки $H(t)$, описывающей критическое многообразие $\mathcal{W}(t)$ в силу формулы (10), будем действовать следующим образом. Подставим представление (24) в уравнение (1) и учтем (20), (22) и (25). Имеем,

$$\Phi Dw(t) + PG(t)\big(\Phi + H(t)\big)w(t) + \dot{H}w(t) + H\big[D + \langle PG(t)(\Phi + H(t)), \Psi\rangle\big]w(t) = \\ = A\Phi w(t) + AH(t)w(t) + G(t)\big[\Phi + H(t)\big]w(t).$$

Откуда с учетом (20) выводим

$$\dot{H} = AH - HD + (1-P)G(t)\big(\Phi + H(t)\big) - H\langle PG(t)(\Phi + H(t)), \Psi\rangle. \tag{32}$$

Попытаемся удовлетворить уравнению (32) с точностью до слагаемых $\hat{R}(t)$ таких, что $\|\hat{R}(t)\|_{\mathcal{B}^N} \in L_1[t_0, \infty)$. Именно, положим

$$\hat{H}(t) = \sum_{i=1}^{n} v_i(t)H_i(t) + \sum_{1\le i_1\le i_2\le n} v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)H_{i_1 i_2}(t) + \ldots + \\ + \sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n} v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)H_{i_1\ldots i_k}(t). \tag{33}$$

Здесь элементы подлежащих определению вектор-строк $H_{i_1\ldots i_l}(t)$ длины N принадлежат подпространству $\mathcal{Y}$ при всех $t \in \mathbb{R}$ и являются тригонометрическими многочленами в том смысле, что

$$H_{i_1\ldots i_l}(t) = \sum_j \beta_j^{(i_1\ldots i_l)} e^{\mathrm{i}\omega_j t}, \tag{34}$$

где $\beta_j^{(i_1\ldots i_l)} \in \mathcal{Y}^N$. Кроме того, значение целочисленной величины $k \ge 0$ определяется свойством 3^0 функций $v_1(t), \ldots, v_n(t)$.

Подставим выражение (33) в уравнение (32) вместо $H(t)$ и соберем слагаемые при одинаковых множителях $v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_l}(t)$ $(l \le k)$. Получаем следующие однотипные уравнения для определения вектор-строк $H_{i_1\ldots i_l}(t)$:

$$\dot{H}_{i_1\ldots i_l} = AH_{i_1\ldots i_l} - H_{i_1\ldots i_l}D + F_{i_1\ldots i_l}(t). \tag{35}$$

Здесь мы учли формулы (2), (7) и (8), из которых, в частности, следует, что для решения уравнения (35) необходимо определить сначала все вектор-строки $H_{j_1\ldots j_s}(t)$ с $s < l$. Далее, $F_{i_1\ldots i_l}(t)$ — некоторая известная вектор-строка, которая в силу (8) и (34) имеет вид, аналогичный (34):

$$F_{i_1\ldots i_l}(t) = \sum_j f_j^{(i_1\ldots i_l)} e^{\mathrm{i}\omega_j t}, \tag{36}$$

где $f_j^{(i_1\ldots i_l)} \in \mathcal{Y}^N$. Кроме того, вектор-строки $f_j^{(i_1\ldots i_l)}$ принадлежат пространству $\mathcal{Y}^N$. Действительно, это следует из того, что вектор-строки $H_{j_1\ldots j_s}(t)$ принимают значения из пространства $\mathcal{Y}^N$ при всех $s < l$ и, кроме того, в уравнении (32) вектор-строка $(1-P)G(t)\big(\Phi + H(t)\big)$ принимает значения из пространства $\mathcal{Y}^N$.

Решение уравнения (35) будем искать в виде (34). Подставляя последнее в (35), получаем с учетом (36) следующее операторное уравнение для нахождения элемента $\beta_j^{(i_1\ldots i_l)} \in \mathcal{Y}^N$:

$$A\beta_j^{(i_1\ldots i_l)} - \beta_j^{(i_1\ldots i_l)}D - \mathrm{i}\omega_j\beta_j^{(i_1\ldots i_l)} = -f_j^{(i_1\ldots i_l)}. \tag{37}$$

Лемма 1. *Уравнение* (37) *имеет единственное решение в пространстве* $\mathcal{Y}^N$ *при любой правой части* $f_j^{(i_1\dots i_l)} \in \mathcal{Y}^N$.

Доказательство. Определим оператор $L\colon \mathcal{Y}^N \to \mathcal{Y}^N$ по формуле

$$L\beta = A\beta - \beta D, \tag{38}$$

где $\beta \in \mathcal{Y}^N$. В силу наложенных на оператор A условий оператор L является замкнутым линейным оператором с плотной в $\mathcal{Y}^N$ областью определения. Кроме того, несложно проверить, что оператор L является генератором сильно непрерывной полугруппы линейных ограниченных операторов $U(t)\colon \mathcal{Y}^N \to \mathcal{Y}^N$ $(t \geq 0)$, которая определяется по правилу

$$U(t)\beta = T(t)\beta e^{-tD}. \tag{39}$$

Поскольку все собственные числа матрицы D расположены на мнимой оси, то в силу (6) для всех $\beta \in \mathcal{Y}^N$ имеет место неравенство

$$\|U(t)\beta\|_{\mathcal{B}^N} \leq Ke^{-\nu t}\|\beta\|_{\mathcal{B}^N}, \quad t \geq 0, \tag{40}$$

где $K, \nu > 0$. Из (40) выводим, что

$$|\sigma\big(U(t)\big)| \leq Ke^{-\nu t}, \quad t \geq 0, \tag{41}$$

где $\sigma\big(U(t)\big)$ — спектр оператора $U(t)$. Неравенство (41) понимается в том смысле, что оно выполнено для любого $\mu \in \sigma\big(U(t)\big)$. Согласно [18, p. 45, Theorem 2.3], имеем

$$e^{t\sigma(L)} \subset \sigma\big(U(t)\big), \quad t \geq 0. \tag{42}$$

В силу (41), (42) заключаем, что число вида $\mathrm{i}\omega$, где $\omega \in \mathbb{R}$, не может принадлежать множеству $\sigma(L)$, т.е. спектру оператора L. Таким образом, вся мнимая ось принадлежит резольвентному множеству оператора L. Следовательно (см., например, [1]), для любого $\omega \in \mathbb{R}$ существует определенный во всем пространстве $\mathcal{Y}^N$ линейный непрерывный оператор $(L - \mathrm{i}\omega I)^{-1}$. Таким образом, уравнение (37) имеет единственное решение

$$\beta_j^{(i_1\dots i_l)} = -(L - \mathrm{i}\omega_j I)^{-1} f_j^{(i_1\dots i_l)}.$$

□

Следствие 1. *Единственное решение уравнения* (37) *определяется формулой*

$$\beta_j^{(i_1\dots i_l)} = \int\limits_0^\infty e^{-\mathrm{i}\omega_j s} U(s) f_j^{(i_1\dots i_l)} ds, \tag{43}$$

где полугруппа операторов $U(t)$ *имеет вид* (39).

Доказательство. Сходимость интеграла в (43) следует из неравенства (40). Аналогично тому, как это делается в [18, p. 8, Theorem 3.1], можно показать, что интеграл (43) принадлежит области определения оператора L, который описывается формулой (38). И, кроме того, справедливо равенство

$$L\beta_j^{(i_1\dots i_l)} = \mathrm{i}\omega_j \beta_j^{(i_1\dots i_l)} - f_j^{(i_1\dots i_l)},$$

которое эквивалентно (37). □

Построенная нами вектор-строка $\hat{H}(t)$, определяемая формулой (33), удовлетворяет, таким образом, следующему уравнению:

$$\frac{d\hat{H}}{dt} = A\hat{H} - \hat{H}D + (1-P)G(t)\big(\Phi + \hat{H}(t)\big) - \hat{H}\langle PG(t)(\Phi + \hat{H}(t)), \Psi\rangle + \hat{R}(t), \quad (44)$$

где $\hat{R}(t)$ — некоторая вектор-строка, принимающая значения из пространства $\mathcal{Y}^N$, такая что $\|\hat{R}(t)\|_{\mathcal{B}^N} \in L_1[t_0, \infty)$. Имеет место следующая теорема об аппроксимации.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{W}(t)$ — критическое многообразие для уравнения (1), существующее согласно теореме 1 при достаточно больших t. Тогда найдется такое достаточно большое t_*, что при $t \geq t_*$ вектор-строка $H(t)$ из (10) допускает представление в виде*

$$H(t) = \hat{H}(t) + Z(t), \qquad t \geq t_* \geq t_0. \quad (45)$$

Здесь вектор-строка $\hat{H}(t)$ описывается формулой (33) и удовлетворяет уравнению (44), а вектор-строка $Z(t)$, принимающая значения из $\mathcal{Y}^N$, такова, что $\|Z(t)\|_{\mathcal{B}^N} \to 0$ при $t \to \infty$ и $\|Z(t)\|_{\mathcal{B}^N} \in L_1[t_*, \infty)$.

Доказательство. Вектор-строку $H(t)$, являющуюся решением операторного уравнения (27), (28), запишем в виде суммы (45). Тогда уравнение (27) можно записать относительно неизвестной вектор-строки $Z(t)$:

$$Z(t) = \Pi Z(t), \quad (46)$$

$$\Pi Z(t) = \Gamma\big(\hat{H}(t) + Z(t)\big) - \hat{H}(t, \theta), \quad (47)$$

где оператор Γ определен формулой (28). Будем рассматривать оператор Π действующим в пространстве $\mathcal{CL}$ непрерывных при $t \geq t_*$ вектор-строк $Z(t)$, принимающих значения в пространстве $\mathcal{Y}^N$, с фиксированным начальным условием $Z(t_*)$ таких, что $\|Z(t)\|_{\mathcal{B}^N} \to 0$ при $t \to \infty$ и $p(t)\|Z(t)\|_{\mathcal{B}^N} \in L_1[t_*, \infty)$. Здесь функция $p(t)$ определяется в силу (31). Пространство $\mathcal{CL}$ будет банаховым, если ввести в нем норму по правилу

$$\|Z\|_{\mathcal{CL}} = \|Z\|_{\mathcal{C}} + \|Z\|_{\mathcal{L}}, \qquad \|Z\|_{\mathcal{L}} = \int_{t_*}^{\infty} p(t)\|Z(t)\|_{\mathcal{B}^N} dt, \quad (48)$$

где норма $\|\cdot\|_{\mathcal{C}}$ введена согласно (29).

Запишем далее оператор Π в несколько ином виде. Пусть вектор-функция $w(t) \in \mathbb{C}^N$ является решением системы (25), в которой $H(t)$ есть сумма (45). В силу вида $\hat{H}(t)$ (см. формулы (33), (34)) с учетом следствия 1 заключаем, что элементы вектор-строки $\hat{H}(s)$ принадлежат области определения оператора A. Тогда, имея в виду абсолютную непрерывность функций $v_1(t), \ldots v_n(t)$ и [18, p. 4, Theorem 2.4], приходим к выводу, что

$$\hat{H}(t)w(t) = T(t-t_*)\hat{H}(t_*)w(t_*) + \int_{t_*}^{t} \frac{d}{ds}\big(T(t-s)\hat{H}(s)w(s)\big)ds, \quad (49)$$

где

$$\frac{d}{ds}\big(T(t-s)\hat{H}(s)w(s)\big) = -T(t-s)A\hat{H}(s)w(s) + T(t-s)\frac{d\hat{H}}{ds}w(s) + T(t-s)\hat{H}(s)\dot{w}(s).$$

Далее, принимая во внимание (25), (44) и (45), имеем

$$\frac{d}{ds}\big(T(t-s)\hat{H}(s)w(s)\big) = T(t-s)\Big((1-P)G(s)\big(\Phi+\hat{H}(s)\big)+\hat{H}\langle PG(s)Z(s),\Psi\rangle+\hat{R}(s)\Big)w(s). \tag{50}$$

Вектор-функцию $w(t)$ запишем в виде $w(t) = W_{\hat{H}+Z}(t,t_*)w(t_*)$, где $W_{\hat{H}+Z}(t,s)$ $(t,s \geq t_*)$ — матрица Коши системы (25) $(W_{\hat{H}+Z}(t,t) = I)$, в которой $H(t)$ есть сумма (45). Подставляя (50) в (49) и возвращаясь к (47), получаем с учетом (28) следующее представление для оператора Π:

$$\Pi Z(t) = T(t-t_*)Z(t_*)U_{\hat{H}+Z}(t_*,t) + \int\limits_{t_*}^{t} T(t-s)\Big((1-P)G(s)Z(s)- \\ - \hat{H}(s)\langle PG(s)Z(s),\Psi\rangle - \hat{R}(s)\Big)W_{\hat{H}+Z}(s,t)ds. \tag{51}$$

Точно так же, как это делается в доказательстве теоремы 2 в работе [5] (см. также [17, Theorem 4.4]), можно установить, что оператор Π переводит некоторый замкнутый шар $\|Z\|_{\mathcal{CL}} \leq r_0$ пространства $\mathcal{CL}$ в себя и является в этом шаре сжимающим, если t_* достаточно велико, а величина $\|Z(t_*)\|_{\mathcal{B}^N}$ достаточно мала. При этом оказывается, что не только функция $p(t)\|Z(t)\|_{\mathcal{B}^N}$, но и функция $\|Z(t)\|_{\mathcal{B}^N}$ принадлежит классу $L_1[t_*,\infty)$. Отметим, что существенную роль при доказательстве играют оценки (6) и (30). □

Следствие 2. *Пусть имеет место оценка*

$$\sum_{1\leq i_1\leq\ldots\leq i_{k+1}\leq n} |v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_{k+1}}(t)| + \sum_{i=1}^{n}|\dot{v}_i(t)| + \gamma(t) \leq \varphi(t), \qquad t \geq t_0,$$

где $\varphi(t)$ — некоторая положительная при $t \geq t_0$ функция, а функция $\gamma(t)$ определена в силу (3). Предположим, что существует такое $\beta \in (0,\alpha)$, где $\alpha > 0$ — величина из неравенств (6) и (30), что

$$\varphi(t_1)e^{\beta t_1} \leq \varphi(t_2)e^{\beta t_2}, \qquad t_0 \leq t_1 \leq t_2.$$

Тогда для вектор-строки $Z(t)$ из представления (45) при $t \geq t_* \geq t_0$ справедливо неравенство

$$\|Z(t)\|_{\mathcal{B}^N} \leq K\varphi(t)$$

с некоторой постоянной K.

Доказательство этого утверждения абсолютно идентично установлению аналогичного результата из [5]. Критическое многообразие $\mathcal{W}(t)$ обладает свойством глобального притяжения в следующем смысле.

Теорема 3. *Пусть $u(t)$ — слабое решение уравнения (1), т.е. решение интегрального уравнения (4), определенное при $t \geq T \geq t_0$. Тогда найдется такое достаточно большое $t_* \geq T$, что при $t \geq t_*$ имеет место следующее асимптотическое представление:*

$$u(t) = \Phi w_H(t) + H(t) w_H(t) + O\big(e^{(-\alpha+\varepsilon)t}\big), \qquad t \to \infty. \tag{52}$$

Здесь величина $\alpha > 0$ выбрана в силу неравенства (6), $\varepsilon \in (0, \alpha)$ — произвольно и $w_H(t)$ $(t \geq t_*)$ — некоторое решение системы на критическом многообразии (25).

Доказательство. В силу (13), (18) решение $u(t)$ может быть записано в виде

$$u(t) = \Phi w(t) + u_{\mathcal{Y}}(t), \qquad t \geq t_*, \tag{53}$$

где функция $u_{\mathcal{Y}}(t)$, принимающая значения из подпространства $\mathcal{Y}$, удовлетворяет интегральному уравнению (17) с $t_0 = t_*$, а функция $w(t)$ является решением системы (23) с начальным условием $w(t_*) = \langle Pu(t_*), \Psi\rangle$. Далее, пусть $\mathcal{W}(t)$ — критическое многообразие для уравнения (1), существующее в силу теоремы 1 при $t \geq t_*$, где t_* достаточно велико. Напомним, что это многообразие определяется формулой (10). Пусть $w_H(t)$ $(t \geq t_*)$ — решение системы на критическом многообразии (25) с начальным условием $w_H(t_*) = w(t_*)$, тогда функция

$$\tilde{u}(t) = \Phi w_H(t) + H(t) w_H(t) \tag{54}$$

представляет собой некоторое слабое решение уравнения (1), лежащее при $t \geq t_*$ на многообразии $\mathcal{W}(t)$. Покажем, что $u(t) = \tilde{u}(t) + O(e^{(-\alpha+\varepsilon)t})$. Полагая

$$z(t) = u_{\mathcal{Y}}(t) - H(t) w_H(t), \quad r(t) = w(t) - w_H(t)$$

и вычитая (54) из (53), получаем

$$u(t) - \tilde{u}(t) = \Phi r(t) + z(t), \qquad t \geq t_*. \tag{55}$$

Далее, замечая, что функция $H(t) w_H(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению (26) с $w(t) = w_H(t)$ и вычитая (26) из (17) (с $t_0 = t_*$), с учетом (53) получаем следующее уравнение для нахождения $z(t)$:

$$z(t) = T(t - t_*) z(t_*) + \int\limits_{t_*}^{t} T(t-s)(1-P) G(s)\big[\Phi r(s) + z(s)\big] ds, \qquad t \geq t_*. \tag{56}$$

Отметим, что мы можем считать величину $\|z(t_*)\|_{\mathcal{B}}$ настолько малой, насколько нам это потребуется. Действительно, мы всегда можем от решения $u(t)$ в силу линейности уравнения (4) перейти к рассмотрению решения $\delta u(t)/\|u(t_*)\|_{\mathcal{B}}$ для любого наперед заданного $\delta > 0$.

Далее, вычитая (25) (где $w(t) = w_H(t)$) из (23) и учитывая (53), заключаем, что вектор-функция $r(t)$ является решением следующей задачи Коши:

$$\dot{r} = Dr(t) + \langle PG(t)\big(\Phi r(t) + z(t)\big), \Psi\rangle, \qquad r(t_*) = 0. \tag{57}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что матрица D имеет жорданову нормальную форму. Следовательно, ее можно представить в виде

$$D = D_1 + D_2,$$

где $D_1 = \operatorname{diag} D$ и D_2 — нильпотентная матрица. Заметим, что всегда можно считать, что $|D_2| < \delta$ для любого наперед заданного $\delta > 0$. Действительно, в уравнении (57) можно осуществить замену с постоянной матрицей $r = C_\delta \tilde{r}$, где матрица C_δ приводит матрицу $\delta^{-1}D$ к жордановой форме. Тогда эта замена оставляет матрицу D_1 без изменения, а у матрицы D_2 могут быть отличными от нуля лишь элементы $d_{i,i+1} = \delta$. Переходя от (57) к соответствующему интегральному уравнению, получаем

$$r(t) = \int\limits_{t_*}^{t} e^{D_1(t-s)}\big[D_2 r(s) + \langle PG(s)\big(\Phi r(s) + z(s)\big), \Psi\rangle\big]\,ds. \tag{58}$$

Рассмотрим пространство $\mathcal{D}$, элементами которого являются пары $\big(z(t), r(t)\big)$. Функции $z(t)$ и $r(t)$ непрерывны при $t \geq t_*$. Считаем, что начальный элемент $z(t_*)$ фиксирован и принадлежит подпространству $\mathcal{Y}$. Кроме того, имеют место следующие неравенства:

$$\|z(t)\|_{\mathcal{B}} \leq K e^{(-\alpha+\varepsilon)(t-t_*)}, \qquad |r(t)| \leq K e^{(-\alpha+\varepsilon)(t-t_*)}, \qquad t \geq t_*, \tag{59}$$

с некоторой константой $K > 0$ и выбранной произвольным образом величиной $\varepsilon \in (0, \alpha)$. Пространство $\mathcal{D}$ становится банаховым, если ввести в нем норму по правилу

$$\big\|\big(z(t), r(t)\big)\big\|_{\mathcal{D}} = \sup_{t \geq t_*}\big(e^{(\alpha-\varepsilon)(t-t_*)}(\|z(t)\|_{\mathcal{B}} + |r(t)|)\big).$$

Заметим, что если система (56), (58) имеет решение $\big(z(t), r(t)\big) \in \mathcal{D}$, то уравнение (58) можно записать в следующей эквивалентной форме. Устремим в этом уравнении переменную t к бесконечности, учтем правое из неравенств (59), а также тот факт, что все собственные числа матрицы D_1 имеют нулевые вещественные части. Получим

$$\int\limits_{t_*}^{\infty} e^{-D_1 s}\big[D_2 r(s) + \langle PG(s)\big(\Phi r(s) + z(s)\big), \Psi\rangle\big]\,ds = 0.$$

Используя это соотношение в (58), переписываем последнее в следующем виде:

$$r(t) = -\int\limits_{t}^{\infty} e^{D_1(t-s)}\big[D_2 r(s) + \langle PG(s)\big(\Phi r(s) + z(s)\big), \Psi\rangle\big]\,ds, \qquad t \geq t_*. \tag{60}$$

Систему уравнений (56), (60) запишем в виде операторного уравнения в пространстве $\mathcal{D}$:

$$\big(z(t,\theta), r(t)\big) = \Sigma\big(z(t,\theta), r(t)\big) = \big(\Sigma_1\big(z(t,\theta), r(t)\big), \Sigma_2\big(z(t,\theta), r(t)\big)\big), \tag{61}$$

где операторы $\Sigma_1\colon \mathcal{D} \to \mathcal{Y}$ и $\Sigma_2\colon \mathcal{D} \to \mathbb{C}^N$ определяются правыми частями уравнений (56) и (60) соответственно. Можно показать, что оператор Σ будет сжимающим в пространстве $\mathcal{D}$, если величина $\|z(t_*)\|_{\mathcal{B}}$ достаточно мала, t_* достаточно велико, а константа K в (59) подходящим образом выбрана. Это делается точно так же, как и в доказательстве теоремы 3 в работе [5] (см. также [17, Theorem 4.7]). $\square$

Пусть $w^{(1)}(t), \ldots, w^{(N)}(t)$ — фундаментальные решения системы на критическом многообразии (25), а $u(t)$ — произвольное слабое решение уравнения (1), определенное при $t \geq T$. Тогда в силу теоремы 3 имеет место следующее асимптотическое представление при $t \to \infty$:

$$u(t) = \big(\Phi + H(t)\big) \sum_{i=1}^{N} c_i w^{(i)}(t) + O\big(e^{-\hat{\alpha} t}\big), \tag{62}$$

где $c_1, \ldots, c_N$ — произвольные комплексные постоянные и $\hat{\alpha} > 0$ — некоторое действительное число. Таким образом, вопрос построения асимптотик для слабых решений уравнения (1) сводится, по существу, к задаче асимптотического интегрирования N-мерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (25).

С учетом теоремы 3 и формул (33), (34), определяющих вектор-строку $\hat{H}(t)$, система на критическом многообразии имеет следующий вид:

$$\dot{w} = \Big[D + \sum_{i=1}^{n} v_i(t) D_i(t) + \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} v_{i_1}(t) v_{i_2}(t) D_{i_1 i_2}(t) + \ldots + \\ + \sum_{1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_k \leq n} v_{i_1}(t) \cdot \ldots \cdot v_{i_k}(t) D_{i_1 \ldots i_k}(t) + L(t)\Big] w, \qquad w \in \mathbb{C}^N. \tag{63}$$

В этой системе $(N \times N)$-матрицы $D_{i_1 \ldots i_l}(t)$ — это матрицы, элементами которых являются тригонометрические многочлены, т.е. матрицы вида (8), где $b_j^{(i_1 \ldots i_l)}$ — некоторые постоянные матрицы. Кроме того, $L(t)$ — это некоторая матрица из класса $L_1[t_*, \infty)$. Система (63) относится к классу систем с колебательно убывающими коэффициентами. Метод асимптотического интегрирования систем такого типа был предложен в работе [4]. Суть этого метода состоит в проведении некоторых специальных замен, диагонализирующих в конечном итоге главную часть системы (63). Более точно, с помощью таких замен система (63) приводится к так называемому L-диагональному виду. Асимптотика фундаментальных решений L-диагональных систем может быть построена с помощью теоремы Н. Левинсона (см. [2, 12, 16]). Подробное изложение метода асимптотического интегрирования систем вида (63) читатель может найти в работах [4, 5, 17].

Пример

В качестве простого примера, иллюстрирующего использование описанной выше методики, рассмотрим возмущенное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + g(x) \frac{\sin \omega t}{t^{\rho}} u, \quad x \in \Omega, \quad t \geq t_0 > 0 \tag{64}$$

с начальным условием

$$u(t_0, x) = \varphi(x) \tag{65}$$

и граничным условием Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{66}$$

Здесь функция $u(t,x)$ рассматривается в ограниченной области Ω пространства $\mathbb{R}^m$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Символом $\partial u/\partial\nu$ обозначена производная по направлению внешней нормали к $\partial\Omega$. Действительнозначные функции $\varphi(x)$ и $g(x)$ считаются принадлежащими пространству $L_2(\Omega)$, параметры ω и ρ — положительны. Наконец, Δ — оператор Лапласа по компонентам вектора x. Вопрос построения асимптотики решений уравнения (64) с условиями (65), (66) обсуждался в работе [15]. Здесь мы продемонстрируем иной подход к решению этой задачи.

Начально-краевую задачу (64)—(66) будем рассматривать в гильбертовом пространстве $\mathcal{B} = L_2(\Omega)$. Областью определения оператора Δ будем считать множество $C_0^2(\bar{\Omega})$ дважды непрерывно дифференцируемых в $\bar{\Omega}$ функций, удовлетворяющих на границе $\partial\Omega$ краевому условию (66). Известно (см., например, [19, 20]), что определенный таким образом оператор Δ допускает в пространстве $L_2(\Omega)$ замыкание в виде оператора A. Оператор A, в свою очередь, является генератором сильно непрерывной (даже аналитической) компактной полугруппы операторов $T(t)$. Отметим, что точечный спектр оператора $(-A)$ имеет вид:

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$$

По этой причине представим пространство $L_2(\Omega)$ в виде прямой суммы (5), выбрав в качестве пространства $\mathcal{X}$ собственное подпространство оператора A, отвечающее собственному числу λ_0. Очевидно, что тогда $\mathcal{X} = \{f(x) \equiv \mathrm{const}, x \in \Omega\}$. Поскольку $\mathcal{B}$ является гильбертовым пространством, то $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}$ и скобка двойственности (11) есть скалярное произведение в пространстве $\mathcal{B}$:

$$(\varphi, \psi) = \int\limits_{\Omega} \varphi(x)\overline{\psi(x)}dx.$$

Заметим, что оператор A является самосопряженным оператором, а следовательно, $A' = A$. Элементы Φ и Ψ пространства $\mathcal{B}$ выберем так, чтобы было выполнено условие нормировки (12):

$$\Phi(x) \equiv 1, \qquad \Psi(x) \equiv \frac{1}{|\Omega|}, \tag{67}$$

где $|\Omega|$ — лебегова мера множества Ω. Наконец, положим

$$\mathcal{Y} = \mathcal{X}^{\perp} = \{y(x) \in \mathcal{B} \mid \big(y(x), \Psi\big) = 0\}. \tag{68}$$

Справедливость оценки (6) тогда есть следствие лемм 7.4.1 и 7.4.2 из [7] и компактности полугруппы $T(t)$.

Поскольку в силу (68) для любого $u \in \mathcal{B}$ имеет место равенство

$$(u, \Psi) = (Pu, \Psi),$$

то уравнение на критическом многообразии (25) в рассматриваемом случае принимает следующий вид:

$$\dot{w} = \frac{\sin\omega t}{t^{\rho}}\big(g(x)(\Phi + H(t,x)), \Psi\big)w(t), \quad t \geq t_*, \quad w \in \mathbb{R}. \tag{69}$$

Здесь функция $H(t,\cdot)$ при всех $t \geq t_*$ принадлежит пространству $L_2(\Omega)$ и, кроме того, $\|H(t,\cdot)\|_{L_2(\Omega)} \to 0$ при $t \to \infty$. В силу теоремы 2 для этой функции справедливо следующее представление:

$$H(t,x) = \hat{H}(t,x) + Z(t,x), \qquad t \geq t_* \geq t_0, \quad -h \leq \theta \leq 0. \tag{70}$$

Здесь функция $Z(t,\cdot)$, принадлежащая подпространству $\mathcal{Y}$, такова, что $\|Z(t,\cdot)\|_{L_2(\Omega)} \to 0$ при $t \to \infty$ и $\|Z(t,\cdot)\|_{L_2(\Omega)} \in L_1[t_*,\infty)$. Функция $\hat{H}(t,x)$, принадлежащая по переменной x подпространству $\mathcal{Y}$, является приближенным решением уравнения

$$\frac{\partial H}{\partial t} = AH + g(x)\frac{\sin\omega t}{t^\rho}\big(\Phi + H(t,x)\big) - \frac{\sin\omega t}{t^\rho}\big(\Phi + H(t,x)\big)\big(g(x)(\Phi + H(t,x)), \Psi\big) \tag{71}$$

с точностью до слагаемых $\hat{R}(t,x)$ таких, что $\|\hat{R}(t,\cdot)\|_{L_2(\Omega)} \in L_1[t_0,\infty)$. Здесь мы также учли тот факт, что для любого $u \in \mathcal{B}$ выполнено равенство

$$u - Pu = u - \Phi(u,\Psi). \tag{72}$$

Функцию $\hat{H}(t,x)$ ищем в виде

$$\hat{H}(t,x) = t^{-\rho}H_1(t,x) + t^{-\rho}H_2(t,x) + \ldots, \tag{73}$$

где функции $H_1(t,x), H_2(t,x), \ldots$ по переменной x принадлежат подпространству $\mathcal{Y}$ и являются тригонометрическими многочленами переменной t. Подставим выражение (73) в уравнение (71) и соберем слагаемые при $t^{-\rho}$, отбрасывая слагаемые $\hat{R}(t,x)$, такие что $\|\hat{R}(t,\cdot)\|_{L_2(\Omega)} \in L_1[t_0,\infty)$. Учитывая (67), получим следующее уравнение для нахождения функции $H_1(t,x)$:

$$\frac{\partial H_1}{\partial t} = AH_1 + g(x)\sin\omega t - \sin\omega t\big(g(x),\Psi\big). \tag{74}$$

Решение уравнения (74) будем искать в виде

$$H_1(t,x) = h_1(x)e^{\mathrm{i}\omega t} + \overline{h_1(x)}e^{-\mathrm{i}\omega t}, \tag{75}$$

где функция $h_1(x)$ принадлежит подпространству $\mathcal{Y}$ пространства $L_2(\Omega)$. Подставляя (75) в (74) и собирая слагаемые при $e^{\mathrm{i}\omega t}$, получим уравнение для отыскания функции $h_1(x)$:

$$Ah_1 - \mathrm{i}\omega h_1 = \frac{\mathrm{i}g(x)}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}\big(g(x),\Psi\big). \tag{76}$$

В силу леммы 1 это уравнение имеет единственное решение в подпространстве $\mathcal{Y}$. Используя (70), (73), (75) в уравнении (69), с учетом следствия 2 получаем следующее представление для уравнения на критическом многообразии:

$$\dot{w} = \Big[t^{-\rho}a_1(t) + t^{-2\rho}a_2(t) + O(t^{-3\rho}) + O(t^{-(2\rho+1)})\Big]w(t). \tag{77}$$

Здесь

$$a_1(t) = \sin\omega t\big(g(x)\Phi,\Psi\big) = \frac{\sin\omega t}{|\Omega|}\int\limits_\Omega g(x)dx, \tag{78}$$

$$a_2(t) = \sin\omega t\big(g(x)H_1(t,x),\Psi\big) = \frac{\sin\omega t}{|\Omega|}\Big[e^{\mathrm{i}\omega t}\int\limits_\Omega g(x)h_1(x)dx + e^{-\mathrm{i}\omega t}\int\limits_\Omega g(x)\overline{h_1(x)}dx\Big]. \tag{79}$$

Следуя методике из работы [4], осуществим в уравнении (77) усредняющую замену переменной

$$w = \big[1 + t^{-\rho}y_1(t) + t^{-2\rho}y_2(t) + \ldots + t^{-k\rho}y_k(t)\big]w_1. \tag{80}$$

Здесь целочисленный неотрицательный параметр k выбран так, что $k\rho \le 1 < (k+1)\rho$, а функции $y_1(t), \ldots, y_k(t)$ являются тригонометрическими многочленами с нулевым средним значением. В результате этой замены уравнение (77) преобразуется к усредненному виду

$$\dot{w}_1 = \Big[t^{-\rho}a_1 + t^{-2\rho}a_2 + O(t^{-3\rho}) + O(t^{-(\rho+1)})\Big]w_1(t). \tag{81}$$

Здесь

$$a_1 = \mathrm{M}\big[a_1(t)\big], \quad a_2 = \mathrm{M}\big[a_2(t) + a_1(t)y_1(t)\big],$$

где символом $\mathrm{M}[\cdot]$ обозначено среднее значение почти периодической функции $p(t)$, т. е. величина

$$\mathrm{M}\big[p(t)\big] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T p(t)dt.$$

Тригонометрический многочлен $y_1(t)$ определяется как решение уравнения

$$\dot{y}_1 = a_1(t) - a_1$$

с нулевым средним значением. Несложные расчеты, использующие формулы (78), (79), приводят нас к следующим выражениям для величин a_1 и a_2:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \mathrm{M}\big[a_2(t)\big] = \frac{1}{|\Omega|}\,\mathrm{Re}\Big\{\mathrm{i}\int\limits_\Omega g(x)h_1(x)dx\Big\}. \tag{82}$$

Покажем, что величина a_2 неотрицательна. Заметим, что, поскольку функция $h_1(x)$ принадлежит подпространству $\mathcal{Y}$, то в силу (68)

$$(h_1, \Psi) = \frac{1}{|\Omega|}\int\limits_\Omega h_1(x)dx = 0. \tag{83}$$

Вычислим комплексное сопряжение от обеих частей уравнения (76) и умножим каждую из них на функцию $h_1(x)$. Умножая затем каждую из частей скалярно на элемент Ψ и приравнивая действительные части полученного равенства, с учетом (83) и самосопряженности оператора A приходим к выражению

$$a_2 = -\frac{2}{|\Omega|}\,\mathrm{Re}\Big\{\int\limits_\Omega Ah_1(x)\overline{h_1(x)}dx\Big\}. \tag{84}$$

Предположим сначала, что функция $h_1(x)$ принадлежит области определения оператора Δ. Следовательно, в формуле (84) выполнено равенство $Ah_1 = \Delta h_1$. Используя формулу интегрирования по частям для многомерного случая, имеем

$$\int\limits_\Omega \Delta h_1(x)\overline{h_1(x)}dx = \int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial h_1}{\partial\nu}\overline{h_1(x)}d\sigma - \int\limits_\Omega \nabla h_1(x)\nabla\overline{h_1(x)}dx, \tag{85}$$

где $d\sigma$ — мера на $\partial\Omega$. Поскольку $h_1(x)$ принадлежит области определения оператора Δ, то эта функция удовлетворяет граничному условию (66). Таким образом,

$$\int\limits_{\Omega} \Delta h_1(x)\overline{h_1(x)}dx = -\int\limits_{\Omega} |\nabla h_1(x)|^2 dx. \tag{86}$$

В силу определения оператора A, осуществляя предельный переход в (86), легко видеть, что для любой функции h_1 из области определения этого оператора выполнено равенство

$$\int\limits_{\Omega} Ah_1(x)\overline{h_1(x)}dx = -\int\limits_{\Omega} |\nabla h_1(x)|^2 dx. \tag{87}$$

Окончательно получаем, что

$$a_2 = \frac{2}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} |\nabla h_1(x)|^2 dx \geq 0. \tag{88}$$

Проинтегрируем теперь уравнение (81), учитывая формулы (82), (88). Получим следующие асимптотические представления для его решений при $t \to \infty$:

$$w(t) = \begin{cases} c\big(1 + O(t^{-\rho})\big), & \rho \geq 1, \\ c\big(1 + O(t^{-2\rho+1})\big), & \dfrac{1}{2} < \rho < 1, \\ c\big(1 + O(t^{-1/2})\big)t^{a_2}, & \rho = \dfrac{1}{2}, \\ c\big(1 + O(t^{-3\rho+1})\big)\exp\big\{\frac{a_2}{1-2\rho}t^{-2\rho+1}\big\}, & \dfrac{1}{3} < \rho < \dfrac{1}{2}, \\ c\big(1 + O(t^{-(k+1)\rho+1})\big)\exp\big\{\frac{a_2}{1-2\rho}t^{-2\rho+1}(1 + o(1))\big\}, & \dfrac{1}{k+1} < \rho \leq \dfrac{1}{k}, \quad k \geq 3, \end{cases} \tag{89}$$

где c — произвольная действительная постоянная. В силу теоремы 3, учитывая (67), для слабых решений исходной задачи (64)—(66) имеем тогда следующее асимптотическое представление при $t \to \infty$:

$$u(t,x) = \big(1 + H(t,x)\big)w(t) + r(t,x). \tag{90}$$

Здесь функция $w(t)$ определяется формулами (89), функция $H(t,x)$ обладает тем свойством, что $\|H(t,\cdot)\|_{L_2(\Omega)} \to 0$ при $t \to \infty$, а функция $r(t,x)$ допускает оценку $\|r(t,\cdot)\|_{L_2(\Omega)} = O(e^{-\alpha t})$, где $\alpha > 0$ — некоторое действительное число.

Анализируя формулы (89), (90), мы приходим к выводу, что при $\rho > 1/2$ все решения задачи (64)—(66) ограничены при $t \to \infty$ (в норме пространства $L_2(\Omega)$), а в случае $\rho \leq 1/2$ решения, вообще говоря, не ограничены. Особо отметим, что существование неограниченных решений является следствием пространственной неоднородности коэффициента возмущения в уравнении (64). Действительно, предположим, что в этом уравнении $g(x) \equiv g = \mathrm{const}$. Тогда интегральное уравнение (26) с учетом формул (67), (72) имеет решение $H(t,x) \equiv 0$. Следовательно, уравнение на критическом многообразии (69) приобретает вид

$$\dot{w} = \frac{g\sin\omega t}{t^{\rho}}w(t).$$

Несложно показать, что все решения этого уравнения имеют следующее асимптотическое представление при $t \to \infty$:

$$w(t) = c\big(1 + O(t^{-\rho})\big),$$

где c — произвольная действительная постоянная.

Список литературы / References

[1] Иосида К., *Функциональный анализ*, Мир, М., 1967; пер. с англ.: Yosida K., *Functional analysis*, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1965.

[2] Коддингтон Э. А., Левинсон Н., *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, ИЛ, М., 1958; пер. с англ.: Coddington E. A., Levinson N., *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill, New York, 1955.

[3] Марсден Дж., Мак-Кракен М., *Бифуркация рождения цикла и ее приложения*, Мир, М., 1980; пер. с англ.: Marsden J. E., McCracken M., *The Hopf bifurcation and its applications*, Springer-Verlag, New York, 1976.

[4] Нестеров П. Н., "Метод усреднения в задаче асимптотического интегрирования систем с колебательно убывающими коэффициентами", *Дифференц. уравнения*, **43**:6 (2007), 731–742; англ. пер.: Nesterov P. N., "Averaging method in the asymptotic integration problem for systems with oscillatory-decreasing coefficients", *Differ. Equ.*, **43**:6 (2007), 745–756.

[5] Нестеров П. Н., "Метод центральных многообразий в задаче асимптотического интегрирования функционально-дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами. II", *Модел. и анализ информ. систем*, **21**:5 (2014), 5–37; [Nesterov P. N., "Center manifold method in the asymptotic integration problem for functional differential equations with oscillatory decreasing coeffcients. II", *Model. Anal. Inform. Sist.*, **21**:5 (2014), 5–37, (in Russian).]

[6] Фомин В. Н., *Математическая теория параметрического резонанса в линейных распределенных системах*, Изд-во ЛГУ, Л., 1972; [Fomin V. N., *Mathematical theory of parametric resonance in linear distributed systems*, Leningr. Univ. Publ., Leningrad, 1972, (in Russian).]

[7] Хейл Дж., *Теория функционально-дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1984; пер. с англ.: Hale J. K., *Theory of functional differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1977.

[8] Balakrishnan A. V., *Applied functional analysis*, Springer-Verlag, New York, 1981.

[9] Ball J. M., "Strongly continuous semigroups, weak solutions, and the variation of constants formula", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **63**:2 (1977), 370–373.

[10] Ball J. M., "On the asymptotic behavior of generalized processes, with applications to nonlinear evolution equations", *J. Differential Equations*, **27** (1978), 224–265.

[11] Carr J., *Applications of centre manifold theory*, Springer-Verlag, New York, 1981.

[12] Eastham M. S. P., *The asymptotic solution of linear differential systems*, Clarendon Press, Oxford, 1989.

[13] Hale J., Verduyn Lunel S. M., *Introduction to functional differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1993.

[14] Kato T., *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.

[15] Langer M., Kozlov V., "Asymptotics of solutions of a perturbed heat equation", *J. Math. Anal. Appl.*, **397**:2 (2013), 481–493.

[16] Levinson N., "The asymptotic nature of solutions of linear systems of differential equations", *Duke Math. J.*, **15**:1 (1948), 111–126.

[17] Nesterov P., “Asymptotic integration of functional differential systems with oscillatory decreasing coefficients: a center manifold approach”, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, 2016, № 33, 1–43.

[18] Pazy A., *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[19] Rothe F., *Global solutions of reaction-diffusion systems*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1984.

[20] Wu J., *Theory and applications of partial functional differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1996.

Nesterov P. N., "Asymptotic Integration of Certain Differential Equations in Banach Space", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:5 (2017), 596–614.

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-5-596-614

Abstract. We investigate the problem of constructing the asymptotics for weak solutions of certain class of linear differential equations in the Banach space as the independent variable tends to infinity. The studied class of equations is the perturbation of linear autonomous equation, generally speaking, with an unbounded operator. The perturbation takes the form of the family of the bounded operators that, in a sense, decreases oscillatory at infinity. The unperturbed equation satisfies the standard requirements of the center manifold theory. The essence of the proposed asymptotic integration method is to prove the existence for the initial equation of the center-like manifold (critical manifold). This manifold is positively invariant with respect to the initial equation and attracts all the trajectories of the weak solutions. The dynamics of the initial equation on the critical manifold is described by the finite-dimensional ordinary differential system. The asymptotics for the fundamental matrix of this system may be constructed by using the method proposed by the author for asymptotic integration of the systems with oscillatory decreasing coefficients. We illustrate the suggested technique by constructing the asymptotic formulas for solutions of the perturbed heat equation.

Keywords: asymptotics, differential equation, Banach space, oscillatory decreasing coefficients, center manifolds method, perturbed heat equation

On the author:
Pavel N. Nesterov, orcid.org/0000-0002-9102-9436, PhD,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl, 150003, Russia, e-mail: nesterov.pn@gmail.com

Acknowledgments:
This research was supported by the grant of the President of the Russian Federation No. MK-4625.2016.1.