Моделирование и анализ информационных систем. Т. 24, № 5 (2017), с. 615–628
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 24, No 5 (2017), pp. 615–628

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-5-615-628

УДК 517.956.4

Бифуркации пространственно неоднородных решений в одной краевой задаче для обобщенного уравнения Курамото–Сивашинского

Секацкая А. В.

получена 15 марта 2017

Аннотация. В работе рассматривается дифференциальное уравнение с частными производными параболического типа, в котором неизвестная функция зависит от трех независимых переменных: времени и двух пространственных. Данное уравнение можно назвать обобщенным уравнением Курамото–Сивашинского, и оно описывает процесс формирования неоднородного рельефа на поверхности полупроводников под воздействием ионной бомбардировки. В работе это уравнение рассматривается вместе с однородными краевыми условиями Неймана. Для данной краевой задачи изучается вопрос о локальных бифуркациях пространственно неоднородных состояний равновесия при смене ими устойчивости. Показано, что в результате бифуркации могут появиться пространственно неоднородные состояния равновесия трех типов. Выведены условия на коэффициенты, при которых происходит потеря устойчивости. В случаях, близких к критическим, для значений параметров рассмотрены задачи о локальных бифуркациях. Показано, что вопрос о формировании неоднородного рельефа с математической точки зрения сводится к изучению вспомогательных обыкновенных дифференциальных уравнений, которые принято называть нормальной формой Пуанкаре–Дюлака. Для решения возникающих бифуркационных задач были использованы методы исследования динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством (пространством начальных условий), такие как: метод инвариантных многообразий в сочетании с аппаратом теории нормальных форм. В частности, изучен вопрос об устойчивости найденных решений, а также получены асимптотические формулы для бифурцирующих пространственно неоднородных решений. Подтверждено, что формирование неоднородного рельефа можно рассматривать как явление самоорганизации.

Ключевые слова: бифуркации и устойчивость, волновой нанорельеф, пространственно неоднородные решения

Для цитирования: Секацкая А. В., "Бифуркации пространственно неоднородных решений в одной краевой задаче для обобщенного уравнения Курамото–Сивашинского", *Моделирование и анализ информационных систем*, **24**:5 (2017), 615–628.

Об авторе:
Секацкая Алина Вадимовна, orcid.org/0000-0002-8421-9119, аспирант,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: alinastart@mail.ru

Благодарности:
Работа выполнена при поддержке проекта № 1.5722.2017/8.9 в рамках базовой части государственного задания на НИР ЯрГУ.

Введение

В работе рассматривается нелинейное уравнение с частными производными, которое моделирует процесс формирования нанорельефа при бомбардировке ионами плоской поверхности мишени (подложки). Этот технологический процесс имеет широкое применение в современной микроэлектронике (наноэлектронике) при обработке полупроводниковых материалов. Математические модели опираются на теорию П. Зигмунда (см. [1–2]) взаимодействия потока ионов с поверхностью твердого тела. Уравнение Курамото–Сивашинского (КС) [3–4] встречается во многих разделах физики, в химической кинетике. Часто к этому уравнению могут быть сведены уравнения, которые моделируют процесс эрозии поверхности [5–7] под воздействием потока ионов.

Рассмотрим уравнение

$$h_t = -v_0 + v_x h_{xx} + v_y h_{yy} - D_{xx} h_{xxxx} - D_{xy} h_{xxyy} - D_{yy} h_{yyyy} + \gamma_x (h_x)^2 + \gamma_y (h_y)^2. \quad (1)$$

Здесь $v_0, v_x, v_y, D_{xx}, D_{yy}, \gamma_x, \gamma_y \in \mathbb{R}, D_{xx}, D_{xy}, D_{yy} > 0, \gamma_x, \gamma_y \neq 0$. Уравнение $z = h(t,x,y)$ задает форму поверхности, образовавшуюся под воздействием потока ионов интенсивности J, оно содержит в правой части функцию $h(t,x,y)$, которая зависит от t и пространственных переменных x, y. Коэффициенты уравнения (1) зависят от характеристик изучаемого физического (технологического) процесса и характеризуют условия, при которых происходит обработка мишени. Все они зависят от угла Θ между направляющей потока ионов и нормалью к недеформированной поверхности. Также эти коэффициенты зависят от интенсивности потока J. Положительный коэффициент v_x обратно пропорционален интенсивности потока ионов, то есть $v_x = v_x(J, \Theta)$, а при фиксированном Θ данная функция убывает при возрастании J. Если $\Theta = 0$, то такой случай называется квазиизотропным, то есть пучок ионов падает под прямым углом к недеформированной поверхности. Постоянная $v_0 > 0$ характеризует скорость понижения поверхности согласно терминологии Дж. Картера [8]. Вычислению скорости эрозии, в частности, посвящена основополагающая работа П. Зигмунда [9].

В данной работе уравнение (1) рассматривается вместе с однородными краевыми условиями Неймана:

$$\begin{gathered} h_x(t,0,y) = h_x(t,\pi,y) = h_{xxx}(t,0,y) = h_{xxx}(t,\pi,y) = 0, \\ h_y(t,x,0) = h_y(t,x,\pi) = h_{yyy}(t,x,0) = h_{yyy}(t,x,\pi) = 0, x \in [0,\pi], y \in [0,\pi]. \end{gathered} \quad (2)$$

Очевидно, что функция

$$h(t,x,y) = -v_0 t + h_0 \ (h_0 \in \mathbb{R}) \quad (3)$$

является решением краевой задачи (1), (2). Это решение описывает плоский профиль при обработке образца потоком ионов.

Допустима замена

$$h(t,x,y) = (-v_0 t + h_0) + u(t,x,y), \quad (4)$$

где $u(t,x,y)$ — нормированное отклонение от плоского профиля (3) мишени. Подстановка (4) в уравнение (1) позволяет получить уравнение для отклонений от плоского профиля распыляемой поверхности. В результате для $u(t,x,y)$ получаем краевую задачу:

$$u_t = -b_1 u_{xx} - b_2 u_{yy} - d_1 u_{xxxx} - d_3 u_{xxyy} - d_2 u_{yyyy} + c_1 (u_x)^2 + c_2 (u_y)^2, \tag{5}$$

$$\begin{gathered} u_x(t,0,y) = u_x(t,\pi,y) = u_{xxx}(t,0,y) = u_{xxx}(t,\pi,y) = 0, \\ u_y(t,x,0) = u_y(t,x,\pi) = u_{yyy}(t,x,0) = u_{yyy}(t,x,\pi) = 0, \end{gathered} \tag{6}$$

где коэффициенты $b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}, d_1, d_2, d_3 > 0, c_1, c_2 \neq 0$.

Для краевой задачи (5), (6) плоский фронт мишени задается равенством $u(t,x,y) = 0$. Эта задача также инвариантна относительно замены $u \to u + const$. Это означает, что уравнение плоского рельефа зависит от выбора системы координат. Окрестность иных состояний равновесия $u(t,x,y) = const$, в силу выше сказанного, может быть заменена на окрестность нулевого решения. С точки зрения приложений, особый интерес представляет наличие у нелинейной краевой задачи устойчивых решений $u(t,x,y)$, которые существенно зависят от пространственных переменных $x, y \quad (u_x^2 + u_y^2 \neq 0)$ и задают неоднородный профиль рельефа.

Положим

$$u(0,x,y) = f(x,y). \tag{7}$$

Смешанная задача (5), (6), (7) локально корректно разрешима, если $f(x,y) \in \overset{\circ}{W}{}_2^4(D)$ [10]. Здесь через $\overset{\circ}{W}{}_2^4(D)$ обозначено замыкание линеала достаточно гладких функций $f(x,y)$, удовлетворяющих краевым условиям (6), по норме пространства Соболева $W_2^4(D)$. Напомним, что $g(x,y) \in W_2^4(D)$, если функция $g(x,y)$ имеет обобщенные производные $\dfrac{\partial g}{\partial x}; \dfrac{\partial g}{\partial y}; \ldots; \dfrac{\partial^4 g}{\partial x\, \partial y^3}; \dfrac{\partial^4 g}{\partial y^4}$ до четвертого порядка включительно, которые принадлежат $L_2(D)$. Подчеркнем, что в силу теорем вложения $g(x,y) \in C^2(D)$, то есть пространству дважды непрерывно дифференцируемых функций [10].

1. Линейная краевая задача

Для исследования устойчивости нулевого состояния равновесия рассмотрим вспомогательную краевую задачу, которая возникает после линеаризации краевой задачи (5)–(6) в окрестности тривиального состояния равновесия. В результате получим линейную краевую задачу

$$u_t = Au, \tag{8}$$

$$\begin{gathered} u_x(t,0,y) = u_x(t,\pi,y) = u_{xxx}(t,0,y) = u_{xxx}(t,\pi,y) = 0, \\ u_y(t,x,0) = u_y(t,x,\pi) = u_{yyy}(t,x,0) = u_{yyy}(t,x,\pi) = 0, \end{gathered} \tag{9}$$

где линейный дифференциальный оператор

$$Av = -b_1 v_{xx} - b_2 v_{yy} - d_1 v_{xxxx} - d_2 v_{yyyy} - d_3 v_{xxyy}$$

определен на достаточно гладких функциях $v = v(x,y)$, удовлетворяющих краевым условиям

$$v_x(0,y) = v_x(\pi,y) = v_{xxx}(0,y) = v_{xxx}(\pi,y) = 0,$$

$$v_y(x,0) = v_y(x,\pi) = v_{yyy}(x,0) = v_{yyy}(x,\pi) = 0.$$

Пусть λ — собственное значение (СЗ), а $v(x,y)$ — собственная функция (СФ) линейного дифференциального оператора A. Для исследования устойчивости нулевого решения краевой задачи (8), (9) найдем все ее решения следующего вида:

$$u(t,x,y) = \exp(\lambda t) \cdot v(x,y).$$

Для нахождения СЗ λ, а также соответствующей СФ, получим краевую задачу

$$\begin{gathered} Av = \lambda v, \\ v_x(0,y) = v_x(\pi,y) = v_{xxx}(0,y) = v_{xxx}(\pi,y) = 0, \\ v_y(x,0) = v_y(x,\pi) = v_{yyy}(x,0) = v_{yyy}(x,\pi) = 0. \end{gathered} \tag{10}$$

Подстановкой проверяется, что краевая задача (10) имеет нетривиальные решения, если линейный дифференциальный оператор A имеет СЗ

$$\lambda = \lambda(n,k) = (b_1 n^2 + b_2 k^2) - (d_1 n^4 + d_2 k^4 + d_3 n^2 k^2),$$

каждому из которых соответствует собственная функция

$$v(x,y) = e_{n,k}(x,y) = \cos nx \cdot \cos ky,$$

где $n,k = 0,1,2,3,\ldots$ Как хорошо известно, собственные функции $e_{n,k}(x,y)$ в пространстве $L_2(D)$ образуют полную ортогональную систему функций. Поэтому линейный дифференциальный оператор A не может иметь иных собственных значений, отличных от $\lambda(n,k)$.

Среди СЗ могут быть и кратные, если существуют такие пары (n_1,k_1) и (n_2,k_2), что

$$(b_1 n_1^2 + b_2 k_1^2) - (d_1 n_1^4 + d_2 k_1^4 + d_3 n_1^2 k_1^2) = (b_1 n_2^2 + b_2 k_2^2) - (d_1 n_2^4 + d_2 k_2^4 + d_3 n_2^2 k_2^2).$$

Отметим, что $\lambda(0,0) = 0$. Понятно, что если $\lambda(n,k) < 0$ при всех $n^2+k^2 \neq 0$, то любое состояние равновесия задачи (8), (9) устойчиво (но не может быть асимптотически устойчивым). Устойчивость следует понимать в смысле нормы фазового пространства (пространства начальных условий). Например, пространства Соболева $W_2^4(D)$ [10]. Если же существует такая пара (n_0,k_0), где $n_0^2 + k_0^2 \neq 0$, что $\lambda(n_0,k_0) > 0$, то состояние равновесия неустойчиво. Критические случаи выделяются условиями: пусть для некоторых пар (n_0,k_0) выполнено равенство

$$\lambda(n_0,k_0) = 0, \quad k_0^2 + n_0^2 \neq 0,$$

а для остальных номеров n,k $(n^2+k^2 \neq 0)$ имеет место неравенство $\lambda(n,k) < 0$. Отметим также, что в нашем случае все собственные значения $\lambda(n,k)$ действительны. В терминах коэффициентов уравнения (8) условия устойчивости приобретают вид двух неравенств: $b_1 - d_1 < 0, \quad b_2 - d_2 < 0$. Следовательно, можно выделить три критических случая:

$$1)\ b_1 = d_1,\ b_2 < d_2; \quad 2)\ b_1 < d_1,\ b_2 = d_2; \quad 3)\ b_1 = d_1,\ b_2 = d_2.$$

При проверке следует учитывать, что $d_1, d_2, d_3 > 0$. В первом случае нулевое СЗ оператора A двукратно. Ему соответствуют СФ:

$$e_{0,0}(x,y) = 1, \quad e_{1,0}(x,y) = \cos x.$$

При таком выборе коэффициентов удобно обозначить соответствующий оператор через A_1. При реализации второго критического случая оператор обозначим через A_2. Как и в первом случае, нулевое СЗ двукратно. Ему соответствуют две следующие СФ:

$$e_{0,0}(x,y)=1, \quad e_{0,1}(x,y)=\cos y.$$

Наконец, в последнем случае соответствующий оператор обозначим A_3. СЗ $\lambda=0$ здесь уже имеет кратность, равную трем, так как ему соответствуют следующие 3 СФ:

$$e_{0,0}(x,y)=1, \quad e_{1,0}(x,y)=\cos x, \quad e_{0,1}(x,y)=\cos y.$$

В следующем разделе будут рассмотрены варианты выбора коэффициентов оператора A, при которых реализуются случаи, близкие к критическим, отмеченным выше.

Положим $b_1-d_1=\gamma_1\varepsilon,\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_0),\ \varepsilon_0<<1,\ \gamma_1=\pm1$ и введем в рассмотрение линейный дифференциальный оператор $(b_2<d_2)$

$$A_1(\varepsilon)v=-(d_1+\varepsilon)v_{xx}-b_2v_{yy}-d_1v_{xxxx}-d_2v_{yyyy}-d_3v_{xxyy}.$$

Во втором варианте рассмотрим линейный дифференциальный оператор

$$A_2(\varepsilon)v=-b_1v_{xx}-(d_2+\varepsilon)v_{yy}-d_1v_{xxxx}-d_2v_{yyyy}-d_3v_{xxyy}$$

и, наконец, обозначим

$$A_3(\varepsilon)v=-(d_1+\alpha_1\varepsilon)v_{xx}-(d_2+\alpha_2\varepsilon)v_{yy}-d_1v_{xxxx}-d_2v_{yyyy}-d_3v_{xxyy},\ \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}.$$

2. Нелинейная краевая задача

В первой части этого раздела рассмотрим краевую задачу

$$u_t=A_1(\varepsilon)u+c_1(u_x)^2+c_2(u_y)^2, \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &u_x(t,0,y)=u_x(t,\pi,y)=u_{xxx}(t,0,y)=u_{xxx}(t,\pi,y)=0,\\ &u_y(t,x,0)=u_y(t,x,\pi)=u_{yyy}(t,x,0)=u_{yyy}(t,x,\pi)=0, \end{aligned} \tag{12}$$

где $u=u(t,x,y),\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$.

Поведение решений краевой задачи при достаточно малых начальных условиях определяется поведением решений двумерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений на центральном инвариантном многообразии [11–14], которую принято называть нормальной формой.

Для построения нормальной формы на двумерном инвариантном многообразии воспользуемся аналогом метода Крылова–Боголюбова. Будем искать решения краевой задачи (11), (12) в виде суммы:

$$u(t,x,y,\varepsilon)=\psi(s)+\varepsilon^{1/2}u_1(s,x,y)+\varepsilon u_2(s,x,y)+\varepsilon^{3/2}u_3(s,x,y)+o(\varepsilon^{3/2}), \tag{13}$$

где $s=\varepsilon t$ — «медленное время», $u_j(s,x,y)\in\overset{\circ}{W}{}_2^4$ при любом рассматриваемом $s, j=1,2,3$. Также отметим для дальнейших построений, что

$$\dot\psi=\varepsilon\psi', \quad \frac{\partial u_j}{\partial t}=\dot u_j+u_j'\varepsilon,$$

где точкой обозначена частная производная по t, а штрихом – по s. Наконец, положим

$$u_1(s,x,y) = z(s)\cdot\cos x.$$

Действительные функции $z = z(s)$, $\psi = \psi(s)$ будем искать как решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\psi' = a_0 z^2, \tag{14}$$

$$z' = \alpha z - a z^3, \tag{15}$$

где a_0, a, α — действительные числа. Уравнения (14), (15) выписаны с точностью до слагаемых порядка $O(\varepsilon^{1/2})$. Система (14), (15) — «главная» часть нормальной формы Пуанкаре–Дюлака. В свою очередь, нормальная форма описывает динамику нелинейной краевой задачи (11), (12) на двумерном инвариантном многообразии («центральное многообразие») [11–14]. Остальные решения нелинейной краевой задачи с течением времени приближаются к этому двумерному многообразию со скоростью экспоненты.

Подстановка суммы (13) в краевую задачу (11), (12) с последующим приравниванием выражений при одинаковых степенях ε приводит к линейным краевым задачам для определения u_j, $j = 1,2,3$. При их формировании и изучении будем интерпретировать s как параметр.

В итоге для u_2, u_3 получим две следующие неоднородные краевые задачи:

$$\psi' + \dot{u}_2 = A_1(0)\cdot u_2 + c_1(u_{1x})^2, \tag{16}$$

$$\begin{aligned} u_{2x}(t,0,y) = u_{2x}(t,\pi,y) = u_{2xxx}(t,0,y) = u_{2xxx}(t,\pi,y) = 0,\\ u_{2y}(t,x,0) = u_{2y}(t,x,\pi) = u_{2yyy}(t,x,0) = u_{2yyy}(t,x,\pi) = 0, \end{aligned} \tag{17}$$

$$z'\cos x + \dot{u}_3 = A_1(0)\cdot u_3 - u_{1xx} + 2c_1 u_{1x} u_{2x}, \tag{18}$$

$$\begin{aligned} u_{3x}(t,0,y) = u_{3x}(t,\pi,y) = u_{3xxx}(t,0,y) = u_{3xxx}(t,\pi,y) = 0,\\ u_{3y}(t,x,0) = u_{3y}(t,x,\pi) = u_{3yyy}(t,x,0) = u_{3yyy}(t,x,\pi) = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

При формировании краевых задач для u_2 и u_3 учтено, что $(u_1(x))_y = 0$, то есть отсутствует, например, слагаемое $c_2(u_{1y})^2$. Линейный оператор $A_1(0)$ имеет двукратное нулевое СЗ, которому отвечают СФ $e_{0,0}(x,y)$, $e_{1,0}(x,y)$. Поэтому, как известно (см., например, [10] или §29 из [15]), неоднородная краевая задача

$$A_1(0)\cdot v(x,y) = F(x,y)$$

имеет решение, если справедливы следующие равенства (условия разрешимости):

$$\int_0^\pi\int_0^\pi F(x,y)dxdy = \int_0^\pi\int_0^\pi F(x,y)\cos x dxdy = 0.$$

Равенства

$$\int_0^\pi\int_0^\pi v(x,y)dxdy = \int_0^\pi\int_0^\pi v(x,y)\cos x dxdy = 0$$

выделяют одно такое решение.

Применяя условия разрешимости при рассмотрении неоднородной краевой задачи (16), (17), получаем, что
$$\psi' = \frac{c_1}{2}z^2.$$

Далее решение краевой задачи (16), (17) будем искать в виде
$$u_2 = \eta z^2 \cos 2x. \tag{20}$$

После подстановки (20) в (16), (17) находим, что
$$\eta = -\frac{c_1}{24d_1},$$

а соответственно решение u_2 равно
$$u_2(s, x, y) = -\frac{c_1}{24d_1}z^2 \cos 2x.$$

Из условий разрешимости неоднородной краевой задачи (18), (19) вытекает, что
$$z' = \gamma_1 z - \frac{c_1^2}{12d_1}z^3.$$

Решение u_3 ищем в виде
$$u_3(s, x, y) = \eta z^3 \cos 3x. \tag{21}$$
После подстановки (21) в (18), (19) находим, что
$$u_3(s, x, y) = \frac{c_1^2}{864d_1^2}z^3 \cos 3x.$$

Перейдем к рассмотрению нормальной формы (14), (15). При этом основную роль играет дифференциальное уравнение
$$z' = \gamma_1 z - \frac{c_1^2}{3d_1}z^3. \tag{22}$$

Стандартный анализ показывает, что дифференциальное уравнение (22) имеет ненулевые состояния равновесия $S_{\pm 1}$, если $\gamma_1 = 1$, вида
$$z(s) = \pm 2\sqrt{3} \quad \frac{\sqrt{d_1}}{|c_1|}. \tag{23}$$

При $\gamma = -1$ уравнение (23) имеет только нулевое состояние равновесия, которое асимптотически устойчиво. Состояния равновесия $S_{\pm 1}$ асимптотически устойчивы. Каждому решению (23) соответствует следующее решение нормальной формы (14), (15)
$$z(s) = \pm 2\sqrt{3}\frac{\sqrt{d_1}}{|c_1|}, \quad \psi(s) = 6\frac{d_1}{c_1}s + \psi_0, \quad \psi_0 \in \mathbb{R}.$$
Используя результаты работ [12–14, 16–19], можно обосновать справедливость утверждения.

Теорема 1. *Существует такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что при всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *каждому решению* (23) *соответствует решение краевой задачи* (11), (12)

$$u_{11}(t,x,y,\varepsilon) = K_{11} + \left(6\varepsilon\frac{d_1}{c_1} + o(\varepsilon)\right)t + \varepsilon^{1/2}2\sqrt{3}\frac{\sqrt{d_1}}{|c_1|}\cos x -$$

$$-\frac{\varepsilon}{2c_1}\cos 2x + \varepsilon^{3/2}\frac{\sqrt{3}}{36|c_1|\sqrt{d_1}}\cos 3x + o(\varepsilon^{3/2}), \tag{24}$$

$$u_{12}(t,x,y,\varepsilon) = K_{12} + \left(6\varepsilon\frac{d_1}{c_1} + o(\varepsilon)\right)t - \varepsilon^{1/2}2\sqrt{3}\frac{\sqrt{d_1}}{|c_1|}\cos x -$$

$$-\frac{\varepsilon}{2c_1}\cos 2x - \varepsilon^{3/2}\frac{\sqrt{3}}{36|c_1|\sqrt{d_1}}\cos 3x + o(\varepsilon^{3/2}), \tag{25}$$

где K_{11}, K_{12} *— произвольные постоянные. Каждое из этих семейств решений формирует интегральное многообразие* $M_1(\varepsilon)$ *размерности 1 нелинейной краевой задачи* (11), (12).

Уместно подчеркнуть, что решения $u_{11}(x,\varepsilon)$ и $u_{12}(x,\varepsilon)$ связаны соотношением

$$u_{12}(x,\varepsilon) = u_{11}(\pi - x, \varepsilon).$$

Второй вариант выделяется условиями $b_2 = d_2 + \varepsilon, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), b_1 < d_1$. Это означает, что следует рассматривать краевую задачу

$$u_t = A_2(\varepsilon)u + c_1(u_x)^2 + c_2(u_y)^2, \tag{26}$$

$$\begin{aligned} &u_x(t,0,y) = u_x(t,\pi,y) = u_{xxx}(t,0,y) = u_{xxx}(t,\pi,y) = 0,\\ &u_y(t,x,0) = u_y(t,x,\pi) = u_{yyy}(t,x,0) = u_{yyy}(t,x,\pi) = 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Практически дословно повторяя построения при анализе нелинейной краевой задачи (11), (12), можно доказать справедливость утверждения.

Теорема 2. *Существует такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что при всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *существует 2 семейства устойчивых решений*

$$u_{21}(t,x,y,\varepsilon) = K_{21} + \left(6\varepsilon\frac{d_1}{c_1} + o(\varepsilon)\right)t + \varepsilon^{1/2}2\sqrt{3}\frac{\sqrt{d_1}}{|c_1|}\cos y -$$

$$-\frac{\varepsilon}{2c_1}\cos 2y + \varepsilon^{3/2}\frac{\sqrt{3}}{36|c_1|\sqrt{d_1}}\cos 3y + o(\varepsilon^{3/2}),$$

$$u_{22}(t,x,y,\varepsilon) = K_{22} + \left(6\varepsilon\frac{d_1}{c_1} + o(\varepsilon)\right)t - \varepsilon^{1/2}2\sqrt{3}\frac{\sqrt{d_1}}{|c_1|}\cos y -$$

$$-\frac{\varepsilon}{2c_1}\cos 2y - \varepsilon^{3/2}\frac{\sqrt{3}}{36|c_1|\sqrt{d_1}}\cos 3y + o(\varepsilon^{3/2})$$

краевой задачи (26), (27). *Здесь* K_{21}, K_{22} *— произвольные действительные постоянные.*

Более сложный вариант бифуркационной задачи выделяется равенствами

$$b_1 = d_1 + \alpha_1\varepsilon, \quad b_2 = d_2 + \alpha_2\varepsilon, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Анализу подлежит краевая задача

$$u_t = A_3(\varepsilon)u + c_1(u_x)^2 + c_2(u_y)^2, \tag{28}$$

$$\begin{aligned} u_x(t,0,y) = u_x(t,\pi,y) = u_{xxx}(t,0,y) = u_{xxx}(t,\pi,y) = 0,\\ u_y(t,x,0) = u_y(t,x,\pi) = u_{yyy}(t,x,0) = u_{yyy}(t,x,\pi) = 0. \end{aligned} \tag{29}$$

Этот случай отличается тем, что линейный дифференциальный оператор $A_3(0)$ имеет нулевое собственное число кратности 3, которому отвечают собственные функции

$$e_{0,0}(x,y) = 1, \quad e_{1,0}(x,y) = \cos x, \quad e_{0,1}(x,y) = \cos y.$$

Будем искать решения краевой задачи, которые могут быть представлены в форме

$$u(t,x,y,\varepsilon) = \psi(s) + \varepsilon^{1/2}u_1(s,x,y) + \varepsilon u_2(s,x,y) + \varepsilon^{3/2}u_3(s,x,y) + o(\varepsilon^{3/2}),$$

где $s = \varepsilon t$, функции $u_j(s,x,y) \in \overset{\circ}{W}{}_2^4$ при всех рассматриваемых s, $j = 1,2,3$, а

$$u_1(s,x,y) = z_1(s)\cdot\cos x + z_2(s)\cdot\cos y.$$

В данном случае центральное инвариантное многообразие $M_3(\varepsilon)$ имеет размерность, равную 3. На этом многообразии $M_3(\varepsilon)$ краевая задача сводится к системе из трех обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\psi' = a_1z_1^2 + a_2z_2^2, \tag{30}$$

$$z_1' = \alpha_1z_1 + a_{11}z_1^3, \quad z_2' = \alpha_2z_2 + a_{21}z_2^3 \tag{31}$$

для функций $\psi = \psi(s)$, $z_1 = z_1(s)$, $z_2 = z_2(s)$, где a_1, a_2, a_{11}, a_{21} — действительные числа. Функции $u_2(s,x,y)$, $u_3(s,x,y)$ и коэффициенты нормальной формы (30), (31) могут быть определены из анализа неоднородных краевых задач для u_2, u_3 :

$$a_1z_1^2 + a_2z_2^2 = A_3(0)u_2 + c_1(u_{1x})^2 + c_2(u_{1y})^2, \tag{32}$$

$$\begin{aligned} u_{2x}(t,0,y) = u_{2x}(t,\pi,y) = u_{2xxx}(t,0,y) = u_{2xxx}(t,\pi,y) = 0,\\ u_{2y}(t,x,0) = u_{2y}(t,x,\pi) = u_{2yyy}(t,x,0) = u_{2yyy}(t,x,\pi) = 0, \end{aligned} \tag{33}$$

$$g_1\cos x + g_2\cos y = A_3(0)u_3 + 2c_1(u_{1x})(u_{2x}) + 2c_2(u_{1y})(u_{2y}), \tag{34}$$

$$\begin{aligned} u_{3x}(t,0,y) = u_{3x}(t,\pi,y) = u_{3xxx}(t,0,y) = u_{3xxx}(t,\pi,y) = 0,\\ u_{3y}(t,x,0) = u_{3y}(t,x,\pi) = u_{3yyy}(t,x,0) = u_{3yyy}(t,x,\pi) = 0. \end{aligned} \tag{35}$$

В уравнении (34) использованы обозначения

$$g_1 = \alpha_1z_1 + a_{11}z_1^3, \quad g_2 = \alpha_2z_2 + a_{21}z_2^3.$$

Отметим, что в рассматриваемом случае неоднородная краевая задача

$$A_3(0)\cdot v(x,y) = F(x,y),$$

$$v_x(0,y) = v_x(\pi,y) = v_{xxx}(0,y) = v_{xxx}(\pi,y) = 0,$$
$$v_y(x,0) = v_y(x,\pi) = v_{yyy}(x,0) = v_{yyy}(x,\pi) = 0$$

имеет решение, если

$$\int\limits_0^\pi\int\limits_0^\pi F(x,y)dxdy = \int\limits_0^\pi\int\limits_0^\pi F(x,y)\cos x dxdy = \int\limits_0^\pi\int\limits_0^\pi F(x,y)\cos y dxdy = 0.$$

Используя условия разрешимости, находим, что

$$a_1 = \frac{c_1}{2}, \quad a_2 = \frac{c_2}{2}, \quad a_{11} = -\frac{c_1^2}{12d_1}, \quad a_{21} = -\frac{c_2^2}{12d_2}.$$

Пусть $\alpha_1, \alpha_2 > 0$. Тогда замкнутая система обыкновенных дифференциальных уравнений (31) для $z_1(s), z_2(s)$ имеет 9 состояний равновесия

$$S_{0,0} \quad : \quad z_1 = z_2 = 0;$$

$$S_{\pm1,0} \quad : \quad z_1 = \pm 2\sqrt{3}\cdot\frac{d_1\alpha_1}{|c_1|}, \quad z_2 = 0;$$

$$S_{0,\pm1} \quad : \quad z_1 = 0, z_2 = \pm 2\sqrt{3}\cdot\frac{d_2\alpha_2}{|c_2|};$$

$$S_{\pm1,\pm1} \quad : \quad z_j = \pm 2\sqrt{3}\cdot\frac{d_j\alpha_j}{|c_j|}, \quad j = 1, 2.$$

Состояния равновесия $S_{0,0}, S_{\pm1,0}, S_{0,\pm1}$ неустойчивы, состояния равновесия $S_{\pm1,\pm1}$ соответственно асимптотически устойчивы как решения замкнутой подсистемы (31).

При этом система обыкновенных дифференциальных уравнений (30), (31) имеет 4 семейства устойчивых решений

$$\begin{gathered} \psi(s) = 6\left(\frac{d_1\alpha_1}{c_1} + \frac{d_2\alpha_2}{c_2}\right)s + \psi_0, \quad \psi_0 \in \mathbb{R}, \\ z_j(s) = \pm 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{d_j\alpha_j}}{|c_j|}, \quad j = 1, 2 \end{gathered} \tag{36}$$

и 4 неустойчивых семейства решений, соответствующих $S_{\pm1,0}$ и $S_{0,\pm1}$

$$\begin{gathered} \psi(s) = 6\,\frac{d_1\alpha_1}{c_1}\,s + \psi_0, \\ z_1 = \pm 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{d_1\alpha_1}}{c_1}, \quad z_2 = 0 \end{gathered} \tag{37}$$

и

$$\begin{gathered} \psi(s) = 6\,\frac{d_2\alpha_2}{c_2}\,s + \psi, \\ z_2 = \pm 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{d_2\alpha_2}}{c_2}, \quad z_1 = 0. \end{gathered} \tag{38}$$

Теорема 3. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ каждому решению семейства* (36) *соответствует семейство устойчивых решений краевой задачи* (11), (12)

$$u_{31}(t,x,y,\varepsilon) = K_{31} + \left(6\varepsilon\left(\tfrac{d_1\alpha_1}{c_1} + \tfrac{d_2\alpha_2}{c_2}\right) + o(\varepsilon)\right)t + \varepsilon^{1/2}\left(\tfrac{2\sqrt{3\alpha_1 d_1}}{|c_1|}\cos x + \tfrac{2\sqrt{3\alpha_2 d_2}}{|c_2|}\cos y\right) -$$

$$-\varepsilon\left(\tfrac{\alpha_1}{2c_1}\cos 2x + \tfrac{\alpha_2}{2c_2}\cos 2y\right) + \varepsilon^{3/2}\left(\tfrac{\sqrt{3}(\sqrt{\alpha_1})^3}{36\sqrt{d_1}|c_1|}\cos 3x + \tfrac{\sqrt{3}(\sqrt{\alpha_2})^3}{36\sqrt{d_2}|c_2|}\cos 3y\right) + o(\varepsilon^{3/2}),$$

$$u_{32}(t,x,y,\varepsilon) = K_{32} + \left(6\varepsilon\left(\tfrac{d_1\alpha_1}{c_1} + \tfrac{d_2\alpha_2}{c_2}\right) + o(\varepsilon)\right)t + \varepsilon^{1/2}\left(\tfrac{2\sqrt{3\alpha_1 d_1}}{|c_1|}\cos x - \tfrac{2\sqrt{3\alpha_2 d_2}}{|c_2|}\cos y\right) -$$

$$-\varepsilon\left(\tfrac{\alpha_1}{2c_1}\cos 2x + \tfrac{\alpha_2}{2c_2}\cos 2y\right) + \varepsilon^{3/2}\left(\tfrac{\sqrt{3}(\sqrt{\alpha_1})^3}{36\sqrt{d_1}|c_1|}\cos 3x - \tfrac{\sqrt{3}(\sqrt{\alpha_2})^3}{36\sqrt{d_2}|c_2|}\cos 3y\right) + o(\varepsilon^{3/2}),$$

$$u_{33}(t,x,y,\varepsilon) = K_{33} + \left(6\varepsilon\left(\tfrac{d_1\alpha_1}{c_1} + \tfrac{d_2\alpha_2}{c_2}\right) + o(\varepsilon)\right)t + \varepsilon^{1/2}\left(-\tfrac{2\sqrt{3\alpha_1 d_1}}{|c_1|}\cos x + \tfrac{2\sqrt{3\alpha_2 d_2}}{|c_2|}\cos y\right) -$$

$$-\varepsilon\left(\tfrac{\alpha_1}{2c_1}\cos 2x + \tfrac{\alpha_2}{2c_2}\cos 2y\right) + \varepsilon^{3/2}\left(-\tfrac{\sqrt{3}(\sqrt{\alpha_1})^3}{36\sqrt{d_1}|c_1|}\cos 3x + \tfrac{\sqrt{3}(\sqrt{\alpha_2})^3}{36\sqrt{d_2}|c_2|}\cos 3y\right) + o(\varepsilon^{3/2}),$$

$$u_{34}(t,x,y,\varepsilon) = K_{34} + \left(6\varepsilon\left(\tfrac{d_1\alpha_1}{c_1} + \tfrac{d_2\alpha_2}{c_2}\right) + o(\varepsilon)\right)t - \varepsilon^{1/2}\left(\tfrac{2\sqrt{3\alpha_1 d_1}}{|c_1|}\cos x + \tfrac{2\sqrt{3\alpha_2 d_2}}{|c_2|}\cos y\right) -$$

$$-\varepsilon\left(\tfrac{\alpha_1}{2c_1}\cos 2x + \tfrac{\alpha_2}{2c_2}\cos 2y\right) - \varepsilon^{3/2}\left(\tfrac{\sqrt{3}(\sqrt{\alpha_1})^3}{36\sqrt{d_1}|c_1|}\cos 3x + \tfrac{\sqrt{3}(\sqrt{\alpha_2})^3}{36\sqrt{d_2}|c_2|}\cos 3y\right) + o(\varepsilon^{3/2}),$$

где $K_{31}, K_{32}, K_{33}, K_{34}$ — произвольные действительные постоянные.

Теорема 4. *Существует $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ каждому решению семейств решений* (37), (38) *нормальной формы* (30), (31) *соответствуют 4 неустойчивых семейства решений краевой задачи* (11), (12) *следующего вида:*

$$u_{\pm1,0}(t,x) = K_{4,\pm1} + \left(6\varepsilon\,\tfrac{d_1\alpha_1}{c_1} + o(\varepsilon)\right)t + \varepsilon^{1/2}\left(\pm\tfrac{2\sqrt{3d_1\alpha_1}}{|c_1|}\cos x\right) - \varepsilon\tfrac{\alpha_1}{2c_1}\cos 2x + o(\varepsilon),$$

$$u_{0,\pm1}(t,y) = K_{4,\pm2} + \left(6\varepsilon\,\tfrac{d_2\alpha_2}{c_2} + o(\varepsilon)\right)t + \varepsilon^{1/2}\left(\pm\tfrac{2\sqrt{3d_2\alpha_2}}{|c_2|}\cos y\right) - \varepsilon\tfrac{\alpha_2}{2c_2}\cos 2y + o(\varepsilon).$$

Здесь $K_{4,\pm1}, K_{4,\pm2} \in \mathbb{R}$ и произвольны. Эти решения неустойчивы.

В рамках теорем 3, 4 были указаны 8 семейств решений. Решения, принадлежащие этим семействам, можно назвать состояниями равновесия второго рода, так как для этих решений $u_*(t,x)$ выполнены следующие свойства:

1) $\dfrac{\partial u_*}{\partial t}$ не зависит от t и x;

2) $\dfrac{\partial u_*}{\partial x}$ не зависит от t.

Решения, указанные в теореме 4, не представляют интереса с прикладной точки зрения, так как физически не реализуются в силу того обстоятельства, что они неустойчивы по Ляпунову. В теоремах 1, 2, 3 были найдены решения (двухпараметрические семейства решений) вспомогательной краевой задачи (11), (12). Этим решениям соответствуют решения уже основной краевой задачи (1), (2). Так, решениям краевой задачи (11), (12) из теоремы 1 соответствуют решения

$$h_{11}(t,x,\varepsilon) = -v_0 t + u_{11}(t,x,y,\varepsilon),$$

$$h_{12}(t,x,\varepsilon) = -v_0 t + u_{12}(t,x,y,\varepsilon)$$

краевой задачи (1), (2). Аналогично во втором случае

$$h_{21}(t,x,y,\varepsilon) = -v_0 t + u_{21}(t,x,y,\varepsilon),$$

$$h_{22}(t,x,y,\varepsilon) = -v_0 t + u_{22}(t,x,y,\varepsilon),$$

и в третьем случае

$$h_{31}(t,x,y,\varepsilon) = -v_0 t + u_{31}(t,x,y,\varepsilon),\ \ h_{32}(t,x,y,\varepsilon) = -v_0 t + u_{32}(t,x,y,\varepsilon),$$

$$h_{33}(t,x,y,\varepsilon) = -v_0 t + u_{33}(t,x,y,\varepsilon),\ \ h_{34}(t,x,y,\varepsilon) = -v_0 t + u_{34}(t,x,y,\varepsilon).$$

Решения $h_{11}, h_{12}, h_{21}, h_{22}, h_{31}, h_{32}, h_{33}, h_{34}$ наследуют устойчивость соответствующих решений $u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}, u_{31}, u_{32}, u_{33}, u_{34}$.

Заключение

Методами качественной теории дифференциальных уравнений в данной работе были исследованы механизмы формирования нанорельефа для обобщенного двумерного уравнения Курамото–Сивашинского. Были исследованы различные варианты краевой задачи (1), (2). Показано, что у нее возникают, или точнее, могут появиться пространственно неоднородные решения, и в том числе устойчивые. Они бифурцируют из нулевого состояния равновесия при смене им устойчивости. Для бифурцирующих решений приведены асимптотические формулы. С точки зрения приложения к физике (нано- и микроэлектронике) наибольший интерес для приложений представляют именно пространственно неоднородные решения. Они описывают неоднородный рельеф на поверхности полупроводниковых материалов под воздействием ионной бомбардировки. Изучен вопрос об устойчивости однородных состояний равновесия. В частности, выведены условия на коэффициенты, при которых происходит потеря устойчивости. В случаях, близких к критическим, для значений параметров рассмотрены задачи о локальных бифуркациях. Показано, что вопрос о формировании неоднородного нанорельефа с математической точки зрения сводится к изучению вспомогательных обыкновенных дифференциальных уравнений, которые принято называть нормальной формой Пуанкаре–Дюлака. Подтверждено, что формирование нанорельефа можно рассматривать как явление самоорганизации.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю Анатолию Николаевичу Куликову за постановку задачи и помощь при написании статьи.

Список литературы / References

[1] Sigmund P., “A mechanism of surface micro-rougening by ion bombardment”, *J. Mat. Sci.*, **8** (1973), 1545.

[2] Sigmund P., “Theory of sputtering. Sputtering yield of amorphous and polycrystalline targets”, *Phys. Rev*, **184**:2 (1969), 383–416.

[3] Syvashinsky G. I., “Weak Turbulence in Periodic Flow”, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **17**, 1985, 243–255.

[4] Kuramoto Y., *Chemical oscillations, waves and turbulence*, Springer, Berlin, 1984, 136 pp.

[5] Bradley R. M., Harper J. M. E., "Theory of Ripple Topography by ion bombardment", *J. Vac. Tech.*, **A6**, 1988, 2390–2395.

[6] Кудряшов Н. А., Рябов П. Н., Стриханов М. Н., "Численное моделирование формирования наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке", *Ядерная физика и инжиниринг*, **1, 2**, 2010, 151–158; [Kudryashov N. A., Ryabov P. N., Strikhanov M. N., "Chislennoe modelirovanie formirovaniya nanostruktur na poverkhnosti ploskikh podlozhek pri ionnoy bombardirovke", *Yadernaya fizika i inzhiniring*, **1, 2**, 2010, 151–158, (in Russian).]

[7] Кудряшов Н. А., Рябов П. Н., Федянин Т. Е., "Особенности самоорганизации наноструктур на поверхности полупроводников при ионной бомбардировке", *Математическое моделирование*, **24**, 2012, 23–28; [Kudryashov N. A., Ryabov P. N., Fedyanin T. E., "On self-organization processes of nanostructures on semiconductor surface by ion bombardment", *Matem. Mod.*, **24**:12 (2012), 23–28, (in Russian).]

[8] Carter G., "The physics and applications of ion beam erosion", *J.Ṗhys. D.: Appl. Phys*, **34**, 2001.

[9] Sigmund P., *Sputtering by ion bombardment. Theoretical concepts. Sputtering by particle bombardment*, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[10] *Функциональный анализ. Справочная математическая библиотека*, Наука, М., 1972, 544 с.; [*Funktsionalnyy analiz. Spravochnaya matematicheskaya biblioteka*, Nauka, M., 1972, 544 pp., (in Russian).]

[11] Марсден Дж., Мак-Кракен М., *Бифуркация рождения цикла и ее приложения*, Мир, 1950, 367 с.; [Marsden Dzh., Mak-Kraken M., *Bifurkatsiya rozhdeniya tsikla i ee prilozheniya*, Mir, 1950, 367 pp., (in Russian).]

[12] Куликов А. Н., *Интегральные многообразия нелинейных автономных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве*, Препринт №85 института прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР, 1991; [Kulikov A. N., *Integralnye mnogoobraziya nelineynykh avtonomnykh differentsialnykh uravneniy v gilbertovom prostranstve*, 1991, (in Russian).]

[13] Мищенко Е. Ф., Садовничий В. А., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., *Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией*, Физматлит, 2005, 431 с.; [Mishchenko E. F., Sadovnichiy V. A., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., *Avtovolnovye protsessy v nelineynykh sredakh s diffuziey*, Fizmatlit, 2005, 431 pp., (in Russian).]

[14] Люстерник Л. А., Соболев В. И., *Элементы функционального анализа*, Гос.изд-во технико-теоретической литературы, М.-Л., 1951, 360 с.; [Lyusternik L. A., Sobolev V. I., *Elementy funktsional'nogo analiza*, Gos.izd-vo tekhniko-teoreticheskoy literatury, M.-L., 1951, 360 pp., (in Russian).]

[15] Куликов А. Н., Куликов Д. А., "Формирование волнообразных наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **52**:5 (2012), 930–945; English transl.: Kulikov A. N., Kulikov D. A., "Formation of wavy nanostructures on the surface of flat substrates by ion bombardment", *Comput. Math. and Math. Phys.*, **52**:5 (2012), 800–814.

[16] Куликов А. Н., Куликов Д. А., Рудый А. С., "Бифуркации наноструктур под воздействием ионной бомбардировки", *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, 2011, № 4, 86–99; [Kulikov A. N., Kulikov D. A., Rudyy A. S., "Bifurcation of the nanostructures induced by ion bombardment", *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2011, 86–99, (in Russian).]

[17] Kulikov A. N., Kulikov D. A., "Bifurcations in a boundary-value problem of nanoelectronics", *Journal of Mathematical Sciences*, **208**:2 (2015), 211–221.

[18] Kulikov A. N., Kulikov D. A., "Bifurcation in Kuramoto–Syvashinsky equation", *Pliska Stud. Math*, **25** (2015), 81–90.

Sekatskaya A. V., "Bifurcations of Spatially Inhomogeneous Solutions of a Boundary Value Problem for the Generalized Kuramoto–Syvashinsky Equation", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:5 (2017), 615–628.

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-5-615-628

Abstract. In this paper, a differential partial equation with an unknown function of three variables time and two spatial variables – is considered. The given equation is commonly called the generalized Kuramoto–Sivashinsky (gKS) equation. This equation represents a model of the formation of a nanorelief on a surface by ion bombardment. In the work, this equation is considered with the homogeneous Neumann boundary conditions. Local bifurcations of spatially inhomogeneous equilibrium states is studied in the case of their stability changes. It is shown that the inhomogeneous surface relief can occur when the stability of the homogeneous states of equilibrium changes. The conditions were obtained for coefficients when the stability changes. In the cases close to critical cases the local bifurcation problems are considered. It was shown that a question about the formation of inhomogeneous surface relief from a mathematical point of view is reduced to the study of auxiliary ordinary differential equations which are called a Poincare–Dulac normal form. The stability analysis of spatially homogeneous equilibrium states is given, as well as local bifurcations are studied in the case of their stability changes. The method of invariant manifolds coupled with the normal form theory were used to solve this problem. For the bifurcating solutions the asymptotic formulas are given.

Keywords: bifurcation, stability, ripple structures, spatially inhomogeneous solutions

On the author:
Alina V. Sekatskaya, orcid.org/0000-0002-8421-9119, graduate student
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: alinastart@mail.ru

Acknowledgments:
This work was supported by State assignment, project № 1.5722.2017/8.9